Лингвистические основы информатики
Лекция 12
Распознаваемость с пустым стеком
Эквивалентность двух типов распознаваемости

Ю. В. Нагребецкая, И. А. Михайлова

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направления: Математика и компьютерные науки
Компьютерная безопасность
(6 семестр)

Пример 1

		a	b	$\dashv$
q_0	a	$(q_0, aa, \rightarrow)$	$(q_1, \varepsilon, \rightarrow)$	
	∇	$(q_0, a, \rightarrow)$		
q_1	a		$(q_1, \varepsilon, \rightarrow)$	
	∇			$(q_2, \varepsilon, \_)$
q_2	a			
	∇			

- Проанализировав пример из предыдущей лекции, вы уже поняли, что МП-автомат $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F, \gamma_0)$, где $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Delta = \{a, b, \nabla\}$, $F = \{q_2\}$, $\gamma_0 = \nabla$ и функция δ задается данной управляющей таблицей, распознает язык $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.

Пример 1

		a	b	$\dashv$
q_0	a	$(q_0, aa, \rightarrow)$	$(q_1, \varepsilon, \rightarrow)$	
	∇	$(q_0, a, \rightarrow)$		
q_1	a		$(q_1, \varepsilon, \rightarrow)$	
	∇			$(q_2, \varepsilon, \_)$
q_2	a			
	∇			

- Проанализировав пример из предыдущей лекции, вы уже поняли, что МП-автомат $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F, \gamma_0)$, где $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Delta = \{a, b, \nabla\}$, $F = \{q_2\}$, $\gamma_0 = \nabla$ и функция δ задается данной управляющей таблицей, распознает язык $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.
- Сначала он добавляет все буквы a в стек, а когда встречает букву b, то переходит в состояние q_1, в котором выталкивает столько же букв a из стека, сколько встретил букв b.

Пример 1

		a	b	$\dashv$
q_0	a ∇	$(q_0, aa, \to)$ $(q_0, a, \to)$	$(q_1, \varepsilon, \to)$	
q_1	a ∇		$(q_1, \varepsilon, \to)$	 $(q_2, \varepsilon, \_)$
q_2	a ∇			

- Проанализировав пример из предыдущей лекции, вы уже поняли, что МП-автомат $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F, \gamma_0)$, где $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Delta = \{a, b, \nabla\}$, $F = \{q_2\}$, $\gamma_0 = \nabla$ и функция δ задается данной управляющей таблицей, распознает язык $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.
- Сначала он добавляет все буквы a в стек, а когда встречает букву b, то переходит в состояние q_1, в котором выталкивает столько же букв a из стека, сколько встретил букв b.
- В конце, если стек пуст, то он переходит в конечное состояние q_2.

Пример 1

		a	b	$\dashv$
q_0	X	$(q_0, Xa, \rightarrow)$	$(q_0, \varepsilon, \_)$	
	a		$(q_0, \varepsilon, \rightarrow)$	
	∇			$(q_1, \varepsilon, \_)$
q_1	X			
	a			
	∇			

- Добавим в стековый алфавит новый символ X, который сначала будет лежат в стеке, т.е. положим $\gamma_0 = X$. А как только встретим букву b, его оттуда удалим.

Пример 1

		a	b	$\dashv$
q_0	X	$(q_0, Xa, \rightarrow)$	$(q_0, \varepsilon, \_)$	
	a		$(q_0, \varepsilon, \rightarrow)$	
	∇			$(q_1, \varepsilon, \_)$
q_1	X			
	a			
	∇			

- Добавим в стековый алфавит новый символ X, который сначала будет лежат в стеке, т.е. положим $\gamma_0 = X$. А как только встретим букву b, его оттуда удалим.
- Это позволит нам уменьшить количество состояний.

Пример 1

		a	b	$\dashv$
q_0	X	$(q_0, Xa, \rightarrow)$	$(q_0, \varepsilon, \_)$	
	a		$(q_0, \varepsilon, \rightarrow)$	
	∇			$(q_1, \varepsilon, \_)$
q_1	X			
	a			
	∇			

- Добавим в стековый алфавит новый символ X, который сначала будет лежат в стеке, т.е. положим $\gamma_0 = X$. А как только встретим букву b, его оттуда удалим.
- Это позволит нам уменьшить количество состояний.
- Получим МП-автомат $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \Delta_1, \delta_1, q_0, F_1, \gamma_0^1)$, где $Q_1 = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Delta_1 = \{X, a, \nabla\}$, $F_1 = \{q_1\}$. Функция δ_1 задается таблицей выше. МП-автомат $\mathcal{M}_1$ распознает тот же язык $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.

Протокол обработки слова a^2b^2 МП-автоматом $\mathcal{M}_1$

Проиллюстрируем протокол обработки слова a^2b^2 новым автоматом $\mathcal{M}_1$:

№ такта	состояние	содержимое стека	позиция указателя
1	q_0	X∇	$\diamond$aabb$\dashv$
2	q_0	Xa∇	a$\diamond$abb$\dashv$
3	q_0	Xaa∇	aa$\diamond$bb$\dashv$
4	q_0	aa∇	aa$\diamond$bb$\dashv$
6	q_0	a∇	aab$\diamond$b$\dashv$
7	q_0	∇	aabb$\diamond\dashv$
8	q_1	∇	aabb$\diamond\dashv$

Получим $[q_0, X, aabb \dashv] \models [q_0, Xa, abb \dashv] \models [q_0, Xaa, bb \dashv] \models [q_0, aa, bb \dashv] \models [q_0, a, b \dashv] \models [q_0, \varepsilon, \dashv] \models [q_1, \varepsilon, \dashv]$, и автомат $\mathcal{M}_1$ допускает цепочку a^2b^2.

МП-автомат $\mathcal{M}_2$ с одним состоянием

- Отметим, что у автомата $\mathcal{M}_1$ "избыточное"состояние q_1, которое нигде не используется.
- Удалим его, заменив командой $\delta(\nabla, \dashv) = \vee$, командой допуска. В МП-автомате $\mathcal{M}_1$, попадая в состояние q_1, получим, что автомат распознает цепочку. В новом автомате вместо перехода в новое состояние выполняем команду допуска. Получим МП-автомат $\mathcal{M}_2$:

		a	b	$\dashv$
q_0	X	$(q_0, Xa, \rightarrow)$	$(q_0, \varepsilon, \_)$	
	a		$(q_0, \varepsilon, \rightarrow)$	
	∇			$\vee$

- Кроме того, заметим, что у получившегося автомата $\mathcal{M}_2$ только одно состояние q_0, поэтому его можно везде опустить. Получим:

	a	b	$\dashv$
X	$(Xa, \rightarrow)$	$(\varepsilon, \_)$	
a		$(\varepsilon, \rightarrow)$	
∇			$\surd$

Упражнение. Исправьте автомат так, чтобы он также допускал цепочку ε.

Протокол обработки слова a^2b^2 МП-автоматом $\mathcal{M}_2$ с одним состоянием

Проиллюстрируем протокол обработки слова a^2b^2 новым автоматом $\mathcal{M}_2$:

№ такта	содержимое стека	позиция указателя
1	X∇	$\diamond$aabb$\dashv$
2	Xa∇	a$\diamond$abb$\dashv$
3	Xaa∇	aa$\diamond$bb$\dashv$
4	aa∇	aa$\diamond$bb$\dashv$
6	a∇	aab$\diamond$b$\dashv$
7	∇	aabb$\diamond$$\dashv$
8	∇	aabb$\diamond$$\dashv$

Получим $[X, aabb \dashv] \models [Xa, abb \dashv] \models [Xaa, bb \dashv] \models [aa, bb \dashv] \models [a, b \dashv] \models [\varepsilon, \dashv]$.

Распознаваемость МПА при пустом стеке

- Для автомата $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, \gamma_0)$ и слова $w \in \Sigma^*$ начальной конфигурацией будет $[q_0, \gamma_0, w]$.

Распознаваемость МПА при пустом стеке

- Для автомата $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, \gamma_0)$ и слова $w \in \Sigma^*$ начальной конфигурацией будет $[q_0, \gamma_0, w]$.
- Язык, распознаваемый МПА $\mathcal{M}$ — это множество $L(\mathcal{M})$ слов над алфавитом Σ, которые распознает автомат, т.е. множество $L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid$ для некоторого $\beta \in \Sigma^*$ существует вывод $[q_0, \gamma_0, w] \models^* [f, \beta, \dashv]\}$.

Распознаваемость МПА при пустом стеке

- Для автомата $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, \gamma_0)$ и слова $w \in \Sigma^*$ начальной конфигурацией будет $[q_0, \gamma_0, w]$.
- Язык, распознаваемый МПА $\mathcal{M}$ — это множество $L(\mathcal{M})$ слов над алфавитом Σ, которые распознает автомат, т.е. множество $L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid$ для некоторого $\beta \in \Sigma^*$ существует вывод $[q_0, \gamma_0, w] \models^* [f, \beta, \dashv]\}$.
- Говорят, что слово $w \in \Sigma^*$ распознается (или допускается) МПА $\mathcal{M}$ при пустом стеке, если существует вывод $[q_0, \gamma_0, w] \models^* [f, \varepsilon, \dashv]$. Т.е. когда цепочка полностью прочитана, и стек пуст.

Распознаваемость МПА при пустом стеке

- Для автомата $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, \gamma_0)$ и слова $w \in \Sigma^*$ начальной конфигурацией будет $[q_0, \gamma_0, w]$.
- Язык, распознаваемый МПА $\mathcal{M}$ — это множество $L(\mathcal{M})$ слов над алфавитом Σ, которые распознает автомат, т.е. множество $L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid$ для некоторого $\beta \in \Sigma^*$ существует вывод $[q_0, \gamma_0, w] \models^* [f, \beta, \dashv]\}$.
- Говорят, что слово $w \in \Sigma^*$ распознается (или допускается) МПА $\mathcal{M}$ при пустом стеке, если существует вывод $[q_0, \gamma_0, w] \models^* [f, \varepsilon, \dashv]$. Т.е. когда цепочка полностью прочитана, и стек пуст.
- Язык, распознаваемый МПА при пустом стеке $\mathcal{M}$ — это множество слов над алфавитом Σ, которые распознает автомат, то есть $L_\nabla(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid$ существует вывод $[q_0, \gamma_0, w] \models^* [f, \varepsilon, \dashv]\}$

Распознаваемость МПА при пустом стеке

- Для автомата $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, \gamma_0)$ и слова $w \in \Sigma^*$ начальной конфигурацией будет $[q_0, \gamma_0, w]$.
- Язык, распознаваемый МПА $\mathcal{M}$ — это множество $L(\mathcal{M})$ слов над алфавитом Σ, которые распознает автомат, т.е. множество $L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid$ для некоторого $\beta \in \Sigma^*$ существует вывод $[q_0, \gamma_0, w] \models^* [f, \beta, \dashv]\}$.
- Говорят, что слово $w \in \Sigma^*$ распознается (или допускается) МПА $\mathcal{M}$ при пустом стеке, если существует вывод $[q_0, \gamma_0, w] \models^* [f, \varepsilon, \dashv]$. Т.е. когда цепочка полностью прочитана, и стек пуст.
- Язык, распознаваемый МПА при пустом стеке $\mathcal{M}$ — это множество слов над алфавитом Σ, которые распознает автомат, то есть $L_\nabla(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid$ существует вывод $[q_0, \gamma_0, w] \models^* [f, \varepsilon, \dashv]\}$
- Очевидно, $L_\nabla(\mathcal{M}) \subseteq L(\mathcal{M})$.

Пример 2

Этот пример показывает, почему нельзя просто поставить команду допуска для всех $(q, \nabla, \dashv)$

Верно ли, что автомат распознает язык $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$?

		a	b	$\dashv$
q_0	a	$(q_0, aa, \rightarrow)$	$(q_1, \varepsilon, \rightarrow)$	
	∇	$(q_0, a, \rightarrow)$		$\vee$
q_1	a		$(q_1, \varepsilon, \rightarrow)$	
	∇			$\vee$

Докажем, что если некоторый язык распознается некоторым МП-автоматом, то он распознается и МП-автоматом при помощи пустого стека.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА при пустом стеке

Теорема 1

Пусть язык L распознается МП-автоматом $\mathcal{M}$. Тогда существует эквивалентный ему МП-автомат $\mathcal{M}'$, который распознает язык L при помощи пустого стека (т.е. $L = L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}') = L_{\nabla}(\mathcal{M}')$ — почему?)

Эквивалентность распознавания МПА и МПА при пустом стеке

Теорема 1

Пусть язык L распознается МП-автоматом $\mathcal{M}$. Тогда существует эквивалентный ему МП-автомат $\mathcal{M}'$, который распознает язык L при помощи пустого стека (т.е. $L = L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}') = L_{\nabla}(\mathcal{M}')$ — почему?)

- Пусть $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F, \gamma_0)$.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА при пустом стеке

Теорема 1

Пусть язык L распознается МП-автоматом $\mathcal{M}$. Тогда существует эквивалентный ему МП-автомат $\mathcal{M}'$, который распознает язык L при помощи пустого стека (т.е. $L = L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}') = L_{\nabla}(\mathcal{M}')$ — почему?)

- Пусть $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F, \gamma_0)$.
- Рассмотрим $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \Delta', \delta', q_0', F', \gamma_0')$,
  где $Q' = Q \cup \{q_0'\}$, $\Delta' = \Delta \cup \{X_0\}$, $\gamma_0' = \gamma_0 X_0$, $F' = F \cup \{f' \mid f \in F\}$.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА при пустом стеке

Теорема 1

Пусть язык L распознается МП-автоматом $\mathcal{M}$. Тогда существует эквивалентный ему МП-автомат $\mathcal{M}'$, который распознает язык L при помощи пустого стека (т.е. $L = L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}') = L_{\nabla}(\mathcal{M}')$ — почему?)

- Пусть $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F, \gamma_0)$.
- Рассмотрим $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \Delta', \delta', q_0', F', \gamma_0')$, где $Q' = Q \cup \{q_0'\}$, $\Delta' = \Delta \cup \{X_0\}$, $\gamma_0' = \gamma_0 X_0$, $F' = F \cup \{f' \mid f \in F\}$.
- Во-первых, для любых $a \in \Sigma$ положим переход $\delta'(q_0', X_0, a) = (q_0, \gamma_0 X_0, \_)$, который позволяет начать разбор произвольной цепочки так, как это делал бы автомат $\mathcal{M}$, только X_0 — новое дно стека.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА при пустом стеке

Теорема 1

Пусть язык L распознается МП-автоматом $\mathcal{M}$. Тогда существует эквивалентный ему МП-автомат $\mathcal{M}'$, который распознает язык L при помощи пустого стека (т.е. $L = L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}') = L_{\nabla}(\mathcal{M}')$ — почему?)

- Пусть $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F, \gamma_0)$.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА при пустом стеке

Теорема 1

Пусть язык L распознается МП-автоматом $\mathcal{M}$. Тогда существует эквивалентный ему МП-автомат $\mathcal{M}'$, который распознает язык L при помощи пустого стека (т.е. $L = L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}') = L_\nabla(\mathcal{M}')$ — почему?)

- Пусть $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F, \gamma_0)$.
- Рассмотрим $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \Delta', \delta', q_0', F', \gamma_0')$, где $Q' = Q \cup \{q_0'\} \cup \{f' \mid f \in F\}$, $\Delta' = \Delta \cup \{X_0\}$, $\gamma_0' = X_0$, $F' = \{f' \mid f \in F\}$.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА при пустом стеке

Теорема 1

Пусть язык L распознается МП-автоматом $\mathcal{M}$. Тогда существует эквивалентный ему МП-автомат $\mathcal{M}'$, который распознает язык L при помощи пустого стека (т.е. $L = L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}') = L_{\nabla}(\mathcal{M}')$ — почему?)

- Пусть $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F, \gamma_0)$.
- Рассмотрим $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \Delta', \delta', q_0', F', \gamma_0')$, где $Q' = Q \cup \{q_0'\} \cup \{f' \mid f \in F\}$, $\Delta' = \Delta \cup \{X_0\}$, $\gamma_0' = X_0$, $F' = \{f' \mid f \in F\}$.
- Во-первых, для любых $a \in \Sigma$ определим переход $\delta'(q_0', X_0, a) = (q_0, \gamma_0 X_0, \_)$, который позволяет начать разбор произвольной цепочки так, как это делал бы автомат $\mathcal{M}$, при этом X_0 — новое дно стека.

Эквивалентость распознавания МПА и МПА при пустом стеке

- Во-вторых, сохраним все переходы автомата $\mathcal{M}$, когда стек не был пуст: для любых $a \in \Sigma$, $X \in \Delta \setminus \{\nabla\}$ (т.е. $X \neq X_0$, $X \neq \nabla$), $\beta \in \Delta^*$, $\xi \in \{\rightarrow, \_\}$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ положим:
  $\delta'(q_i, X, a) = \delta(q_i, X, a) = (q_j, \beta, \xi)$.

Эквивалентость распознавания МПА и МПА при пустом стеке

- Во-вторых, сохраним все переходы автомата $\mathcal{M}$, когда стек не был пуст: для любых $a \in \Sigma$, $X \in \Delta \backslash \{\nabla\}$ (т.е. $X \neq X_0$, $X \neq \nabla$), $\beta \in \Delta^*$, $\xi \in \{\rightarrow, \_\}$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ положим:
  $\delta'(q_i, X, a) = \delta(q_i, X, a) = (q_j, \beta, \xi)$.
- В-третьих, добавим также все переходы δ' таким образом, чтобы X_0 не удалялось из стека "при применении старых команд":
  для любых $a \in \Sigma$, $\beta \in \Delta^*$, $\xi \in \{\rightarrow, \_\}$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ положим:
  $\delta'(q_i, X_0, a) = (q_j, \beta X_0, \xi)$ тогда и только тогда, когда $\delta(q_i, \nabla, a) = (q_j, \beta, \xi)$.

Эквивалентость распознавания МПА и МПА при пустом стеке

- Во-вторых, сохраним все переходы автомата $\mathcal{M}$, когда стек не был пуст: для любых $a \in \Sigma$, $X \in \Delta \backslash \{\nabla\}$ (т.е. $X \neq X_0$, $X \neq \nabla$), $\beta \in \Delta^*$, $\xi \in \{\rightarrow, \_\}$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ положим:
$\delta'(q_i, X, a) = \delta(q_i, X, a) = (q_j, \beta, \xi)$.
- В-третьих, добавим также все переходы δ' таким образом, чтобы X_0 не удалялось из стека "при применении старых команд":
для любых $a \in \Sigma$, $\beta \in \Delta^*$, $\xi \in \{\rightarrow, \_\}$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ положим:
$\delta'(q_i, X_0, a) = (q_j, \beta X_0, \xi)$ тогда и только тогда, когда $\delta(q_i, \nabla, a) = (q_j, \beta, \xi)$.
- В-четвертых, для всех конечных состояний $f \in F$ исходного и МП-автомата $\mathcal{M}$, и МП-автомата $\mathcal{M}'$ и всех $Y \in \Delta' \backslash \{\nabla\}$ МП-автомата $\mathcal{M}'$ добавим переходы $\delta'(f, Y, \dashv) = (f, \varepsilon, \_)$. Все, что делают переходы, — опустошают стек.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА при пустом стеке

- Наконец, для $f \in F$ положим $\delta'(f', \nabla, \dashv) = (f', \varepsilon, \_)$.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА при пустом стеке

- Наконец, для $f \in F$ положим $\delta'(f', \nabla, \dashv) = (f', \varepsilon, \_)$.
- Из эквивалентности

$$w \in L(\mathcal{M}) \Leftrightarrow [q_0, \gamma_0, w] \models^*_{\mathcal{M}} [f, \beta, \dashv], f \in F \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [q_0', X_0, w] \models_{\mathcal{M}'} [q_0, \gamma_0 X_0, w] \models^*_{\mathcal{M}'} [f, \beta X_0, \dashv] \models^*_{\mathcal{M}'} [f', \varepsilon, \dashv] \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{M}')$$

следует требуемое.

Пример 3

- Наконец, для $f \in F$ положим $\delta'(f, \nabla, \dashv) = (f', \varepsilon, \_)$.

Пример 3

- Наконец, для $f \in F$ положим $\delta'(f, \nabla, \dashv) = (f', \varepsilon, \_)$.
- Из эквивалентности

$$w \in L(\mathcal{M}) \Leftrightarrow [q_0, \gamma_0, w] \models^*_{\mathcal{M}} [f, \beta, \dashv], f \in F \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [q_0', X_0, w] \models_{\mathcal{M}'} [q_0, \gamma_0 X_0, w] \models^*_{\mathcal{M}'} [f, \beta X_0, \dashv] \models^*_{\mathcal{M}'} [f', \varepsilon, \dashv] \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{M}')$$

следует требуемое.

Пример 3 Рассмотрим МП автомат $\mathcal{M}$, распознающий язык $L = \{a^n b^n c^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}$ (объясните почему?-упр.):

		a	b	c	$\dashv$
q_0	a	$(q_0, aa, \to)$	$(q_1, \varepsilon, \to)$		
	∇	$(q_0, a, \to)$			
q_1	a		$(q_1, \varepsilon, \to)$		
	∇			$(q_2, \varepsilon, \_)$	
q_2	c			$(q_3, c, \to)$	
	∇				
q_3	c			$(q_3, c, \to)$	
	∇				$(q_4, \varepsilon, \_)$
q_4	c				
	∇				

Здесь $\Sigma = \{a, b, c\}$ — алфавит, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ — множество состояний, $\Delta = \{a, c, \nabla\}$ — множество стековых символов, функция перехода δ задана управляющей таблицей сверху, q_0 — начальная вершина и $F = \{q_4\}$ — множество заключительных вершин, $\gamma_0 = \varepsilon$.

Проиллюстрируем протокол обработки слова $a^2b^2c^3$ автоматом $\mathcal{M}$:

№ такта	состояние	содержимое стека	позиция указателя
1	q_0	∇	$\diamond$aabbccc$\dashv$
2	q_0	a∇	a$\diamond$abbccc$\dashv$
3	q_0	aa∇	aa$\diamond$bbccc$\dashv$
4	q_1	a∇	aab$\diamond$bccc$\dashv$
5	q_1	∇	aabb$\diamond$ccc$\dashv$
6	q_2	∇	aabb$\diamond$ccc$\dashv$
7	q_3	c∇	aabbc$\diamond$cc$\dashv$
8	q_3	cc∇	aabbcc$\diamond$c$\dashv$
9	q_3	ccc∇	aabbccc$\diamond$$\dashv$
10	q_4	ccc∇	aabbccc$\diamond$$\dashv$

Получим $[q_0, \varepsilon, aabbccc \dashv] \models [q_0, a, abbccc \dashv] \models [q_0, aa, bbccc \dashv] \models [q_1, a, bccc \dashv] \models [q_1, , ccc \dashv] \models [q_2, , ccc \dashv] \models [q_3, c, cc \dashv] \models [q_3, cc, c \dashv] \models [q_3, ccc, \dashv] \models [q_4, ccc, \dashv]$, и автомат $\mathcal{M}$ допускает цепочку $a^2b^2c^3$.

Пример 3. Построение автомата $\mathcal{M}'$

Новый МП-автомат $\mathcal{M}'$, строящийся по МП-автомату $\mathcal{M}$ по теореме 1 имеет следующих параметры:

$\Sigma = \{a, b, c\}$ — алфавит,

$Q' = \{q_0', q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_4'\}$ — множество состояний,

$\Delta = \{X_0, a, c, \nabla\}$ — множество стековых символов,

функцией перехода δ', заданной управляющей таблицей (см. следующий слайд),

q_0' — начальная вершина,

$F' = \{q_4'\}$ — множество заключительных вершин.

$\gamma_0' = X_0$.

Пример 3. Управляющая таблица автомата $\mathcal{M}'$

	a	b	c	$\dashv$
q_0' a X_0 ∇	$(q_0, X_0, \_)$	$(q_0, X_0, \_)$	$(q_0, X_0, \_)$	
q_0 a X_0 ∇	$(q_0, aa, \rightarrow)$ $(q_0, aX_0, \rightarrow)$	$(q_1, \varepsilon, \rightarrow)$		
q_1 a X_0 ∇		$(q_1, \varepsilon, \rightarrow)$	$(q_2, X_0, \_)$	
q_2 c X_0 ∇			$(q_3, c, \rightarrow)$	
q_3 c X_0 ∇			$(q_3, c, \rightarrow)$	$(q_4, X_0, \_)$
q_4 c X_0 ∇				$(q_4, \varepsilon, \_)$ $(q_4, \varepsilon, \_)$ $(q_4', \varepsilon, \_)$
q_4' c X_0 ∇				

Протокол обработки слова $a^2b^2c^3$ МП-автоматом $\mathcal{M}'$

Проиллюстрируем протокол обработки слова $a^2b^2c^3$ автоматом $\mathcal{M}'$:

№ такта	состояние	содержимое стека	позиция указателя
1	q'_0	$X_0\nabla$	$\diamond$aabbccc$\dashv$
2	q_0	$X_0\nabla$	$\diamond$aabbccc$\dashv$
3	q_0	a$X_0\nabla$	a$\diamond$abbccc$\dashv$
4	q_0	aa$X_0\nabla$	aa$\diamond$bbccc$\dashv$
5	q_1	a$X_0\nabla$	aab$\diamond$bccc$\dashv$
6	q_1	$X_0\nabla$	aabb$\diamond$ccc$\dashv$
7	q_2	$X_0\nabla$	aabb$\diamond$ccc$\dashv$
8	q_3	c$X_0\nabla$	aabbc$\diamond$cc$\dashv$
9	q_3	cc$X_0\nabla$	aabbcc$\diamond$c$\dashv$
10	q_3	ccc$X_0\nabla$	aabbccc$\diamond\dashv$
11	q_4	ccc$X_0\nabla$	aabbccc$\diamond\dashv$
12	q_4	cc$X_0\nabla$	aabbccc$\diamond\dashv$
13	q_4	c$X_0\nabla$	aabbccc$\diamond\dashv$
14	q_4	$X_0\nabla$	aabbccc$\diamond\dashv$
15	q_4	∇	aabbccc$\diamond\dashv$
16	q'_4	∇	aabbccc$\diamond\dashv$

Протокол обработки слова $a^2b^2c^3$ МП-автоматом $\mathcal{M}'$

Получим
$[q_0', X_0, aabbccc \dashv] \models [q_0, X_0, aabbccc \dashv] \models [q_0, aX_0, abbccc \dashv] \models$
$[q_0, aaX_0, bbccc \dashv] \models [q_1, aX_0, bccc \dashv] \models [q_1, X_0, ccc \dashv] \models [q_2, X_0, ccc \dashv] \models$
$[q_3, cX_0, cc \dashv] \models [q_3, ccX_0, c \dashv] \models [q_3, cccX_0, \dashv] \models [q_4, cccX_0, \dashv]$,
$[q_4, ccX_0, cc \dashv] \models [q_4, cX_0, c \dashv] \models [q_4, X_0, \dashv] \models [q_4, \nabla, \dashv] \models [q_4', \nabla, \dashv]$,
и автомат $\mathcal{M}'$ допускает цепочку $a^2b^2c^3$.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА с пустым начальным содержимым стека

Теперь, когда мы доказали эквивалентность распознаваемости МПА и МПА при пустом стеке, можно задаться вопросом об эквивалентности МПА и МПА с пустым начальным содержимым стека, т.е. с $\gamma_0 = \nabla$. Разумеется, при этом как и при доказательстве теоремы 1, количество состояний нового автомата увеличится.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА с пустым начальным содержимым стека

Теперь, когда мы доказали эквивалентность распознаваемости МПА и МПА при пустом стеке, можно задаться вопросом об эквивалентности МПА и МПА с пустым начальным содержимым стека, т.е. с $\gamma_0 = \nabla$. Разумеется, при этом как и при доказательстве теоремы 1, количество состояний нового автомата увеличится.

Теорема 2

Пусть язык L распознается МП-автоматом $\mathcal{M}$. Тогда существует эквивалентный ему МП-автомат $\mathcal{M}''$, который распознает язык L с пустым начальным содержимым стека.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА с пустым начальным содержимым стека

Теперь, когда мы доказали эквивалентность распознаваемости МПА и МПА при пустом стеке, можно задаться вопросом об эквивалентности МПА и МПА с пустым начальным содержимым стека, т.е. с $\gamma_0 = \nabla$. Разумеется, при этом как и при доказательстве теоремы 1, количество состояний нового автомата увеличится.

Теорема 2

Пусть язык L распознается МП-автоматом $\mathcal{M}$. Тогда существует эквивалентный ему МП-автомат $\mathcal{M}''$, который распознает язык L с пустым начальным содержимым стека.

Доказательство — упражнение.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА с пустым начальн. содерж. стека и при помощи пустого стека

Указание: Построить по произвольно МП-автомату $\mathcal{M}$ МП-автомат $\mathcal{M}''$ с пустым начальным содержимым стека, добавив в исходный автомат $\mathcal{M}$ дополнительные состояния и переходы, позволяющие "записать"вначале в пустой стек МП-автомата $\mathcal{M}''$ содержимое начального содержимого стека исходного автомата $\mathcal{M}$.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА с пустым начальн. содерж. стека и при помощи пустого стека

Указание: Построить по произвольно МП-автомату $\mathcal{M}$ МП-автомат $\mathcal{M}''$ с пустым начальным содержимым стека, добавив в исходный автомат $\mathcal{M}$ дополнительные состояния и переходы, позволяющие "записать"вначале в пустой стек МП-автомата $\mathcal{M}''$ содержимое начального содержимого стека исходного автомата $\mathcal{M}$.

А значит, справедливо и такое утверждение

Эквивалентность распознавания МПА и МПА с пустым начальн. содерж. стека и при помощи пустого стека

Указание: Построить по произвольно МП-автомату $\mathcal{M}$ МП-автомат $\mathcal{M}''$ с пустым начальным содержимым стека, добавив в исходный автомат $\mathcal{M}$ дополнительные состояния и переходы, позволяющие "записать"вначале в пустой стек МП-автомата $\mathcal{M}''$ содержимое начального содержимого стека исходного автомата $\mathcal{M}$.

А значит, справедливо и такое утверждение

Следствие

Пусть язык L распознается МП-автоматом $\mathcal{M}$. Тогда существует эквивалентный ему МП-автомат $\mathcal{M}'''$, который распознает язык L при помощи пустого стека с пустым начальным содержимым стека.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА с пустым начальн. содерж. стека и при помощи пустого стека

Указание: Построить по произвольно МП-автомату $\mathcal{M}$ МП-автомат $\mathcal{M}''$ с пустым начальным содержимым стека, добавив в исходный автомат $\mathcal{M}$ дополнительные состояния и переходы, позволяющие "записать"вначале в пустой стек МП-автомата $\mathcal{M}''$ содержимое начального содержимого стека исходного автомата $\mathcal{M}$.

А значит, справедливо и такое утверждение

Следствие

Пусть язык L распознается МП-автоматом $\mathcal{M}$. Тогда существует эквивалентный ему МП-автомат $\mathcal{M}'''$, который распознает язык L при помощи пустого стека с пустым начальным содержимым стека.

Доказательство — последовательное применение сначала теоремы 1, затем теоремы 2.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА с пустым начальн. содерж. стека и при помощи пустого стека

Указание: Построить по произвольно МП-автомату $\mathcal{M}$ МП-автомат $\mathcal{M}''$ с пустым начальным содержимым стека, добавив в исходный автомат $\mathcal{M}$ дополнительные состояния и переходы, позволяющие "записать"вначале в пустой стек МП-автомата $\mathcal{M}''$ содержимое начального содержимого стека исходного автомата $\mathcal{M}$.

А значит, справедливо и такое утверждение

Следствие

Пусть язык L распознается МП-автоматом $\mathcal{M}$. Тогда существует эквивалентный ему МП-автомат $\mathcal{M}'''$, который распознает язык L при помощи пустого стека с пустым начальным содержимым стека.

Доказательство — последовательное применение сначала теоремы 1, затем теоремы 2.

Упражнение: Построить по МП-автомату $\mathcal{M}'$ из примера 3 МП-автомат $\mathcal{M}''$ с пустым начальным содержимым стека, пользуясь теоремой 2.

Эквивалентность распознавания МПА и МПА с пустым начальн. содерж. стека и при помощи пустого стека

Указание: Построить по произвольно МП-автомату $\mathcal{M}$ МП-автомат $\mathcal{M}''$ с пустым начальным содержимым стека, добавив в исходный автомат $\mathcal{M}$ дополнительные состояния и переходы, позволяющие "записать"вначале в пустой стек МП-автомата $\mathcal{M}''$ содержимое начального содержимого стека исходного автомата $\mathcal{M}$.

А значит, справедливо и такое утверждение

Следствие

Пусть язык L распознается МП-автоматом $\mathcal{M}$. Тогда существует эквивалентный ему МП-автомат $\mathcal{M}'''$, который распознает язык L при помощи пустого стека с пустым начальным содержимым стека.

Доказательство — последовательное применение сначала теоремы 1, затем теоремы 2.

Упражнение: Построить по МП-автомату $\mathcal{M}'$ из примера 3 МП-автомат $\mathcal{M}''$ с пустым начальным содержимым стека, пользуясь теоремой 2.

Дальнейшие предположения для МП-автоматов

В этом курсе все МП автоматы, будут только с одним состоянием. Тогда понятно, что такие автоматы (точнее, МП-автоматы с одним состоянием, допускающие непустые языки) будут распознавать слова только при пустом стеке (почему?).

Основная причина, почему мы будем рассматривать только МП-автоматы с одним состоянием в том, что автоматы с несколькими состояниями — очень громоздкая конструкция и добавление состояний только увеличивает размер управляющей таблицы.