Лингвистические основы информатики
Лекция 10
Языки над однобуквенным алфавитом

Ю. В. Нагребецкая, И. А. Михайлова

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направления: Математика и компьютерные науки
Компьютерная безопасность
(6 семестр)

Периодические множества

- Свободный моноид a^* является единственным коммутативным моноидом из всех свободных моноидов, поэтому он обладает особенными свойствами, котороые мы будем обсуждать в этой лекции.
- Каждое слово w из унарного языка $L \subseteq a^*$ можно представить в виде a^n, где n — длин слова w, поэтому вместо языка L естественно рассматривать подмножество множества неотрицательных целых чисел $\mathbb{N}_0$, которое состоит из длин слов языка L, т.е. $M(L) = \{|w| \mid w \in L\}$

Периодические множества

- Свободный моноид a^* является единственным коммутативным моноидом из всех свободных моноидов, поэтому он обладает особенными свойствами, котороые мы будем обсуждать в этой лекции.
- Каждое слово w из унарного языка $L \subseteq a^*$ можно представить в виде a^n, где n — длин слова w, поэтому вместо языка L естественно рассматривать подмножество множества неотрицательных целых чисел $\mathbb{N}_0$, которое состоит из длин слов языка L, т.е. $M(L) = \{|w| \mid w \in L\}$

Множество $M \subseteq \mathbb{N}_0$ называется периодическим, если существуют числа $n_0, d \in \mathbb{N}$ (n_0 называется индексом, а d — периодом) такие, что

$$\forall m \in M \quad m \geq n_0 \Rightarrow m + d \in M$$

Периодические множества. Пример 1

Пример 1 Рассмотрим множество
$M = \{0,1\} \cup \{2+2k, 7+3k \mid k \in \mathbb{N}_0\} = \{0,1\} \cup 2 + 2\mathbb{N}_0 \cup 7 + 3\mathbb{N}_0$.
Покажем, что это множество будет периодическим с периодом $d = 6$ и индексом $n_0 = 2$.

- Действительно, множество M является объединением множества $P_0 = \{0,1\}$ и двух арифметических прогрессий с разностями 2 и 3.
- Первая прогрессия имеет вид $\{2,4,6,8,10,12,\ldots\}$, представим ее в виде объединения множеств $P_1 = \{2,8,14,\ldots\}$, $P_2 = \{4,10,16,\ldots\}$, $P_3 = \{6,12,18,\ldots\}$.
- Вторая прогрессия имеет вид $\{7,10,13,16,\ldots\}$, ее представим в виде объединения множеств $P_4 = \{7,13,19,\ldots\}$ и $P_5 = \{10,16,\ldots\}$. Видно, что $P_5 \subseteq P_2$.
- Тогда множество M является объединением конечного множества P_0 и четырех арифметических прогрессий P_1, P_2, P_3, P_4 с одинаковой разностью $d = 6$.
- Тогда множество M является периодическим с индексом - любым числом n_0, большим или равным числа $\min\{2,4,6,7\} = 2$ с периодом $d = 6$.

Теорема об унарных языках

Для любого унарного языка L следующие условия эквивалентны:

1. язык L рационален;
2. язык L контекстно-свободен;
3. множество $M(L)$ является периодическим.

Теорема об унарных языках

Для любого унарного языка L следующие условия эквивалентны:

1. язык L рационален;
2. язык L контекстно-свободен;
3. множество $M(L)$ является периодическим.

Доказательство. Ранее мы уже доказали, что для любого языка $(1) \Rightarrow (2)$

Теорема об унарных языках

Для любого унарного языка L следующие условия эквивалентны:

1. язык L рационален;
2. язык L контекстно-свободен;
3. множество $M(L)$ является периодическим.

Доказательство. Ранее мы уже доказали, что для любого языка $(1) \Rightarrow (2)$
$(2) \Rightarrow (3)$ Так как L — КС язык, то для него выполняется лемма о накачке:

Теорема об унарных языках. Доказательство

$\exists m \exists n \in \mathbb{N}$:

Теорема об унарных языках. Доказательство

$\exists m \exists n \in \mathbb{N}$:

$\quad \forall w \in L$

Теорема об унарных языках. Доказательство

$\exists m \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

Теорема об унарных языках. Доказательство

$\exists m \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

Теорема об унарных языках. Доказательство

$\exists m \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

Теорема об унарных языках. Доказательство

$\exists m \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

Теорема об унарных языках. Доказательство

$\exists m \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

$w = xuyvz$

Теорема об унарных языках. Доказательство

$\exists m \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

$w = xuyvz$

и

$\exists m \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

Теорема об унарных языках. Доказательство

$\exists m \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

Теорема об унарных языках. Доказательство

$\exists m \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

$|uyv| \leq 1$

Теорема об унарных языках. Доказательство

$\exists m \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

$|uyv| \leq 1$

и

Теорема об унарных языках. Доказательство

$\exists m \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

$|uyv| \leq 1$

и

$\forall k \geq 0 \ (xu^k yv^k z \in L)$

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Найдем индекс и период языка L.

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Найдем индекс и период языка L.
- Рассмотрим слово $w = xuyvz$. Так полугруппа a^* коммутативна, то $w = xuyvz = (xyz)(uv) = a^s a^p$, где $xyz = a^s$, $uv = a^p$. Тогда для любого $k \geq 0$ имеем $(xyz)(uv)^k = a^s a^{kp} = a^{s+kp} \in L$

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Найдем индекс и период языка L.
- Рассмотрим слово $w = xuyvz$. Так полугруппа a^* коммутативна, то $w = xuyvz = (xyz)(uv) = a^s a^p$, где $xyz = a^s$, $uv = a^p$. Тогда для любого $k \geq 0$ имеем $(xyz)(uv)^k = a^s a^{kp} = a^{s+kp} \in L$
- Кроме того, $|uyz| \leq m$, откуда $p = |uv| \leq m$, тогда возьмем $d = m!$ и отметим, что так как $p \leq m$, то $p \mid m!$.

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Пусть $d = Kp$, тогда перепишем условие леммы о накачке:
  $\exists n_0 = n \ \exists d = m! \in \mathbb{N}$:

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Пусть $d = Kp$, тогда перепишем условие леммы о накачке:
  $\exists n_0 = n\ \exists d = m! \in \mathbb{N}$:
  $\forall w \in L$

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Пусть $d = Kp$, тогда перепишем условие леммы о накачке:

  $\exists n_0 = n \; \exists d = m! \in \mathbb{N}$:

  $\forall w \in L$

  если

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Пусть $d = Kp$, тогда перепишем условие леммы о накачке:

  $\exists n_0 = n \; \exists d = m! \in \mathbb{N}$:

  $\forall w \in L$

  если

  $|w| \geq n_0$

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Пусть $d = Kp$, тогда перепишем условие леммы о накачке:

  $\exists n_0 = n\ \exists d = m! \in \mathbb{N}$:

  $\forall w \in L$

  если

  $|w| \geq n_0$

  то

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Пусть $d = Kp$, тогда перепишем условие леммы о накачке:

  $\exists n_0 = n\ \exists d = m! \in \mathbb{N}$:

  $\forall w \in L$

  если

  $|w| \geq n_0$

  то

  $\exists s, p, K \in \mathbb{N}$

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Пусть $d = Kp$, тогда перепишем условие леммы о накачке:

  $\exists n_0 = n \; \exists d = m! \in \mathbb{N}$:

  $\forall w \in L$

  если

  $|w| \geq n_0$

  то

  $\exists s, p, K \in \mathbb{N}$

  $d = Kp$

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Пусть $d = Kp$, тогда перепишем условие леммы о накачке:

  $\exists n_0 = n \; \exists d = m! \in \mathbb{N}$:

  $\forall w \in L$

  если

  $|w| \geq n_0$

  то

  $\exists s, p, K \in \mathbb{N}$

  $d = Kp$

  и

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Пусть $d = Kp$, тогда перепишем условие леммы о накачке:

  $\exists n_0 = n \ \exists d = m! \in \mathbb{N}$:

  $\forall w \in L$

  если

  $|w| \geq n_0$

  то

  $\exists s, p, K \in \mathbb{N}$

  $d = Kp$

  и

  $\forall k \geq 0 \ (a^{s+kp} \in L)$

- Докажем периодичность множества $M(L)$.
  (Напомним, что $w \in L \Leftrightarrow |w| \in M(L)$):
  $|w| \in M(L), \ |w| \geq n_0 \Rightarrow |w| = s + p \Rightarrow$
  $|w| + d = s + p + d = s + p + Kp = s + (K+1)p$.

- Возьмем $k = K + 1$ и получим по лемме о накачке, что
  $a^{s+kp} = a^{s+(K+1)p} = a^{|w|+d} \in L \Rightarrow |w| + d \in M(L)$.

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (1) Пусть $M(L)$ периодическое, где n_0 — индекс, а d — период этого множества.

Теорема об унарных языках. Доказательство

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (1) Пусть $M(L)$ периодическое, где n_0 — индекс, а d — период этого множества.

- Для $i = 0, \dots, d-1$ рассмотрим $k_i \geq n_0, k_i \equiv i(mod\ d)$ — минимальное число такое, что последовательность $k_i + d\mathbb{N}_0 = \{k_i + nd \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ является подмножеством $M(L)$. Если такого числа не найдется, то положим $k_i = \infty$.

Доказательство. (3) $\Rightarrow$ (1) Пусть $M(L)$ периодическое, где n_0 — индекс, а d — период этого множества.

- Для $i = 0, \ldots, d-1$ рассмотрим $k_i \geq n_0, k_i \equiv i(mod\ d)$ — минимальное число такое, что последовательность $k_i + d\mathbb{N}_0 = \{k_i + nd \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ является подмножеством $M(L)$. Если такого числа не найдется, то положим $k_i = \infty$.
- Очевидно, мощность множества $P = \{k_i < \infty \mid i = 0, \ldots, d-1\}$ меньше d. Пусть $K = \max(P)$. Обозначим через Q множество $\{0, .., K+d-1\}$ и построим ДКА $\mathcal{A} = \{Q, \{a\}, \delta, \{0\}, F\}$:

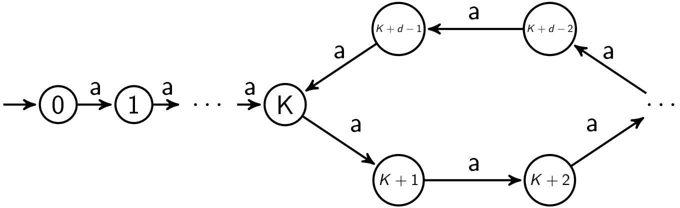

Рис. 1

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Зададим множество выходных состояний:
  Для $0 \leq n \leq K-1$ положим $n \in F \Leftrightarrow n \in M(L)(\Leftrightarrow a^n \in L)$.
  Для $K \leq n \leq K+d-1$ положим $n \in F \Leftrightarrow \exists k_i < \infty \; (n \equiv k_i (mod \;\; d))$.

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Зададим множество выходных состояний:
  Для $0 \leq n \leq K-1$ положим $n \in F \Leftrightarrow n \in M(L) (\Leftrightarrow a^n \in L)$.
  Для $K \leq n \leq K+d-1$ положим $n \in F \Leftrightarrow \exists k_i < \infty \; (n \equiv k_i (mod \;\; d))$.
- Покажем, что $L \subseteq L(\mathcal{A})$.

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Зададим множество выходных состояний:
  Для $0 \leq n \leq K - 1$ положим $n \in F \Leftrightarrow n \in M(L)(\Leftrightarrow a^n \in L)$.
  Для $K \leq n \leq K + d - 1$ положим $n \in F \Leftrightarrow \exists k_i < \infty \ (n \equiv k_i (mod \ d))$.
- Покажем, что $L \subseteq L(\mathcal{A})$.
- Пусть $w \in L$, $w = a^n$. Тогда если $n = |w| < K$, то по рис.1 и определению множества F заключительных вершин $w \in L(\mathcal{A})$.
  Если $n = |w| \geq K$, то $\exists k_i \equiv n(mod \ d) \Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$.

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Зададим множество выходных состояний:
  Для $0 \leq n \leq K - 1$ положим $n \in F \Leftrightarrow n \in M(L)(\Leftrightarrow a^n \in L)$.
  Для $K \leq n \leq K + d - 1$ положим $n \in F \Leftrightarrow \exists k_i < \infty \; (n \equiv k_i(mod\ d))$.
- Покажем, что $L \subseteq L(\mathcal{A})$.
- Пусть $w \in L$, $w = a^n$. Тогда если $n = |w| < K$, то по рис.1 и определению множества F заключительных вершин $w \in L(\mathcal{A})$.
  Если $n = |w| \geq K$, то $\exists k_i \equiv n(mod\ d) \Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$.
- Покажем, что $L(\mathcal{A}) \subseteq L$.

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Зададим множество выходных состояний:
  Для $0 \leq n \leq K - 1$ положим $n \in F \Leftrightarrow n \in M(L)(\Leftrightarrow a^n \in L)$.
  Для $K \leq n \leq K + d - 1$ положим $n \in F \Leftrightarrow \exists k_i < \infty\ (n \equiv k_i(mod\ d))$.
- Покажем, что $L \subseteq L(\mathcal{A})$.
- Пусть $w \in L$, $w = a^n$. Тогда если $n = |w| < K$, то по рис.1 и определению множества F заключительных вершин $w \in L(\mathcal{A})$.
  Если $n = |w| \geq K$, то $\exists k_i \equiv n(mod\ d) \Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$.
- Покажем, что $L(\mathcal{A}) \subseteq L$.
- Пусть $w \in L(\mathcal{A})$ и $w = a^n$.

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Зададим множество выходных состояний:
  Для $0 \leq n \leq K - 1$ положим $n \in F \Leftrightarrow n \in M(L) (\Leftrightarrow a^n \in L)$.
  Для $K \leq n \leq K + d - 1$ положим $n \in F \Leftrightarrow \exists k_i < \infty \ (n \equiv k_i (mod \ d))$.
- Покажем, что $L \subseteq L(\mathcal{A})$.
- Пусть $w \in L$, $w = a^n$. Тогда если $n = |w| < K$, то по рис.1 и определению множества F заключительных вершин $w \in L(\mathcal{A})$.
  Если $n = |w| \geq K$, то $\exists k_i \equiv n (mod \ d) \Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$.
- Покажем, что $L(\mathcal{A}) \subseteq L$.
- Пусть $w \in L(\mathcal{A})$ и $w = a^n$.
- Тогда если $n = |w| < K$, то по рис.1 и определению множества F заключительных вершин $w \in L$.

Теорема об унарных языках. Доказательство

- Зададим множество выходных состояний:
  Для $0 \le n \le K-1$ положим $n \in F \Leftrightarrow n \in M(L) (\Leftrightarrow a^n \in L)$.
  Для $K \le n \le K+d-1$ положим $n \in F \Leftrightarrow \exists k_i < \infty \ (n \equiv k_i (mod\ \ d))$.
- Покажем, что $L \subseteq L(\mathcal{A})$.
- Пусть $w \in L$, $w = a^n$. Тогда если $n = |w| < K$, то по рис.1 и определению множества F заключительных вершин $w \in L(\mathcal{A})$.
  Если $n = |w| \ge K$, то $\exists k_i \equiv n(mod\ \ d) \Rightarrow w \in L(\mathcal{A})$.
- Покажем, что $L(\mathcal{A}) \subseteq L$.
- Пусть $w \in L(\mathcal{A})$ и $w = a^n$.
- Тогда если $n = |w| < K$, то по рис.1 и определению множества F заключительных вершин $w \in L$.
- Если $n = |w| \ge K$, то по определению множества F заключительных вершин $n = \delta(0, w) \equiv k_i (mod\ \ d)$.
  Следовательно, $n \in k_i + d\mathbb{N}_0 \subseteq P \subseteq M(L)$.
  Значит, $w \in L$.

Пример 2

Пример 2 **Построить ДКА для периодического множества** $M = \{1, 3 + 3k, 5 + 3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Пример 2 **Построить ДКА для периодического множества** $M = \{1, 3 + 3k, 5 + 3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Индекс $n_0 = 3$, период $d = 3$, поскольку
$n_0 + d\mathbb{N}_0 = 3 + 3\mathbb{N}_0 = \{3 + 3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.

Пример 2

Пример 2 **Построить ДКА для периодического множества** $M = \{1, 3 + 3k, 5 + 3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Индекс $n_0 = 3$, период $d = 3$, поскольку $n_0 + d\mathbb{N}_0 = 3 + 3\mathbb{N}_0 = \{3 + 3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.

$3 + 3\mathbb{N}_0 \subseteq M$, следовательно, $k_i = 3$ для $i \equiv 3(mod 3)$, т.е. для $i = 0$. Итак, $k_0 = 3$.

Пример 2 **Построить ДКА для периодического множества** $M = \{1, 3+3k, 5+3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Индекс $n_0 = 3$, период $d = 3$, поскольку $n_0 + d\mathbb{N}_0 = 3 + 3\mathbb{N}_0 = \{3+3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.

$3 + 3\mathbb{N}_0 \subseteq M$, следовательно, $k_i = 3$ для $i \equiv 3(mod 3)$, т.е. для $i = 0$. Итак, $k_0 = 3$.

$5 + 3\mathbb{N}_0 \subseteq M$, следовательно, $k_i = 5$ для $i \equiv 5(mod 3)$, т.е. для $i = 2$. Итак, $k_2 = 2$.

Пример 2

Пример 2 **Построить ДКА для периодического множества** $M = \{1, 3+3k, 5+3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Индекс $n_0 = 3$, период $d = 3$, поскольку $n_0 + d\mathbb{N}_0 = 3 + 3\mathbb{N}_0 = \{3 + 3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.

$3 + 3\mathbb{N}_0 \subseteq M$, следовательно, $k_i = 3$ для $i \equiv 3(mod 3)$, т.е. для $i = 0$. Итак, $k_0 = 3$.

$5 + 3\mathbb{N}_0 \subseteq M$, следовательно, $k_i = 5$ для $i \equiv 5(mod 3)$, т.е. для $i = 2$. Итак, $k_2 = 2$.

Оставшееся $k_1 = \infty$.

Пример 2 **Построить ДКА для периодического множества** $M = \{1, 3 + 3k, 5 + 3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Индекс $n_0 = 3$, период $d = 3$, поскольку $n_0 + d\mathbb{N}_0 = 3 + 3\mathbb{N}_0 = \{3 + 3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.

$3 + 3\mathbb{N}_0 \subseteq M$, следовательно, $k_i = 3$ для $i \equiv 3(mod3)$, т.е. для $i = 0$. Итак, $k_0 = 3$.

$5 + 3\mathbb{N}_0 \subseteq M$, следовательно, $k_i = 5$ для $i \equiv 5(mod3)$, т.е. для $i = 2$. Итак, $k_2 = 2$.

Оставшееся $k_1 = \infty$.

$P = \{k_0, k_2\} = \{5, 2\}$, $K = \max(P) = 5$.

Пример 2

Пример 2 **Построить ДКА для периодического множества** $M = \{1, 3+3k, 5+3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Индекс $n_0 = 3$, период $d = 3$, поскольку $n_0 + d\mathbb{N}_0 = 3 + 3\mathbb{N}_0 = \{3 + 3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.

$3 + 3\mathbb{N}_0 \subseteq M$, следовательно, $k_i = 3$ для $i \equiv 3(mod 3)$, т.е. для $i = 0$. Итак, $k_0 = 3$.

$5 + 3\mathbb{N}_0 \subseteq M$, следовательно, $k_i = 5$ для $i \equiv 5(mod 3)$, т.е. для $i = 2$. Итак, $k_2 = 2$.

Оставшееся $k_1 = \infty$.

$P = \{k_0, k_2\} = \{5, 2\}$, $K = \max(P) = 5$.

В искомом автомате будет $K + d - 1 = 5 + (3 - 1) = 7$ состояний, нарисуем его (см.рис.2).

Пример 2

Пример 2 **Построить ДКА для периодического множества** $M = \{1, 3 + 3k, 5 + 3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Индекс $n_0 = 3$, период $d = 3$, поскольку $n_0 + d\mathbb{N}_0 = 3 + 3\mathbb{N}_0 = \{3 + 3k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$.

$3 + 3\mathbb{N}_0 \subseteq M$, следовательно, $k_i = 3$ для $i \equiv 3(mod 3)$, т.е. для $i = 0$. Итак, $k_0 = 3$.

$5 + 3\mathbb{N}_0 \subseteq M$, следовательно, $k_i = 5$ для $i \equiv 5(mod 3)$, т.е. для $i = 2$. Итак, $k_2 = 2$.

Оставшееся $k_1 = \infty$.

$P = \{k_0, k_2\} = \{5, 2\}$, $K = \max(P) = 5$.

В искомом автомате будет $K + d - 1 = 5 + (3 - 1) = 7$ состояний, нарисуем его (см.рис.2).

Для $1 \leq n \leq 7$ заключительными вершинами являются вершины $n = 1$, $n = 3 + 3 \cdot 0 = 3$, $n = 3 + 3 \cdot 1 = 6$, $n = 5 + 3 \cdot 0 = 5$.

Пример 2

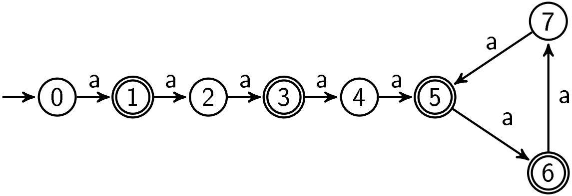

Рис. 2

Следствие

Следствие

Пусть Σ — произвольный алфавит, $L \subseteq \Sigma^*$ — КС язык. Тогда $M(L) = \{|w| \mid w \in L\}$ — периодическое множество.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $f\colon \Sigma^* \to a^*$ такой, что $\forall b \in \Sigma\ f(b) = a$. Ранее (в лекции 6) мы доказали, что если L — КС язык, то $f(L)$ — КС язык.

Значит, по теореме об унарных языках множество $M(f(L))$ является периодическим.

Отметим, что данный гомоморфизм f не изменяет длины слова, поэтому $M(f(L)) = M(L)$, и следовательно, $M(L)$ — периодическое множество.

Примеры 3, 4

Пример 3 **Докажите, что язык $L = \{a^p \mid p -$ простое $\}$ не является контекстно-свободным**

Язык L является унарным. Докажите от противного, что множество $M(L)$ длин слов этого языка, являющееся множеством простых чисел является не является периодическим множеством. Следовательно, язык L не является КС языком.

Примеры 3, 4

Пример 3 **Докажите, что язык $L = \{a^p \mid p -$ простое $\}$ не является контекстно-свободным**

Язык L является унарным. Докажите от противного, что множество $M(L)$ длин слов этого языка, являющееся множеством простых чисел является не является периодическим множеством. Следовательно, язык L не является КС языком.

Пример 4 **Докажите, что язык $L = \{a^p b^p \mid p -$ простое $\}$ не является контекстно-свободным**

Снова рассмотрим множество длин слов этого языка $M(L) = \{2p \mid p -$ простое $\}$. Докажите, что оно не является периодическим множеством. Следовательно, язык L не является КС языком.