Лингвистические основы информатики
Лекция 15
LL-анализ. Левая факторизация и избавление от левой рекурсии

Ю. В. Нагребецкая, И. А. Михайлова

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направления: Математика и компьютерные науки
Компьютерная безопасность
(6 семестр)

Пример

Найдите множества SELECT для правил вывода грамматики:

$$S \to SA \mid a$$
$$A \to ba \mid bb$$

- Эта грамматика не является $LL(1)$ грамматикой. Подумайте, почему?

Пример

Найдите множества SELECT для правил вывода грамматики:

$$S \to SA \mid a$$
$$A \to ba \mid bb$$

- Эта грамматика не является $LL(1)$ грамматикой. Подумайте, почему?
- Цепочки ba и ba имеют общий префикс, поэтому их множества $FIRST$ пересекаются.

Пример

Найдите множества SELECT для правил вывода грамматики:

$$S \to SA \mid a$$
$$A \to ba \mid bb$$

- Эта грамматика не является $LL(1)$ грамматикой. Подумайте, почему?
- Цепочки ba и ba имеют общий префикс, поэтому их множества $FIRST$ пересекаются.
- С правилом $S \to SA$ немного менее очевидная проблема (попробуйте применить его несколько раз, посмотрите в каком порядке ввыводятся символы), которая называется левой рекурсией.

Пример

Найдите множества SELECT для правил вывода грамматики:

$$S \to SA \mid a$$
$$A \to ba \mid bb$$

- Эта грамматика не является $LL(1)$ грамматикой. Подумайте, почему?
- Цепочки *ba* и *ba* имеют общий префикс, поэтому их множества *FIRST* пересекаются.
- С правилом $S \to SA$ немного менее очевидная проблема (попробуйте применить его несколько раз, посмотрите в каком порядке ввыводятся символы), которая называется левой рекурсией.
- В этой лекции мы рассмотрим алгоритмы, которые позволяют избавить грамматику от этих проблем, но не гарантируют, что в результате получится $LL(1)$-грамматика.

Лемма 1 о левой факториации

Если в грамматике G заменить правила $A \to \alpha\beta_1 \mid \alpha\beta_2 \mid \ldots \mid \alpha\beta_n$ на $A \to \alpha Q, Q \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n$ (здесь Q — новый нетерминал), то полученная грамматика G' будет эквивалентна исходной.

Лемма 1 о левой факторизации

Лемма 1 о левой факториации

Если в грамматике G заменить правила $A \to \alpha\beta_1 \mid \alpha\beta_2 \mid \dots \mid \alpha\beta_n$ на $A \to \alpha Q, Q \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \dots \mid \beta_n$ (здесь Q — новый нетерминал), то полученная грамматика G' будет эквивалентна исходной.

Доказательство очевидно.

Лемма 1 о левой факториации

Если в грамматике G заменить правила $A \to \alpha\beta_1 \mid \alpha\beta_2 \mid \ldots \mid \alpha\beta_n$ на $A \to \alpha Q, Q \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n$ (здесь Q — новый нетерминал), то полученная грамматика G' будет эквивалентна исходной.

Доказательство очевидно.

Из этой леммы получим алгоритм левой факторизации:

Лемма 1 о левой факторизации

Лемма 1 о левой факториации

Если в грамматике G заменить правила $A \to \alpha\beta_1 \mid \alpha\beta_2 \mid \ldots \mid \alpha\beta_n$ на $A \to \alpha Q, Q \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n$ (здесь Q — новый нетерминал), то полученная грамматика G' будет эквивалентна исходной.

Доказательство очевидно.

Из этой леммы получим алгоритм левой факторизации:

- Для каждого нетерминала A повторять

Лемма 1 о левой факторизации

Лемма 1 о левой факториации

Если в грамматике G заменить правила $A \to \alpha\beta_1 \mid \alpha\beta_2 \mid \ldots \mid \alpha\beta_n$ на $A \to \alpha Q$, $Q \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n$ (здесь Q — новый нетерминал), то полученная грамматика G' будет эквивалентна исходной.

Доказательство очевидно.

Из этой леммы получим алгоритм левой факторизации:

- Для каждого нетерминала A повторять

(1) Для каждого неодноэлементного подмножества альтернатив $A \to \gamma_1 \mid \ldots \mid \gamma_m$ найдем наибольший по длине общий префикс α.

Лемма 1 о левой факторизации

Лемма 1 о левой факториации

Если в грамматике G заменить правила $A \to \alpha\beta_1 \mid \alpha\beta_2 \mid \dots \mid \alpha\beta_n$ на $A \to \alpha Q, Q \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \dots \mid \beta_n$ (здесь Q — новый нетерминал), то полученная грамматика G' будет эквивалентна исходной.

Доказательство очевидно.

Из этой леммы получим алгоритм левой факторизации:

- Для каждого нетерминала A повторять

(1) Для каждого неодноэлементного подмножества альтернатив $A \to \gamma_1 \mid \dots \mid \gamma_m$ найдем наибольший по длине общий префикс α.

(2) Если $\alpha \neq \varepsilon$, то применим лемму, получим грамматику G'. Повторяем шаг (1)-(2).

Лемма 1 о левой факторизации

Лемма 1 о левой факториации

Если в грамматике G заменить правила $A \to \alpha\beta_1 \mid \alpha\beta_2 \mid \ldots \mid \alpha\beta_n$ на $A \to \alpha Q, Q \to \beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta_n$ (здесь Q — новый нетерминал), то полученная грамматика G' будет эквивалентна исходной.

Доказательство очевидно.

Из этой леммы получим алгоритм левой факторизации:

- Для каждого нетерминала A повторять

(1) Для каждого неодноэлементного подмножества альтернатив $A \to \gamma_1 \mid \ldots \mid \gamma_m$ найдем наибольший по длине общий префикс α.

(2) Если $\alpha \neq \varepsilon$, то применим лемму, получим грамматику G'. Повторяем шаг (1)-(2).

- Если нет общего префикса, то грамматика построена.

Пример 1

Сделать левую факторизацию в грамматике $S \to aSbS \mid aS \mid a$

Пример 1

Сделать левую факторизацию в грамматике $S \to aSbS \mid aS \mid a$

- Для правил $S \to aSbS \mid aS$ есть общий префикс aS.

Пример 1

Сделать левую факторизацию в грамматике $S \to aSbS \mid aS \mid a$

- Для правил $S \to aSbS \mid aS$ есть общий префикс aS.
- Применим лемму, получим грамматику

$$\begin{aligned} S &\to aSQ \mid a \\ Q &\to bS \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Пример 1

Сделать левую факторизацию в грамматике $S \to aSbS \mid aS \mid a$

- Для правил $S \to aSbS \mid aS$ есть общий префикс aS.
- Применим лемму, получим грамматику

$$S \to aSQ \mid a$$
$$Q \to bS \mid \varepsilon$$

- У правил $S \to aSQ \mid a$ есть общий префикс a.

Пример 1

Сделать левую факторизацию в грамматике $S \to aSbS \mid aS \mid a$

- Для правил $S \to aSbS \mid aS$ есть общий префикс aS.
- Применим лемму, получим грамматику

$$S \to aSQ \mid a$$
$$Q \to bS \mid \varepsilon$$

- У правил $S \to aSQ \mid a$ есть общий префикс a.
- Применим лемму, получим

$$S \to aR$$
$$Q \to bS \mid \varepsilon$$
$$R \to SQ \mid \varepsilon$$

Лемма 2 о непосредственной левой рекурсии

- Правило вида $A \to A\gamma$ называется непосредственной левой рекурсией, а нетерминал A непосредственно леворекурсивным.

Лемма 2 о непосредственной левой рекурсии

- Правило вида $A \to A\gamma$ называется непосредственной левой рекурсией, а нетерминал A непосредственно леворекурсивным.
- Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2 о непосредственной левой рекурсии

- Правило вида $A \to A\gamma$ называется непосредственной левой рекурсией, а нетерминал A непосредственно леворекурсивным.
- Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2 об избавлении от непосредственной левой рекурсии

Пусть в некоторой грамматике $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$ для некоторого нетерминала A есть список правил $A \to A\gamma_1 \mid \ldots \mid A\gamma_s \mid \beta_1 \mid \ldots \mid \beta_m$ (*), где ни одна из цепочек β_i не начинается с A. Тогда грамматика G', полученная добавлением нового нетерминала A' и заменой правил $(*)$ на
$A \to \beta_1 A' \mid \ldots \mid \beta_m A', A' \to \gamma_1 A' \mid \ldots \mid \gamma_s A' \mid \varepsilon$ (**), эквивалентна грамматике G.

Доказательство леммы 2

Доказательство.

Доказательство леммы 2

Доказательство.

- Покажем, что схемы (*) и (**) эквивалентны, то есть множества цепочек, которые можно вывести из нетерминала A, совпадают.

Доказательство леммы 2

Доказательство.

- Покажем, что схемы (*) и (**) эквивалентны, то есть множества цепочек, которые можно вывести из нетерминала A, совпадают.
- Рассмотрим вывод

$$A \Rightarrow A\gamma_{j_1} \Rightarrow A\gamma_{j_2}\gamma_{j_1} \Rightarrow^* A\gamma_{j_p}\ldots\gamma_{j_2}\gamma_{j_1} \Rightarrow \beta_i\gamma_{j_p}\ldots\gamma_{j_2}\gamma_{j_1}$$

Доказательство леммы 2

Доказательство.

- Покажем, что схемы (*) и (**) эквивалентны, то есть множества цепочек, которые можно вывести из нетерминала A, совпадают.
- Рассмотрим вывод

$$A \Rightarrow A\gamma_{j_1} \Rightarrow A\gamma_{j_2}\gamma_{j_1} \Rightarrow^* A\gamma_{j_p}\ldots\gamma_{j_2}\gamma_{j_1} \Rightarrow \beta_i\gamma_{j_p}\ldots\gamma_{j_2}\gamma_{j_1}$$

- Ему соответствует вывод в (**)

$$A \Rightarrow \beta_i A' \Rightarrow_i^{\beta} \gamma_{j_p} A' \Rightarrow^* \beta_i\gamma_{j_p}\ldots\gamma_{j_2} A' \Rightarrow \beta_i\gamma_{j_p}\ldots\gamma_{j_2}\gamma_{j_1} A' \Rightarrow \beta_i\gamma_{j_p}\ldots\gamma_{j_2}\gamma_{j_1}$$

Пример 2

Рассмотрим грамматику арифметических выражений

$$S \to S + A \mid A$$
$$A \to A * B \mid B$$
$$B \to x \mid (S)$$

Пример 2

Рассмотрим грамматику арифметических выражений

$$S \to S + A \mid A$$
$$A \to A * B \mid B$$
$$B \to x \mid (S)$$

- Здесь два непосредственно леворекурсивных нетерминала S и A. Начнем с S.

Пример 2

Рассмотрим грамматику арифметических выражений

$$S \to S + A \mid A$$
$$A \to A * B \mid B$$
$$B \to x \mid (S)$$

- Здесь два непосредственно леворекурсивных нетерминала S и A. Начнем с S.
- Применив лемму 2 для $A := S$, $\gamma_1 := +A$, $\beta_1 := A$, получим грамматику

$$S \to AS'$$
$$S' \to +AS'\varepsilon$$
$$A \to A * B \mid B$$
$$B \to x \mid (S)$$

Пример 2 (продолжение)

Проделаем подобные преобразования для непосредственно леворекурсивного символа A (здесь $A := A$, $\gamma_1 := *B, \beta_1 := B$)

$$S \to AS'$$

$$S' \to +AS'\varepsilon$$

$$A \to A * B \mid B$$

$$B \to x \mid (S)$$

Пример 2 (продолжение)

Проделаем подобные преобразования для непосредственно леворекурсивного символа A (здесь $A := A$, $\gamma_1 := *B, \beta_1 := B$)

$$S \to AS'$$
$$S' \to +AS'\varepsilon$$
$$A \to A * B \mid B$$
$$B \to x \mid (S)$$

В итоге получим грамматику без непосредственной левой рекурсии

$$S \to AS'$$
$$S' \to +AS'\varepsilon$$
$$A \to BA'$$
$$A' \to *BA' \mid \varepsilon$$
$$B \to x \mid (S)$$

Теорема об устранении левой рекурсии

- Вывод вида $A \Rightarrow^{+} A\gamma$ назвается левой рекурсией, а нетерминал A называется леворекурсивным.

Теорема об устранении левой рекурсии

- Вывод вида $A \Rightarrow^{+} A\gamma$ назвается левой рекурсией, а нетерминал A называется леворекурсивным.
- Очевидно, если в грамматике есть непосредственная левая рекурсия, то в ней есть левая рекурсия.

Теорема об устранении левой рекурсии

- Вывод вида $A \Rightarrow^{+} A\gamma$ назвается левой рекурсией, а нетерминал A называется леворекурсивным.
- Очевидно, если в грамматике есть непосредственная левая рекурсия, то в ней есть левая рекурсия.
- Обратное неверно (упр.)

Теорема об устранении левой рекурсии

- Вывод вида $A \Rightarrow^{+} A\gamma$ назвается левой рекурсией, а нетерминал A называется леворекурсивным.
- Очевидно, если в грамматике есть непосредственная левая рекурсия, то в ней есть левая рекурсия.
- Обратное неверно (упр.)

Теорема об устранении левой рекурсии

Пусть $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$ — ε-свободная грамматика. Тогда существует эквивалентная ей грамматика без левой рекурсии.

Теорема об устранении левой рекурсии

- Вывод вида $A \Rightarrow^{+} A\gamma$ назвается левой рекурсией, а нетерминал A называется леворекурсивным.
- Очевидно, если в грамматике есть непосредственная левая рекурсия, то в ней есть левая рекурсия.
- Обратное неверно (упр.)

Теорема об устранении левой рекурсии

Пусть $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$ — ε-свободная грамматика. Тогда существует эквивалентная ей грамматика без левой рекурсии.

Замечание. Хотя в теореме сказано, что грамматика ε-свободная, но на практике при избавлении от левой рекурсии (а особенно при устранении непосредственной левой рекурсии) этого не требуется.

- Вывод вида $A \Rightarrow^{+} A\gamma$ назвается левой рекурсией, а нетерминал A называется леворекурсивным.
- Очевидно, если в грамматике есть непосредственная левая рекурсия, то в ней есть левая рекурсия.
- Обратное неверно (упр.)

Теорема об устранении левой рекурсии

Пусть $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$ — ε-свободная грамматика. Тогда существует эквивалентная ей грамматика без левой рекурсии.

Замечание. Хотя в теореме сказано, что грамматика ε-свободная, но на практике при избавлении от левой рекурсии (а особенно при устранении непосредственной левой рекурсии) этого не требуется.

Для **доказательства** теоремы приведем алгоритм устранения левой рекурсии и докажем его корректность.

Алгоритм устранения левой рекурсии

Вход: КС ε-свободная грамматика $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$.
Выход: КС грамматика $G' = (\Sigma, \Gamma', P', S)$ без левой рекурсии.

Алгоритм устранения левой рекурсии

Алгоритм устранения левой рекурсии

Вход: КС ε-свободная грамматика $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$.
Выход: КС грамматика $G' = (\Sigma, \Gamma', P', S)$ без левой рекурсии.

1. положить $G_{1,0} = G$

Алгоритм устранения левой рекурсии

Вход: КС ε-свободная грамматика $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$.
Выход: КС грамматика $G' = (\Sigma, \Gamma', P', S)$ без левой рекурсии.

1. положить $G_{1,0} = G$
2. for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

Алгоритм устранения левой рекурсии

Вход: КС ε-свободная грамматика $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$.
Выход: КС грамматика $G' = (\Sigma, \Gamma', P', S)$ без левой рекурсии.

1. положить $G_{1,0} = G$
2. for $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:
    1. for $j \in \{1, 2, \ldots, i - 1\}$:

Алгоритм устранения левой рекурсии

Вход: КС ε-свободная грамматика $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$.
Выход: КС грамматика $G' = (\Sigma, \Gamma', P', S)$ без левой рекурсии.

1. положить $G_{1,0} = G$
2. for $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:
   1. for $j \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$:
      1. $P = P_{i,j-1}$

Алгоритм устранения левой рекурсии

Вход: КС ε-свободная грамматика $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$.
Выход: КС грамматика $G' = (\Sigma, \Gamma', P', S)$ без левой рекурсии.

1. положить $G_{1,0} = G$
2. for $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:
   1. for $j \in \{1, 2, \dots, i-1\}$:
      1. $P = P_{i,j-1}$
      2. for $p = (A_i \to A_j\gamma) \in P_{i,j-1}$:
         удалить правило p из P
         добавить в P правило $(A_i \to \eta\gamma)$ в том случае, если $(A_j \to \eta) \in P$

Алгоритм устранения левой рекурсии

Алгоритм устранения левой рекурсии

Вход: КС ε-свободная грамматика $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$.
Выход: КС грамматика $G' = (\Sigma, \Gamma', P', S)$ без левой рекурсии.

1. положить $G_{1,0} = G$
2. for $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:
    1. for $j \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$:
        1. $P = P_{i,j-1}$
        2. for $p = (A_i \to A_j\gamma) \in P_{i,j-1}$:
           удалить правило p из P
           добавить в P правило $(A_i \to \eta\gamma)$ в том случае, если $(A_j \to \eta) \in P$
        3. $P_{i,j} = P$ — новое множество правил

Алгоритм устранения левой рекурсии

Алгоритм устранения левой рекурсии

Вход: КС ε-свободная грамматика $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$.
Выход: КС грамматика $G' = (\Sigma, \Gamma', P', S)$ без левой рекурсии.

1. положить $G_{1,0} = G$
2. for $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:
   1. for $j \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$:
      1. $P = P_{i,j-1}$
      2. for $p = (A_i \to A_j\gamma) \in P_{i,j-1}$:
         удалить правило p из P
         добавить в P правило $(A_i \to \eta\gamma)$ в том случае, если $(A_j \to \eta) \in P$
      3. $P_{i,j} = P$ — новое множество правил
      4. обозначить полученную грамматику через $G_{i,j}$

Алгоритм устранения левой рекурсии

Вход: КС ε-свободная грамматика $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$.
Выход: КС грамматика $G' = (\Sigma, \Gamma', P', S)$ без левой рекурсии.

1. положить $G_{1,0} = G$
2. for $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:
   1. for $j \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$:
      1. $P = P_{i,j-1}$
      2. for $p = (A_i \to A_j\gamma) \in P_{i,j-1}$:
         удалить правило p из P
         добавить в P правило $(A_i \to \eta\gamma)$ в том случае, если $(A_j \to \eta) \in P$
      3. $P_{i,j} = P$ — новое множество правил
      4. обозначить полученную грамматику через $G_{i,j}$
   2. if есть непосред. левая рекурсия для $A_i \to A_i\beta$:
      устранить ее, использовав нетерминал $A_{-i} = A'_i$

Алгоритм устранения левой рекурсии

Алгоритм устранения левой рекурсии

Вход: КС ε-свободная грамматика $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$.
Выход: КС грамматика $G' = (\Sigma, \Gamma', P', S)$ без левой рекурсии.

1. положить $G_{1,0} = G$
2. for $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:
    1. for $j \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$:
        1. $P = P_{i,j-1}$
        2. for $p = (A_i \to A_j\gamma) \in P_{i,j-1}$:
           удалить правило p из P
           добавить в P правило $(A_i \to \eta\gamma)$ в том случае, если $(A_j \to \eta) \in P$
        3. $P_{i,j} = P$ — новое множество правил
        4. обозначить полученную грамматику через $G_{i,j}$
    2. if есть непосред. левая рекурсия для $A_i \to A_i\beta$:
       устранить ее, использовав нетерминал $A_{-i} = A'_i$
    3. обозначить полученную грамматику через $G_{i,i}$ с множеством правил $P_{i,i}$

Алгоритм устранения левой рекурсии

Алгоритм устранения левой рекурсии

Вход: КС ε-свободная грамматика $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$.
Выход: КС грамматика $G' = (\Sigma, \Gamma', P', S)$ без левой рекурсии.

1. положить $G_{1,0} = G$
2. for $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:
   1. for $j \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$:
      1. $P = P_{i,j-1}$
      2. for $p = (A_i \to A_j\gamma) \in P_{i,j-1}$:
         удалить правило p из P
         добавить в P правило $(A_i \to \eta\gamma)$ в том случае, если $(A_j \to \eta) \in P$
      3. $P_{i,j} = P$ — новое множество правил
      4. обозначить полученную грамматику через $G_{i,j}$
   2. if есть непосред. левая рекурсия для $A_i \to A_i\beta$:
      устранить ее, использовав нетерминал $A_{-i} = A'_i$
   3. обозначить полученную грамматику через $G_{i,i}$ с множеством правил $P_{i,i}$
   4. if $i < n$ положить $G_{i+1,0} = G_{i,i}$

Алгоритм устранения левой рекурсии

Алгоритм устранения левой рекурсии

Вход: КС ε-свободная грамматика $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$.
Выход: КС грамматика $G' = (\Sigma, \Gamma', P', S)$ без левой рекурсии.

1. положить $G_{1,0} = G$
2. for $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:
   1. for $j \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$:
      1. $P = P_{i,j-1}$
      2. for $p = (A_i \to A_j\gamma) \in P_{i,j-1}$:
         удалить правило p из P
         добавить в P правило $(A_i \to \eta\gamma)$ в том случае, если $(A_j \to \eta) \in P$
      3. $P_{i,j} = P$ — новое множество правил
      4. обозначить полученную грамматику через $G_{i,j}$
   2. if есть непосред. левая рекурсия для $A_i \to A_i\beta$:
      устранить ее, использовав нетерминал $A_{-i} = A'_i$
   3. обозначить полученную грамматику через $G_{i,i}$ с множеством правил $P_{i,i}$
   4. if $i < n$ положить $G_{i+1,0} = G_{i,i}$
3. $G' = G_{n,n}$ — искомая грамматика

Доказательство корректности алгоритма устранения левой рекурсии

Доказательство корректности алгоритма.

Доказательство корректности алгоритма устранения левой рекурсии

Доказательство корректности алгоритма.

- Сначала покажем, что алгоритм останавливается через конечное время. Цикл (2) по i работает $n-1$ раз, цикл (2.1) для каждого i работает $i-1$ раз, для любых i, j цикл (2.1.2) работает не более, чем $|P_{i,j-1}|$ раз.

Доказательство корректности алгоритма устранения левой рекурсии

Доказательство корректности алгоритма.

- Сначала покажем, что алгоритм останавливается через конечное время. Цикл (2) по i работает $n-1$ раз, цикл (2.1) для каждого i работает $i-1$ раз, для любых i, j цикл (2.1.2) работает не более, чем $|P_{i,j-1}|$ раз.
- Упорядочим лексикографически множество пар $(1, 1)$, (i, j) для $i \in \{2, \ldots, n\}$, $j \in \{0, 2, \ldots, i\}$.
  Обозначим полученное упорядоченное множество пар через Q:

Доказательство корректности алгоритма устранения левой рекурсии

Доказательство корректности алгоритма.

- Сначала покажем, что алгоритм останавливается через конечное время. Цикл (2) по i работает $n-1$ раз, цикл (2.1) для каждого i работает $i-1$ раз, для любых i, j цикл (2.1.2) работает не более, чем $|P_{i,j-1}|$ раз.
- Упорядочим лексикографически множество пар $(1,1)$, (i,j) для $i \in \{2,\dots,n\}$, $j \in \{0,2,\dots,i\}$.
Обозначим полученное упорядоченное множество пар через Q:

  $$\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),\dots,(n,0),(n,1),\dots,(n,n)\}$$

Доказательство корректности алгоритма устранения левой рекурсии

Доказательство корректности алгоритма.

- Сначала покажем, что алгоритм останавливается через конечное время. Цикл (2) по i работает $n-1$ раз, цикл (2.1) для каждого i работает $i-1$ раз, для любых i, j цикл (2.1.2) работает не более, чем $|P_{i,j-1}|$ раз.
- Упорядочим лексикографически множество пар $(1,1)$, (i,j) для $i \in \{2,\dots,n\}$, $j \in \{0,2,\dots,i\}$.
  Обозначим полученное упорядоченное множество пар через Q:

  $$\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),\dots,(n,0),(n,1),\dots,(n,n)\}$$

Лемма 3

Для любого $q = (i, j) \in Q$ в грамматике G_q не может быть правил вида $A_r \to A_s\gamma$, где $1 \leq s \leq r < i$.

- **Доказательство** проведем индукцией по линейно упорядоченному множеству Q.

Лемма 3

Лемма 3

Для любого $q = (i, j) \in Q$ в грамматике G_q не может быть правил вида $A_r \to A_s\gamma$, где $1 \leq s \leq r < i$.

- **Доказательство** проведем индукцией по линейно упорядоченному множеству Q.
- Б.И.: $q = (i, j) = (1, 1)$ очевидна, поскольку не найдется такого s, что $1 \leq s < r \leq 1$.

Лемма 3

Для любого $q = (i, j) \in Q$ в грамматике G_q не может быть правил вида $A_r \to A_s\gamma$, где $1 \leq s \leq r < i$.

- **Доказательство** проведем индукцией по линейно упорядоченному множеству Q.
- Б.И.: $q = (i, j) = (1, 1)$ очевидна, поскольку не найдется такого s, что $1 \leq s < r \leq 1$.
- Ш.И.: Пусть утверждение доказано для всех $u \leq q$, $u, q \in Q$.

Лемма 3

Лемма 3

Для любого $q = (i, j) \in Q$ в грамматике G_q не может быть правил вида $A_r \to A_s\gamma$, где $1 \leq s \leq r < i$.

- **Доказательство** проведем индукцией по линейно упорядоченному множеству Q.
- Б.И.: $q = (i, j) = (1, 1)$ очевидна, поскольку не найдется такого s, что $1 \leq s < r \leq 1$.
- Ш.И.: Пусть утверждение доказано для всех $u \leq q$, $u, q \in Q$. Докажем утверждение для $q = (i, j)$.

Лемма 3

Для любого $q = (i, j) \in Q$ в грамматике G_q не может быть правил вида $A_r \to A_s\gamma$, где $1 \le s \le r < i$.

- **Доказательство** проведем индукцией по линейно упорядоченному множеству Q.
- Б.И.: $q = (i, j) = (1, 1)$ очевидна, поскольку не найдется такого s, что $1 \le s < r \le 1$.
- Ш.И.: Пусть утверждение доказано для всех $u \le q$, $u, q \in Q$. Докажем утверждение для $q = (i, j)$.
- Если $j = 0$, то $i > 1$ и $G_q = G_{i,0} = G_{i-1,i-1}$ по (2.4) алгоритма. А для $u = (i-1, i-1) < (i, 0) = q$ справедливо П.И.

Лемма 3

Для любого $q = (i, j) \in Q$ в грамматике G_q не может быть правил вида $A_r \to A_s\gamma$, где $1 \leq s \leq r < i$.

- **Доказательство** проведем индукцией по линейно упорядоченному множеству Q.
- Б.И.: $q = (i, j) = (1, 1)$ очевидна, поскольку не найдется такого s, что $1 \leq s < r \leq 1$.
- Ш.И.: Пусть утверждение доказано для всех $u \leq q$, $u, q \in Q$. Докажем утверждение для $q = (i, j)$.
- Если $j = 0$, то $i > 1$ и $G_q = G_{i,0} = G_{i-1,i-1}$ по (2.4) алгоритма. А для $u = (i-1, i-1) < (i, 0) = q$ справедливо П.И.
- Поэтому можно считать, что $1 \leq j \leq i$.

Лемма 3. Доказательство

- Тогда возможно два случая:
  1. Пусть $j = i$, тогда грамматика $G_q = G_{i,i}$ получена из грамматики $G_u = G_{i-1,i}$ в i-й итерации цикла (2) в п.(2.2)–(2.3). Причем изменения в множестве $P_{i,i}$ правил грамматики $G_{i,j}$ по отношению к множеству $P_{i-1,i-1}$ правил грамматики $G_{i-1,i-1}$ могут касаться лишь правил вида $A_i \to A_i\gamma$ или $A_{-i} \to \beta$. Таким образом, если $(A_r \to A_s\gamma) \in P_{i,i}$, где $1 \leq s \leq r < i$, то $(A_r \to A_s\gamma) \in P_{i,i-1}$, то противоречит П.И.

Лемма 3. Доказательство

- Тогда возможно два случая:
  1. Пусть $j = i$, тогда грамматика $G_q = G_{i,i}$ получена из грамматики $G_u = G_{i-1,i}$ в i-й итерации цикла (2) в п.(2.2)–(2.3). Причем изменения в множестве $P_{i,i}$ правил грамматики $G_{i,j}$ по отношению к множеству $P_{i-1,i-1}$ правил грамматики $G_{i-1,i-1}$ могут касаться лишь правил вида $A_i \to A_i\gamma$ или $A_{-i} \to \beta$. Таким образом, если $(A_r \to A_s\gamma) \in P_{i,i}$, где $1 \leq s \leq r < i$, то $(A_r \to A_s\gamma) \in P_{i,i-1}$, то противоречит П.И.
  2. Пусть $j < i$, тогда грамматика $G_q = G_{i,j}$ получена из грамматики $G_u = G_{i,j-1}$ в i-й итерации цикла (2), в j-й итерации цикла (2.1) в п.(2.1.1)–(2.1.4). Снова видим, что множество $P_{i,j}$ может отличаться от множества $P_{i,j-1}$ только на правила вида $A_i \to A_j\gamma$. Приходим к противоречию аналогично п.1 выше.

Лемма 4

Лемма 4

Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в грамматике $G_{i,i}$ не может быть правил вида $A_i \to A_s\alpha$, где $1 \leq s \leq i$.

- **Доказательство**
- Грамматика $G_{i,i}$ получена из грамматики $G_{i,i-1}$ в конце i-й итерации цикла (2), в п.(2.4).

Лемма 4

Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в грамматике $G_{i,i}$ не может быть правил вида $A_i \to A_s\alpha$, где $1 \leq s \leq i$.

- **Доказательство**
- Грамматика $G_{i,i}$ получена из грамматики $G_{i,i-1}$ в конце i-й итерации цикла (2), в п.(2.4).
- Заметим сразу, что $s \neq i$, поскольку в п.(2.2)–(2.3) из грамматики $G_{i,i-1}$ устраняются все левые рекурсии вида $A_i \to A_i\gamma$.

Лемма 4

Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в грамматике $G_{i,i}$ не может быть правил вида $A_i \to A_s\alpha$, где $1 \leq s \leq i$.

- **Доказательство**
- Грамматика $G_{i,i}$ получена из грамматики $G_{i,i-1}$ в конце i-й итерации цикла (2), в п.(2.4).
- Заметим сразу, что $s \neq i$, поскольку в п.(2.2)–(2.3) из грамматики $G_{i,i-1}$ устраняются все левые рекурсии вида $A_i \to A_i\gamma$.
- Значит, можно считать, что $s < i$.

Лемма 4

Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в грамматике $G_{i,i}$ не может быть правил вида $A_i \to A_s\alpha$, где $1 \leq s \leq i$.

- **Доказательство**
- Грамматика $G_{i,i}$ получена из грамматики $G_{i,i-1}$ в конце i-й итерации цикла (2), в п.(2.4).
- Заметим сразу, что $s \neq i$, поскольку в п.(2.2)–(2.3) из грамматики $G_{i,i-1}$ устраняются все левые рекурсии вида $A_i \to A_i\gamma$.
- Значит, можно считать, что $s < i$.
- Как и при доказательстве леммы 3 для случая $j = i$ (случай 1), можно показать, что правило $A_i \to A_s\alpha$ принадлежит не только множеству $P_{i,i}$, но и множеству $P_{i,i-1}$.

Лемма 4

Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в грамматике $G_{i,i}$ не может быть правил вида $A_i \to A_s\alpha$, где $1 \leq s \leq i$.

- **Доказательство**
- Грамматика $G_{i,i}$ получена из грамматики $G_{i,i-1}$ в конце i-й итерации цикла (2), в п.(2.4).
- Заметим сразу, что $s \neq i$, поскольку в п.(2.2)–(2.3) из грамматики $G_{i,i-1}$ устраняются все левые рекурсии вида $A_i \to A_i\gamma$.
- Значит, можно считать, что $s < i$.
- Как и при доказательстве леммы 3 для случая $j = i$ (случай 1), можно показать, что правило $A_i \to A_s\alpha$ принадлежит не только множеству $P_{i,i}$, но и множеству $P_{i,i-1}$.

Лемма 4. Доказательство

- Правило $A_i \to A_s\alpha$ не может находиться во множестве $P_{i,i-2}$, иначе на i-й итерации цикла (2) на $j = i - 1$-й итерации цикла (2.1) на некоторой итерации цикла (2.1.2) оно бы было удалено, и не попало бы во множество $P_{i,i-1}$.

Лемма 4. Доказательство

- Правило $A_i \to A_s\alpha$ не может находиться во множестве $P_{i,i-2}$, иначе на i-й итерации цикла (2) на $j = i - 1$-й итерации цикла (2.1) на некоторой итерации цикла (2.1.2) оно бы было удалено, и не попало бы во множество $P_{i,i-1}$.
- Значит, оно было добавлено в некоторой итерации цикла (2.1.2) как правило $A_i \to \eta\gamma$, причем $(A_i \to A_j) \in P_{i,j-1}$, $(A_j \to \eta) \in P_{i,j-1}$, $\eta = A_s\eta'$. Следовательно, $(A_j \to A_s\eta') \in P_{i,j-1}$.

Лемма 4. Доказательство

- Правило $A_i \to A_s\alpha$ не может находиться во множестве $P_{i,i-2}$, иначе на i-й итерации цикла (2) на $j = i - 1$-й итерации цикла (2.1) на некоторой итерации цикла (2.1.2) оно бы было удалено, и не попало бы во множество $P_{i,i-1}$.
- Значит, оно было добавлено в некоторой итерации цикла (2.1.2) как правило $A_i \to \eta\gamma$, причем $(A_i \to A_j) \in P_{i,j-1}$, $(A_j \to \eta) \in P_{i,j-1}$, $\eta = A_s\eta'$. Следовательно, $(A_j \to A_s\eta') \in P_{i,j-1}$.
- Взяв в качестве $r := j$, в качестве $j := j - 1$, и применяя лемму 3, приходим к выводу, что s не может быть меньше или равно j. Таким образом, $s > j$, т.е. $s = i$. Противоречие.

Следствие 1

Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в грамматике $G_{i,i}$ не может быть правил вида $A_r \to A_s\alpha$, где $1 \leq s \leq r \leq i$.

Следствие 1

Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в грамматике $G_{i,i}$ не может быть правил вида $A_r \to A_s\alpha$, где $1 \leq s \leq r \leq i$.

- **Доказательство** следует непосредственно из лемм 3,4.

Следствие 2

Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в грамматике $G_{i,i}$ не может быть правил вида $A_r \to A_s\alpha$, где $-i \leq s \leq r \leq i$, $s \neq 0$, $r \neq 0$.

Следствие 2

Для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ в грамматике $G_{i,i}$ не может быть правил вида $A_r \to A_s\alpha$, где $-i \le s \le r \le i$, $s \ne 0$, $r \ne 0$.

- **Доказательство**. Во-первых, ввиду ε-свободы исходной грамматики G индукцией по Q нетрудно показать, что для любого $q = (i, j)$ в грамматике G_q нет правил вида $A_i \to \varepsilon$.

Следствие 2

Следствие 2

Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в грамматике $G_{i,i}$ не может быть правил вида $A_r \to A_s\alpha$, где $-i \leq s \leq r \leq i$, $s \neq 0$, $r \neq 0$.

- **Доказательство**. Во-первых, ввиду ε-свободы исходной грамматики G индукцией по Q нетрудно показать, что для любого $q = (i, j)$ в грамматике G_q нет правил вида $A_i \to \varepsilon$.
- Нетерминалы A_{-k}, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, могут появиться на только на k-й итерации цикла (2) на шаге (2.2) при построении грамматики $G_{k,k}$ по грамматике $G_{k,k-1}$ при устранении непосредственной левой рекурсии $A_k \to A_k\gamma \mid \beta$, которая по лемме 2 заменяется на $A_k \to \beta A_{-k}$, $A_{-k} \to \gamma A_{-k} \mid \varepsilon$, где слова β, γ, $\beta \neq \varepsilon$, $\gamma \neq \varepsilon$ не начинается ни на какое A_{-k}, ни на какое A_{-l}, $l > k$.

Следствие 2

Следствие 2

Для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ в грамматике $G_{i,i}$ не может быть правил вида $A_r \to A_s\alpha$, где $-i \leq s \leq r \leq i$, $s \neq 0$, $r \neq 0$.

- **Доказательство**. Во-первых, ввиду ε-свободы исходной грамматики G индукцией по Q нетрудно показать, что для любого $q = (i, j)$ в грамматике G_q нет правил вида $A_i \to \varepsilon$.
- Нетерминалы A_{-k}, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, могут появиться на только на k-й итерации цикла (2) на шаге (2.2) при построении грамматики $G_{k,k}$ по грамматике $G_{k,k-1}$ при устранении непосредственной левой рекурсии $A_k \to A_k\gamma \mid \beta$, которая по лемме 2 заменяется на $A_k \to \beta A_{-k}$, $A_{-k} \to \gamma A_{-k} \mid \varepsilon$, где слова β, γ, $\beta \neq \varepsilon$, $\gamma \neq \varepsilon$ не начинается ни на какое A_{-k}, ни на какое A_{-l}, $l > k$.

Следствие 2

Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ в грамматике $G_{i,i}$ не может быть правил вида $A_r \to A_s\alpha$, где $-i \leq s \leq r \leq i$, $s \neq 0$, $r \neq 0$.

- **Доказательство**. Во-первых, ввиду ε-свободы исходной грамматики G индукцией по Q нетрудно показать, что для любого $q = (i, j)$ в грамматике G_q нет правил вида $A_i \to \varepsilon$.
- Нетерминалы A_{-k}, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, могут появиться на только на k-й итерации цикла (2) на шаге (2.2) при построении грамматики $G_{k,k}$ по грамматике $G_{k,k-1}$ при устранении непосредственной левой рекурсии $A_k \to A_k\gamma \mid \beta$, которая по лемме 2 заменяется на $A_k \to \beta A_{-k}$, $A_{-k} \to \gamma A_{-k} \mid \varepsilon$, где слова β, γ, $\beta \neq \varepsilon$, $\gamma \neq \varepsilon$ не начинается ни на какое A_{-k}, ни на какое A_{-l}, $l > k$.
- Таким образом, из этих рассуждений и из следствия 1 имеем требуемое.

Следствие 3

В грамматике $G_{n,n}$ нет левой рекурсии.

Следствие 3

В грамматике $G_{n,n}$ нет левой рекурсии.

- **Доказательство**.
- О/п. Пусть в грамматике $G_{n,n}$ есть левая рекурсия $A_i \Rightarrow^+ A_i\alpha$.

Следствие 3

В грамматике $G_{n,n}$ нет левой рекурсии.

- **Доказательство**.
- О/п. Пусть в грамматике $G_{n,n}$ есть левая рекурсия $A_i \Rightarrow^+ A_i\alpha$.
- Это означает, что по следствию 3 есть вывод

$$A_i = A_{i_1} \Rightarrow A_{i_2}\beta_1 \Rightarrow A_{i_3}\beta_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_{i_m}\beta_m = A_i\alpha$$

Следствие 3

В грамматике $G_{n,n}$ нет левой рекурсии.

- **Доказательство**.
- О/п. Пусть в грамматике $G_{n,n}$ есть левая рекурсия $A_i \Rightarrow^+ A_i\alpha$.
- Это означает, что по следствию 3 есть вывод

$$A_i = A_{i_1} \Rightarrow A_{i_2}\beta_1 \Rightarrow A_{i_3}\beta_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_{i_m}\beta_m = A_i\alpha$$

- В этом выводе на каждом шаге применяются правила вывода вида $A_{i_k} \to A_{i_l}\gamma$, где $i_k < i_l$.

Следствие 3

В грамматике $G_{n,n}$ нет левой рекурсии.

- **Доказательство**.
- О/п. Пусть в грамматике $G_{n,n}$ есть левая рекурсия $A_i \Rightarrow^+ A_i\alpha$.
- Это означает, что по следствию 3 есть вывод

$$A_i = A_{i_1} \Rightarrow A_{i_2}\beta_1 \Rightarrow A_{i_3}\beta_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_{i_m}\beta_m = A_i\alpha$$

- В этом выводе на каждом шаге применяются правила вывода вида $A_{i_k} \to A_{i_l}\gamma$, где $i_k < i_l$.
- Следовательно, $i = i_1 < i_2 < \ldots < i_m = i$, противоречие.

Лемма 5

Лемма 5

Для любого $q \in Q$ имеет место $L(G_q) = L(G)$.

Лемма 5

Для любого $q \in Q$ имеет место $L(G_q) = L(G)$.

- **Доказательство** (упр.) проведите индукцией по линейно упорядоченному множеству Q.

Пример 3

Устранить левую рекурсию в грамматике G

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_2 a \mid A_3 b \\ A_2 &\to A_1 c \mid A_3 a \\ A_3 &\to A_2 A_1 \mid A_3 b \mid a \end{aligned}$$

Пример 3

Устранить левую рекурсию в грамматике G

$$
\begin{aligned}
A_1 &\to A_2 a \mid A_3 b \\
A_2 &\to A_1 c \mid A_3 a \\
A_3 &\to A_2 A_1 \mid A_3 b \mid a
\end{aligned}
$$

- $G_{0,1} = G$. Так как нет правил вида $A_1 \to A_1\gamma$, то $G_{2,0} = G_{1,1} = G$

Пример 3

Устранить левую рекурсию в грамматике G

$$A_1 \to A_2 a \mid A_3 b$$
$$A_2 \to A_1 c \mid A_3 a$$
$$A_3 \to A_2 A_1 \mid A_3 b \mid a$$

- $G_{0,1} = G$. Так как нет правил вида $A_1 \to A_1 \gamma$, то $G_{2,0} = G_{1,1} = G$
- Рассмотрим правило $A_2 \to A_1 c$, построим грамматику $G_{2,1}$, заменив его на $A_2 \to A_2 ac \mid A_3 bc$:

Пример 3 (продолжение)

$$
\begin{aligned}
A_1 &\to A_2 a \mid A_3 b \\
A_2 &\to A_2 ac \mid A_3 bc \mid A_3 a \\
A_3 &\to A_2 A_1 \mid A_3 b \mid a
\end{aligned}
$$

- Устраняем непосредственную левую рекурсию для нетерминала A_2,

$$
\begin{aligned}
A_2 &\to A_3 bcA_{-2} \mid A_3 aA_{-2} \\
A_{-2} &\to acA_{-2} \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

Пример 3 (продолжение)

Получим грамматику $G_{2,2} = G_{3,0}$:

$$
\begin{aligned}
A_1 &\to A_2 a \mid A_3 b \\
A_2 &\to A_3 bcA_{-2} \mid A_3 aA_{-2} \\
A_{-2} &\to acA_{-2} \mid \varepsilon \\
A_3 &\to A_2 A_1 \mid A_3 b \mid a
\end{aligned}
$$

- Нет правил вида $A_3 \to A_1\gamma$, поэтому $G_{3,1} = G_{3,0} = G_{2,2}$.

Пример 3 (продолжение)

Получим грамматику $G_{2,2} = G_{3,0}$:

$$
\begin{aligned}
A_1 &\to A_2 a \mid A_3 b \\
A_2 &\to A_3 bcA_{-2} \mid A_3 aA_{-2} \\
A_{-2} &\to acA_{-2} \mid \varepsilon \\
A_3 &\to A_2 A_1 \mid A_3 b \mid a
\end{aligned}
$$

- Нет правил вида $A_3 \to A_1\gamma$, поэтому $G_{3,1} = G_{3,0} = G_{2,2}$.
- Строим грамматику $G_{3,2}$, удаляя правило $A_3 \to A_2 A_1$ и заменяя правилами $A_3 \to A_3 acA_{-2} A_1 \mid A_3 aA_{-2} A_1$

$$
\begin{aligned}
A_1 &\to A_2 a \mid A_3 b \\
A_2 &\to A_3 bcA_{-2} \mid A_3 aA_{-2} \\
A_{-2} &\to acA_{-2} \mid \varepsilon \\
A_3 &\to A_3 acA_{-2} A_1 \mid A_3 aA_{-2} A_1 \mid A_3 b \mid a
\end{aligned}
$$

Получим грамматику $G_{2,2} = G_{3,0}$:

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_2a \mid A_3b \\ A_2 &\to A_3bcA_{-2} \mid A_3aA_{-2} \\ A_{-2} &\to acA_{-2} \mid \varepsilon \\ A_3 &\to A_2A_1 \mid A_3b \mid a \end{aligned}$$

- Нет правил вида $A_3 \to A_1\gamma$, поэтому $G_{3,1} = G_{3,0} = G_{2,2}$.
- Строим грамматику $G_{3,2}$, удаляя правило $A_3 \to A_2A_1$ и заменяя правилами $A_3 \to A_3acA_{-2}A_1 \mid A_3aA_{-2}A_1$

$$\begin{aligned} A_1 &\to A_2a \mid A_3b \\ A_2 &\to A_3bcA_{-2} \mid A_3aA_{-2} \\ A_{-2} &\to acA_{-2} \mid \varepsilon \\ A_3 &\to A_3acA_{-2}A_1 \mid A_3aA_{-2}A_1 \mid A_3b \mid a \end{aligned}$$

Пример 3 (продолжение)

- Осталось избавться от непосредственной левой рекурсии для нетерминала A_3. Грамматика уже достаточно сложная, поэтому введем для удобства новый нетерминал Q и перепишем грамматику:

$$
\begin{aligned}
A_1 &\to A_2 a \mid A_3 b \\
A_2 &\to A_3 bcA_2' \mid A_3 aA_2' \\
A_2' &\to acA_2' \mid \varepsilon \\
A_3 &\to A_3 Q \mid a \\
Q &\to acA_2'A_1 \mid aA_2'A_1 \mid b
\end{aligned}
$$

Пример 3 (окончание)

- Теперь избавиться от непосредственной левой рекурсии просто, получим итоговую грамматику $G' = G_{3,3}$:

$$
\begin{aligned}
A_1 &\to A_2 a \mid A_3 b \\
A_2 &\to A_3 bcA_2' \mid A_3 aA_2' \\
A_2' &\to acA_2' \mid \varepsilon \\
A_3 &\to aA_3' \\
A_3' &\to QA_3' \mid \varepsilon \\
Q &\to acA_2'A_1 \mid aA_2'A_1 \mid b
\end{aligned}
$$