Лингвистические основы информатики
Лекция 13
Распознаваемость контекстно-свободных языков недетерминированными автоматами с магазинной памятью

Ю. В. Нагребецкая, И. А. Михайлова

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направления: Математика и компьютерные науки
Компьютерная безопасность
(6 семестр)

Определение НМПА

Определение

МП-автомат $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F, \gamma_0)$ называется недетерминированным, если δ — не является частичной функцией из $\Sigma \times \Delta \times \{\_, \rightarrow\}$ в $\Sigma \times \Delta^* \times \{\_, \rightarrow\}$, а всего лишь бинарным отношением $\delta \subseteq (\Sigma \times \Delta \times \{\_, \rightarrow\}) \times (\Sigma \times \Delta^* \times \{\_, \rightarrow\})$.

Определение НМПА

Определение

МП-автомат $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F, \gamma_0)$ называется недетерминированным, если δ — не является частичной функцией из $\Sigma \times \Delta \times \{\_, \rightarrow\}$ в $\Sigma \times \Delta^* \times \{\_, \rightarrow\}$, а всего лишь бинарным отношением $\delta \subseteq (\Sigma \times \Delta \times \{\_, \rightarrow\}) \times (\Sigma \times \Delta^* \times \{\_, \rightarrow\})$.

Для управляющей таблицы это означает, что в некоторой ее клетке будет не менее различных переходов.

Теорема о связи КС языков и НМПА

Теорема 1

Класс контекстно-свободных языков совпадает с классом языков, распознаваемых недетерминированными автоматами с магазинной памятью.

В этой лекции мы покажем как по контекстно-свободной грамматике G построить НМПА, который распознает $L(G)$. Доказательство обратного факта не входит в рамки нашего курса.

Теорема 2

Для любого КС языка существует распознающий его НМПА с одним состоянием и единственной командой допуска $\delta(\nabla, \dashv) = \vee$

Доказательство теоремы 1

- Пусть $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$ — КС грамматика, порождающая исходный язык. Построим НМПА $\mathcal{M}$ с одним состоянием. Как и в лекции 11, для МП-автоматов с одним состоянием, мы это состояние опустим во всех командах-переходах и конфигурациях.

Доказательство теоремы 1

- Пусть $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$ — КС грамматика, порождающая исходный язык. Построим НМПА $\mathcal{M}$ с одним состоянием. Как и в лекции 11, для МП-автоматов с одним состоянием, мы это состояние опустим во всех командах-переходах и конфигурациях.
- Его входной алфавит будет $\Sigma \cup \{\dashv\}$, стековым алфавитом будет $\Delta = \Sigma \cup \Gamma \cup \{\nabla\}$.

Доказательство теоремы 1

- Пусть $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$ — КС грамматика, порождающая исходный язык. Построим НМПА $\mathcal{M}$ с одним состоянием. Как и в лекции 11, для МП-автоматов с одним состоянием, мы это состояние опустим во всех командах-переходах и конфигурациях.
- Его входной алфавит будет $\Sigma \cup \{\dashv\}$, стековым алфавитом будет $\Delta = \Sigma \cup \Gamma \cup \{\nabla\}$.
- В начале работы автомата в стеке будет находиться аксиома S.

Доказательство теоремы 1

- Пусть $G = (\Sigma, \Gamma, P, S)$ — КС грамматика, порождающая исходный язык. Построим НМПА $\mathcal{M}$ с одним состоянием. Как и в лекции 11, для МП-автоматов с одним состоянием, мы это состояние опустим во всех командах-переходах и конфигурациях.
- Его входной алфавит будет $\Sigma \cup \{\dashv\}$, стековым алфавитом будет $\Delta = \Sigma \cup \Gamma \cup \{\nabla\}$.
- В начале работы автомата в стеке будет находиться аксиома S.
- Множество переходов δ строящегося МП-автомата определим тремя способами:
  1. $\forall A \in \Gamma\ \forall (A \to \gamma) \in P\ \forall a \in \Sigma \cup \{\dashv\}$ положим $\delta(A, a) = (\gamma, \_)$;
  2. $\forall a \in \Sigma$ положим $\delta(a, a) = (\varepsilon, \rightarrow)$;
  3. $\delta(\nabla, \dashv) = \vee$ — команда допуска.

Пример

Рассмотрим грамматику

$$S \to aA \mid b$$
$$A \to bSA \mid a$$

и построим управляющую таблицу автомата так же, как и в теореме 1.

	a	b	$\dashv$
S	$(aA, \_), (b, \_)$	$(aA, \_), (b, \_)$	$(aA, \_), (b, \_)$
A	$(bSA, \_), (a, \_)$	$(bSA, \_), (a, \_)$	$(bSA, \_), (a, \_)$
a	$(\varepsilon, \to)$		
b		$(\varepsilon, \to)$	
∇			$\vee$

Возьмем цепочку, порожденную грамматикой:

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow abSA \Rightarrow abbA \Rightarrow abba$$

Пример (продолжение)

Подадим на вход автомату слово *abba*. Этот автомат недетерминированный (в некоторых клетках таблицы больше одного перехода), поэтому на каком-то этапе вычислений можно использовать любые команды на выбор (вариантов вычислений может быть много, приведем два из них).
Возьмем цепочку, порожденную грамматикой:

$S \Rightarrow \underline{aA} \Rightarrow a\underline{bSA} \Rightarrow ab\underline{b}A \Rightarrow abb\underline{a}$

- $[S, abba \dashv] \models [\underline{aA}, abba \dashv] \models [A, bba \dashv] \models [\underline{bSA}, bba \dashv] \models [SA, ba \dashv] \models [\underline{b}A, ba \dashv] \models [A, a \dashv] \models [\underline{a}, a \dashv] \models [\varepsilon, \dashv]$

Пример (продолжение)

Подадим на вход автомату слово *abba*. Этот автомат недетерминированный (в некоторых клетках таблицы больше одного перехода), поэтому на каком-то этапе вычислений можно использовать любые команды на выбор (вариантов вычислений может быть много, приведем два из них).
Возьмем цепочку, порожденную грамматикой:

$S \Rightarrow \underline{a}A \Rightarrow \underline{ab}S A \Rightarrow ab\underline{b}A \Rightarrow abb\underline{a}$

- $[S, abba \dashv] \models [\underline{aA}, abba \dashv] \models [A, bba \dashv] \models [\underline{bSA}, bba \dashv] \models [SA, ba \dashv] \models [\underline{b}A, ba \dashv] \models [A, a \dashv] \models [\underline{a}, a \dashv] \models [\varepsilon, \dashv]$
- Мы видим, что МП-автомат строит левосторонний вывод цепочки, причем применение правил вывода соответствует тем конфигурациям, где на вершине стека лежит нетерминал.

Пример (продолжение)

Подадим на вход автомату слово *abba*. Этот автомат недетерминированный (в некоторых клетках таблицы больше одного перехода), поэтому на каком-то этапе вычислений можно использовать любые команды на выбор (вариантов вычислений может быть много, приведем два из них).
Возьмем цепочку, порожденную грамматикой:

$S \Rightarrow \underline{aA} \Rightarrow a\underline{bSA} \Rightarrow ab\underline{b}A \Rightarrow abb\underline{a}$

- $[S, abba \dashv] \models [\underline{aA}, abba \dashv] \models [A, bba \dashv] \models [\underline{bSA}, bba \dashv] \models [SA, ba \dashv] \models [\underline{bA}, ba \dashv] \models [A, a \dashv] \models [\underline{a}, a \dashv] \models [\varepsilon, \dashv]$
- Мы видим, что МП-автомат строит левосторонний вывод цепочки, причем применение правил вывода соответствует тем конфигурациям, где на вершине стека лежит нетерминал.
- Докажем теорему.

Пример (продолжение)

Подадим на вход автомату слово *abba*. Этот автомат недетерминированный (в некоторых клетках таблицы больше одного перехода), поэтому на каком-то этапе вычислений можно использовать любые команды на выбор (вариантов вычислений может быть много, приведем два из них).
Возьмем цепочку, порожденную грамматикой:

$S \Rightarrow \underline{aA} \Rightarrow \underline{abSA} \Rightarrow ab\underline{b}A \Rightarrow abb\underline{a}$

- $[S, abba \dashv] \models [\underline{aA}, abba \dashv] \models [A, bba \dashv] \models [\underline{bSA}, bba \dashv] \models [SA, ba \dashv] \models [\underline{b}A, ba \dashv] \models [A, a \dashv] \models [\underline{a}, a \dashv] \models [\varepsilon, \dashv]$
- Мы видим, что МП-автомат строит левосторонний вывод цепочки, причем применение правил вывода соответствует тем конфигурациям, где на вершине стека лежит нетерминал.
- Докажем теорему.
- Для этого докажем, что $L(G) = L(\mathcal{M})$.

Доказательство $L(G) \subseteq L(\mathcal{M})$

Докажем сначала, что $L(G) \subseteq L(\mathcal{M})$.

- Пусть $w = a_1 \dots a_n \in L(G)$, тогда существует левосторонний вывод

$$S \Rightarrow a_1 \dots a_{i_1} A_1 \beta_1 \Rightarrow a_1 \dots a_{i_1} a_{i_1+1} \dots a_{i_2} A_2 \beta_2 \Rightarrow^*$$
$$\Rightarrow^* a_1 \dots a_{i_1} a_{i_1+1} \dots a_{i_2} \dots a_{i_{k-2}} A_{k-2} \beta_{k-2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 \dots a_{i_1} a_{i_1+1} \dots a_{i_2} \dots a_{i_{k-2}} a_{i_{k-2}+1} \dots a_{i_{k-1}} \dots a_n = w.$$

  где последовательно используются правила $A_j \to a_{i_j+1} \dots a_{i_{j+1}} A_{j+1} \beta_{j+1}$, причем $S = A_0$.
  На предпоследнем этапе используется правило $A_{k-2} \Rightarrow a_{i_{k-2}+1} \dots a_{i_{k-1}}$ и, кроме того, $\beta_{k-2} \in \Sigma^*$, т.е. $\beta_{k-2} = a_{i_{k-1}+1} \dots a_n$.

Доказательство $L(G) \subseteq L(\mathcal{M})$ (продолжение)

- Тогда в автомате есть последовательность конфигураций:
  $[S, a_1 \dots a_{i_1} a_{i_1+1} \dots a_n, \dashv] \models$
  $[a_1 \dots a_{i_1} A_1 \beta_1, a_1 \dots a_{i_1} a_{i_1+1} \dots a_n \dashv]$ получена из перехода типа (1).

Доказательство $L(G) \subseteq L(\mathcal{M})$ (продолжение)

- Тогда в автомате есть последовательность конфигураций:
  $[S, a_1 \dots a_{i_1} a_{i_1+1} \dots a_n, \dashv] \models$
  $[a_1 \dots a_{i_1} A_1 \beta_1, a_1 \dots a_{i_1} a_{i_1+1} \dots a_n \dashv]$ получена из перехода типа (1).
- Применяя несколько раз переходы типа (2) получим:
  $[a_1 \dots a_{i_1} A_1 \beta_1, a_1 \dots a_{i_1} a_{i_1+1} \dots a_n \dashv] \models^* [A_1 \beta_1, a_{i_1+1} \dots a_{i_2} \dots a_n]$ и так далее.

Доказательство $L(G) \subseteq L(\mathcal{M})$ (продолжение)

- Тогда в автомате есть последовательность конфигураций: $[S, a_1 \dots a_{i_1} a_{i_1+1} \dots a_n, \dashv] \models$ $[a_1 \dots a_{i_1} A_1 \beta_1, a_1 \dots a_{i_1} a_{i_1+1} \dots a_n \dashv]$ получена из перехода типа (1).
- Применяя несколько раз переходы типа (2) получим: $[a_1 \dots a_{i_1} A_1 \beta_1, a_1 \dots a_{i_1} a_{i_1+1} \dots a_n \dashv] \models^* [A_1 \beta_1, a_{i_1+1} \dots a_{i_2} \dots a_n]$ и так далее.
- В итоге получим: $[A_{k-2} \beta_{k-2}, a_{i_{k-2}+1} \dots a_n \dashv] \models [a_{i_{k-2}+1} \dots a_n, a_{i_{k-2}+1} \dots a_n \dashv] \models^* [\varepsilon, \dashv]$, откуда $w \in L(\mathcal{M})$

Доказательство $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$

Докажем теперь, что $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$.

- Пусть $w \in L(\mathcal{M})$, тогда существует последовательность $[S, w, \dashv] \models^* [\varepsilon, \dashv]$ конфигураций длины m. Для удобства будем считать, что $w = a_1 \ldots a_m$, где $a_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $a_i = \varepsilon$, если на i шаге выполняется переход типа (1). В частности, $a_1 = \varepsilon$.

Доказательство $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$

Докажем теперь, что $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$.

- Пусть $w \in L(\mathcal{M})$, тогда существует последовательность $[S, w, \dashv] \models^* [\varepsilon, \dashv]$ конфигураций длины m. Для удобства будем считать, что $w = a_1 \dots a_m$, где $a_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $a_i = \varepsilon$, если на i шаге выполняется переход типа (1). В частности, $a_1 = \varepsilon$.
- Тогда для некоторых $\gamma_i \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ имеем

$$[S, w] = [\gamma_1, a_1 a_2 \dots a_m \dashv] \models [\gamma_2, a_2 \dots a_m \dashv] \models^* [\gamma_m, a_m \dashv] \models [\varepsilon, \dashv]$$

Доказательство $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$

Докажем теперь, что $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$.

- Пусть $w \in L(\mathcal{M})$, тогда существует последовательность $[S, w, \dashv] \models^* [\varepsilon, \dashv]$ конфигураций длины m. Для удобства будем считать, что $w = a_1 \ldots a_m$, где $a_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $a_i = \varepsilon$, если на i шаге выполняется переход типа (1). В частности, $a_1 = \varepsilon$.
- Тогда для некоторых $\gamma_i \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ имеем

$$[S, w] = [\gamma_1, a_1 a_2 \ldots a_m \dashv] \models [\gamma_2, a_2 \ldots a_m \dashv] \models^* [\gamma_m, a_m \dashv] \models [\varepsilon, \dashv]$$

- Заметим, что если на l-ом шаге выполняется переход типа (1), то $\gamma_l = B\beta_l$, $\gamma_{l+1} = \alpha\beta_l$, где $B \to \alpha$ — правило вывода.

Доказательство $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$

Докажем теперь, что $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$.

- Пусть $w \in L(\mathcal{M})$, тогда существует последовательность $[S, w, \dashv] \models^* [\varepsilon, \dashv]$ конфигураций длины m. Для удобства будем считать, что $w = a_1 \dots a_m$, где $a_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $a_i = \varepsilon$, если на i шаге выполняется переход типа (1). В частности, $a_1 = \varepsilon$.
- Тогда для некоторых $\gamma_i \in (\Gamma \cup \Sigma)^*$ имеем

$$[S, w] = [\gamma_1, a_1 a_2 \dots a_m \dashv] \models [\gamma_2, a_2 \dots a_m \dashv] \models^* [\gamma_m, a_m \dashv] \models [\varepsilon, \dashv]$$

- Заметим, что если на l-ом шаге выполняется переход типа (1), то $\gamma_l = B\beta_l$, $\gamma_{l+1} = \alpha\beta_l$, где $B \to \alpha$ — правило вывода.
- При этом $\gamma_l \Rightarrow \gamma_{l+1}$.

Доказательство $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$

Докажем теперь, что $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$.

- Пусть команды типа (1) применялись только на шагах $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_{s-1} < i_s \le m$, тогда $\gamma_{i_j} = B_j\beta_{j-1}$, $a_{i_j} = \varepsilon$, $\gamma_{i_j+1} = \alpha_j\beta_j = a_{i_j+1}\ldots a_{i_{j+1}-1}B_{j+1}\beta_j = a_{i_j}a_{i_j+1}\ldots a_{i_{j+1}-1}\gamma_{i_{j+1}}$, $\gamma_{i_j} \Rightarrow \gamma_{i_j+1} = a_{i_j}\ldots a_{i_{j+1}-1}\gamma_{i_{j+1}}$, $B_1 = S$, $\beta_0 = \varepsilon$, $\gamma_{i_s} = a_{i_s}a_{i_s+1}\ldots a_m$.

Доказательство $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$

Докажем теперь, что $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$.

- Пусть команды типа (1) применялись только на шагах $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_{s-1} < i_s \leq m$, тогда $\gamma_{i_j} = B_j \beta_{j-1}$, $a_{i_j} = \varepsilon$, $\gamma_{i_j+1} = \alpha_j \beta_j = a_{i_j+1} \ldots a_{i_{j+1}-1} B_{j+1} \beta_j = a_{i_j} a_{i_j+1} \ldots a_{i_{j+1}-1} \gamma_{i_{j+1}}$, $\gamma_{i_j} \Rightarrow \gamma_{i_j+1} = a_{i_j} \ldots a_{i_{j+1}-1} \gamma_{i_{j+1}}$, $B_1 = S$, $\beta_0 = \varepsilon$, $\gamma_{i_s} = a_{i_s} a_{i_s+1} \ldots a_m$.
- Тогда получим вывод

$$S = \gamma_1 = \gamma_{i_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{i_2-1} \gamma_{i_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{i_2-1} a_{i_2} \ldots a_{i_3-1} \gamma_{i_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{i_3-1} a_{i_3} \ldots a_{i_4-1} \gamma_{i_4} \Rightarrow^*$$

$$\Rightarrow^* a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-2}-1} a_{i_{s-2}} \ldots a_{i_{s-1}-1} \gamma_{i_{s-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-1}-1} a_{i_{s-1}} \ldots a_{i_s-1} \gamma_{i_s} =$$

$$= a_1 a_2 \ldots a_{i_s-1} a_{i_s} a_{i_s+1} \ldots a_m = w$$

Доказательство $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$

Докажем теперь, что $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$.

- Пусть команды типа (1) применялись только на шагах $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_{s-1} < i_s \leq m$, тогда $\gamma_{i_j} = B_j \beta_{j-1}$, $a_{i_j} = \varepsilon$, $\gamma_{i_j+1} = \alpha_j \beta_j = a_{i_j+1} \ldots a_{i_{j+1}-1} B_{j+1} \beta_j = a_{i_j} a_{i_j+1} \ldots a_{i_{j+1}-1} \gamma_{i_{j+1}}$, $\gamma_{i_j} \Rightarrow \gamma_{i_j+1} = a_{i_j} \ldots a_{i_{j+1}-1} \gamma_{i_{j+1}}$, $B_1 = S$, $\beta_0 = \varepsilon$, $\gamma_{i_s} = a_{i_s} a_{i_s+1} \ldots a_m$.
- Тогда получим вывод

$$S = \gamma_1 = \gamma_{i_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{i_2-1} \gamma_{i_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{i_2-1} a_{i_2} \ldots a_{i_3-1} \gamma_{i_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{i_3-1} a_{i_3} \ldots a_{i_4-1} \gamma_{i_4} \Rightarrow^*$$

$$\Rightarrow^* a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-2}-1} a_{i_{s-2}} \ldots a_{i_{s-1}-1} \gamma_{i_{s-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-1}-1} a_{i_{s-1}} \ldots a_{i_s-1} \gamma_{i_s} =$$

$$= a_1 a_2 \ldots a_{i_s-1} a_{i_s} a_{i_s+1} \ldots a_m = w$$

- Откуда $w \in L(G)$.

Следствие

Если на некотором такте k обработки слова w строимым в теореме по грамматике G МП-автоматом $\mathcal{M}$ в стеке находится ζ_k, а u_k, v_k, соответственно, — обработанная и необработанная часть цепочки w, то

1. $\zeta_k \Rightarrow^* v_k$;
2. $u_k\zeta_k$ — k-е слово левостороннего вывода цепочки w, при этом возможен повтор некоторых слов вывода.

Следствие

Следствие

Если на некотором такте k обработки слова w строимым в теореме по грамматике G МП-автоматом $\mathcal{M}$ в стеке находится ζ_k, а u_k, v_k, соответственно, — обработанная и необработанная часть цепочки w, то

1. $\zeta_k \Rightarrow^* v_k$;
2. $u_k\zeta_k$ — k-е слово левостороннего вывода цепочки w, при этом возможен повтор некоторых слов вывода.

Приведем доказательство следствия при помощи демонстрации протокола обработки слова w МП-автоматом $\mathcal{M}$.

Следствие

Следствие

Если на некотором такте k обработки слова w строимым в теореме по грамматике G МП-автоматом $\mathcal{M}$ в стеке находится ζ_k, а u_k, v_k, соответственно, — обработанная и необработанная часть цепочки w, то

1. $\zeta_k \Rightarrow^* v_k$;
2. $u_k\zeta_k$ — k-е слово левостороннего вывода цепочки w, при этом возможен повтор некоторых слов вывода.

Приведем доказательство следствия при помощи демонстрации протокола обработки слова w МП-автоматом $\mathcal{M}$.

Протокол сделан на основе доказательства $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$ теоремы.

Следствие

Следствие

Если на некотором такте k обработки слова w строимым в теореме по грамматике G МП-автоматом $\mathcal{M}$ в стеке находится ζ_k, а u_k, v_k, соответственно, — обработанная и необработанная часть цепочки w, то

1. $\zeta_k \Rightarrow^* v_k$;
2. $u_k\zeta_k$ — k-е слово левостороннего вывода цепочки w, при этом возможен повтор некоторых слов вывода.

Приведем доказательство следствия при помощи демонстрации протокола обработки слова w МП-автоматом $\mathcal{M}$.

Протокол сделан на основе доказательства $L(\mathcal{M}) \subseteq L(G)$ теоремы.

Содержимое стека — это ζ_k, все, что стоит перед позицией указателя в слове w — это необработанная часть цепочки — префикс слова w, слово u_k, а все, что стоит после позиции указателя в слове w — это необработанная часть цепочки — суффикс слова w, слово v_k.

Доказательство следствия

№ такта	содержимое стека, ζ_k	позиция указателя, $u_k \diamond v_k$
1	$S\nabla$	$\diamond a_1 a_2 \ldots a_m \dashv$
2	$a_1 a_2 \ldots a_{i_2-1}\gamma_{i_2}\nabla$	$\diamond a_1 a_2 \ldots a_m \dashv$
3	$a_2 \ldots a_{i_2-1}\gamma_{i_2}\nabla$	$a_1 \diamond a_2 \ldots a_m \dashv$
...	...	...
i_2	$a_{i_2-1}\gamma_{i_2}\nabla$	$a_1 a_2 \ldots \diamond a_{i_2-1} a_{i_2} \ldots a_m \dashv$
i_2+1	$\gamma_{i_2}\nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_2-1} \diamond a_{i_2} \ldots a_m \dashv$
i_2+2	$a_{i_2} \ldots a_{i_3-1}\gamma_{i_3}\nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_2-1} \diamond a_{i_2} \ldots a_m \dashv$
...	...	...
i_2+i_3	$a_{i_3-1}\gamma_{i_3}\nabla$	$a_1 a_2 \ldots \diamond a_{i_3-1} a_{i_3} \ldots a_m \dashv$
i_2+i_3+1	$\gamma_{i_3}\nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_3-1} \diamond a_{i_3} \ldots a_m \dashv$
i_2+i_3+2	$a_{i_3} a_{i_3+1} \ldots a_{i_4-1}\gamma_{i_4}\nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_3-1} \diamond a_{i_3} \ldots a_m \dashv$
i_2+i_3+3	$a_{i_3+1} \ldots a_{i_4-1}\gamma_{i_4}\nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_3} \diamond a_{i_3+1} \ldots a_m \dashv$
...	...	...
$i_2+i_3+i_4$	$a_{i_4-1}\gamma_{i_4}\nabla$	$a_1 a_2 \ldots \diamond a_{i_4-1} a_{i_4} \ldots a_m \dashv$
$i_2+i_3+i_4+1$	$\gamma_{i_4}\nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_4-1} \diamond a_{i_4} \ldots a_m \dashv$
...	...	...

Доказательство следствия (продолжение)

№ такта	содержимое стека, ζ_k	позиция указателя, $u_k \diamond v_k$
$i_2 + i_3 + \ldots + i_{s-2} + 1$	$\gamma_{i_{s-2}} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-2}-1} \diamond a_{i_{s-2}} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + i_3 + \ldots + i_{s-2} + 2$	$a_{i_{s-2}} a_{i_{s-2}+1} \ldots a_{i_{s-1}-1} \gamma_{i_{s-1}} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-2}-1} \diamond a_{i_{s-2}} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + i_3 + \ldots + i_{s-2} + 3$	$a_{i_{s-2}+1} \ldots a_{i_{s-1}-1} \gamma_{i_{s-1}} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-2}} \diamond a_{i_{s-2}+1} \ldots a_m \dashv$
...	...	...
$i_2 + \ldots + i_{s-2} + i_{s-1}$	$a_{i_{s-1}-1} \gamma_{i_{s-1}} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots \diamond a_{i_{s-1}-1} a_{i_{s-1}} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + \ldots + i_{s-2} + i_{s-1} + 1$	$\gamma_{i_{s-1}} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-1}-1} \diamond a_{i_{s-1}} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + \ldots + i_{s-2} + i_{s-1} + 2$	$a_{i_{s-1}} a_{i_{s-1}+1} \ldots a_{i_s-1} \gamma_{i_s} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-1}-1} \diamond a_{i_{s-1}} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + \ldots + i_{s-2} + i_{s-1} + 3$	$a_{i_{s-1}+1} \ldots a_{i_s-1} \gamma_{i_s} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-1}} \diamond a_{i_{s-1}+1} \ldots a_m \dashv$
...	...	...
$i_2 + \ldots + i_{s-1} + i_s$	$a_{i_s-1} \gamma_{i_s} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots \diamond a_{i_s-1} a_{i_s} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + \ldots + i_{s-1} + i_s + 1$	$\gamma_{i_s} \nabla$ $= a_{i_s} a_{i_s+1} \ldots a_m \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_s-1} \diamond a_{i_s} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + \ldots + i_{s-1} + i_s + 2$	$a_{i_s+1} \ldots a_m \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_s} \diamond a_{i_s+1} \ldots a_m \dashv$
...	...	...
$i_2 + \ldots + i_{s-1} + i_s + m$	$a_m \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{m-1} \diamond a_m \dashv$
$i_2 + \ldots + i_{s-1} + i_s + m + 1$	∇	$a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m \diamond \dashv$

Доказательство следствия (продолжение)

№ такта	содержимое стека, ζ_k	позиция указателя, $u_k \diamond v_k$
$i_2 + i_3 + \ldots + i_{s-2} + 1$	$\gamma_{i_{s-2}} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-2}-1} \diamond a_{i_{s-2}} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + i_3 + \ldots + i_{s-2} + 2$	$a_{i_{s-2}} a_{i_{s-2}+1} \ldots a_{i_{s-1}-1} \gamma_{i_{s-1}} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-2}-1} \diamond a_{i_{s-2}} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + i_3 + \ldots + i_{s-2} + 3$	$a_{i_{s-2}+1} \ldots a_{i_{s-1}-1} \gamma_{i_{s-1}} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-2}} \diamond a_{i_{s-2}+1} \ldots a_m \dashv$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$i_2 + \ldots + i_{s-2} + i_{s-1}$	$a_{i_{s-1}-1} \gamma_{i_{s-1}} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots \diamond a_{i_{s-1}-1} a_{i_{s-1}} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + \ldots + i_{s-2} + i_{s-1} + 1$	$\gamma_{i_{s-1}} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-1}-1} \diamond a_{i_{s-1}} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + \ldots + i_{s-2} + i_{s-1} + 2$	$a_{i_{s-1}} a_{i_{s-1}+1} \ldots a_{i_s-1} \gamma_{i_s} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-1}-1} \diamond a_{i_{s-1}} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + \ldots + i_{s-2} + i_{s-1} + 3$	$a_{i_{s-1}+1} \ldots a_{i_s-1} \gamma_{i_s} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_{s-1}} \diamond a_{i_{s-1}+1} \ldots a_m \dashv$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$i_2 + \ldots + i_{s-1} + i_s$	$a_{i_s-1} \gamma_{i_s} \nabla$	$a_1 a_2 \ldots \diamond a_{i_s-1} a_{i_s} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + \ldots + i_{s-1} + i_s + 1$	$\gamma_{i_s} \nabla$ $= a_{i_s} a_{i_s+1} \ldots a_m \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_s-1} \diamond a_{i_s} \ldots a_m \dashv$
$i_2 + \ldots + i_{s-1} + i_s + 2$	$a_{i_s+1} \ldots a_m \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{i_s} \diamond a_{i_s+1} \ldots a_m \dashv$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$i_2 + \ldots + i_{s-1} + i_s + m$	$a_m \nabla$	$a_1 a_2 \ldots a_{m-1} \diamond a_m \dashv$
$i_2 + \ldots + i_{s-1} + i_s + m + 1$	∇	$a_1 a_2 \ldots a_{m-1} a_m \diamond \dashv$

В частности, согласно (2) следствия, по протоколу можно восстановить левосторонний вывод произвольной цепочки $w \in L(G)$.

Протокол для примера

Рассмотрим протокол обработки цепочки $w = abba$ МП-автоматом в примере.

№ такта	содержимое стека, ζ_k	позиция указателя, $u_k \diamond v_k$
1	$S\nabla$	$\diamond abba \dashv$
2	$aA\nabla$	$\diamond abba \dashv$
3	$A\nabla$	$a \diamond bba \dashv$
4	$bSA\nabla$	$a \diamond bba \dashv$
5	$SA\nabla$	$ab \diamond ba \dashv$
6	$bA\nabla$	$ab \diamond ba \dashv$
7	$A\nabla$	$abb \diamond a \dashv$
8	$a\nabla$	$abb \diamond a \dashv$
9	∇	$abba\diamond \dashv$

Протокол для примера

Рассмотрим протокол обработки цепочки $w = abba$ МП-автоматом в примере.

№ такта	содержимое стека, ζ_k	позиция указателя, $u_k \diamond v_k$
1	$S\nabla$	$\diamond abba \dashv$
2	$aA\nabla$	$\diamond abba \dashv$
3	$A\nabla$	$a \diamond bba \dashv$
4	$bSA\nabla$	$a \diamond bba \dashv$
5	$SA\nabla$	$ab \diamond ba \dashv$
6	$bA\nabla$	$ab \diamond ba \dashv$
7	$A\nabla$	$abb \diamond a \dashv$
8	$a\nabla$	$abb \diamond a \dashv$
9	∇	$abba\diamond \dashv$

Восстанавливаем вывод $u_1\zeta_1 \Rightarrow u_2\zeta_2 \ldots \Rightarrow u_9\zeta_9$:

Протокол для примера

Рассмотрим протокол обработки цепочки $w = abba$ МП-автоматом в примере.

№ такта	содержимое стека, ζ_k	позиция указателя, $u_k \diamond v_k$
1	$S\nabla$	$\diamond abba \dashv$
2	$aA\nabla$	$\diamond abba \dashv$
3	$A\nabla$	$a \diamond bba \dashv$
4	$bSA\nabla$	$a \diamond bba \dashv$
5	$SA\nabla$	$ab \diamond ba \dashv$
6	$bA\nabla$	$ab \diamond ba \dashv$
7	$A\nabla$	$abb \diamond a \dashv$
8	$a\nabla$	$abb \diamond a \dashv$
9	∇	$abba\diamond \dashv$

Восстанавливаем вывод $u_1\zeta_1 \Rightarrow u_2\zeta_2 \ldots \Rightarrow u_9\zeta_9$:

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow aA \Rightarrow abSA \Rightarrow abSA \Rightarrow abbA \Rightarrow abbA \Rightarrow abba \Rightarrow abba$$

Протокол для примера

Рассмотрим протокол обработки цепочки $w = abba$ МП-автоматом в примере.

№ такта	содержимое стека, ζ_k	позиция указателя, $u_k \diamond v_k$
1	$S\nabla$	$\diamond abba \dashv$
2	$aA\nabla$	$\diamond abba \dashv$
3	$A\nabla$	$a \diamond bba \dashv$
4	$bSA\nabla$	$a \diamond bba \dashv$
5	$SA\nabla$	$ab \diamond ba \dashv$
6	$bA\nabla$	$ab \diamond ba \dashv$
7	$A\nabla$	$abb \diamond a \dashv$
8	$a\nabla$	$abb \diamond a \dashv$
9	∇	$abba\diamond \dashv$

Восстанавливаем вывод $u_1\zeta_1 \Rightarrow u_2\zeta_2 \ldots \Rightarrow u_9\zeta_9$:

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow aA \Rightarrow abSA \Rightarrow abSA \Rightarrow abbA \Rightarrow abbA \Rightarrow abba \Rightarrow abba$$

После вычеркивания повторяющихся цепочек, получаем обычный левосторонний вывод:

Протокол для примера

Рассмотрим протокол обработки цепочки $w = abba$ МП-автоматом в примере.

№ такта	содержимое стека, ζ_k	позиция указателя, $u_k \diamond v_k$
1	$S\nabla$	$\diamond abba \dashv$
2	$aA\nabla$	$\diamond abba \dashv$
3	$A\nabla$	$a \diamond bba \dashv$
4	$bSA\nabla$	$a \diamond bba \dashv$
5	$SA\nabla$	$ab \diamond ba \dashv$
6	$bA\nabla$	$ab \diamond ba \dashv$
7	$A\nabla$	$abb \diamond a \dashv$
8	$a\nabla$	$abb \diamond a \dashv$
9	∇	$abba\diamond \dashv$

Восстанавливаем вывод $u_1\zeta_1 \Rightarrow u_2\zeta_2 \ldots \Rightarrow u_9\zeta_9$:

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow aA \Rightarrow abSA \Rightarrow abSA \Rightarrow abbA \Rightarrow abbA \Rightarrow abba \Rightarrow abba$$

После вычеркивания повторяющихся цепочек, получаем обычный левосторонний вывод:

$$S \Rightarrow aA \Rightarrow abSA \Rightarrow abbA \Rightarrow abba$$