Дифференциал второго порядка функции двух переменных

Опр. Дифференциалом второго порядка функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка

$$d^2z = d(dz)$$

при условии, что $dx = const, dy = const$.

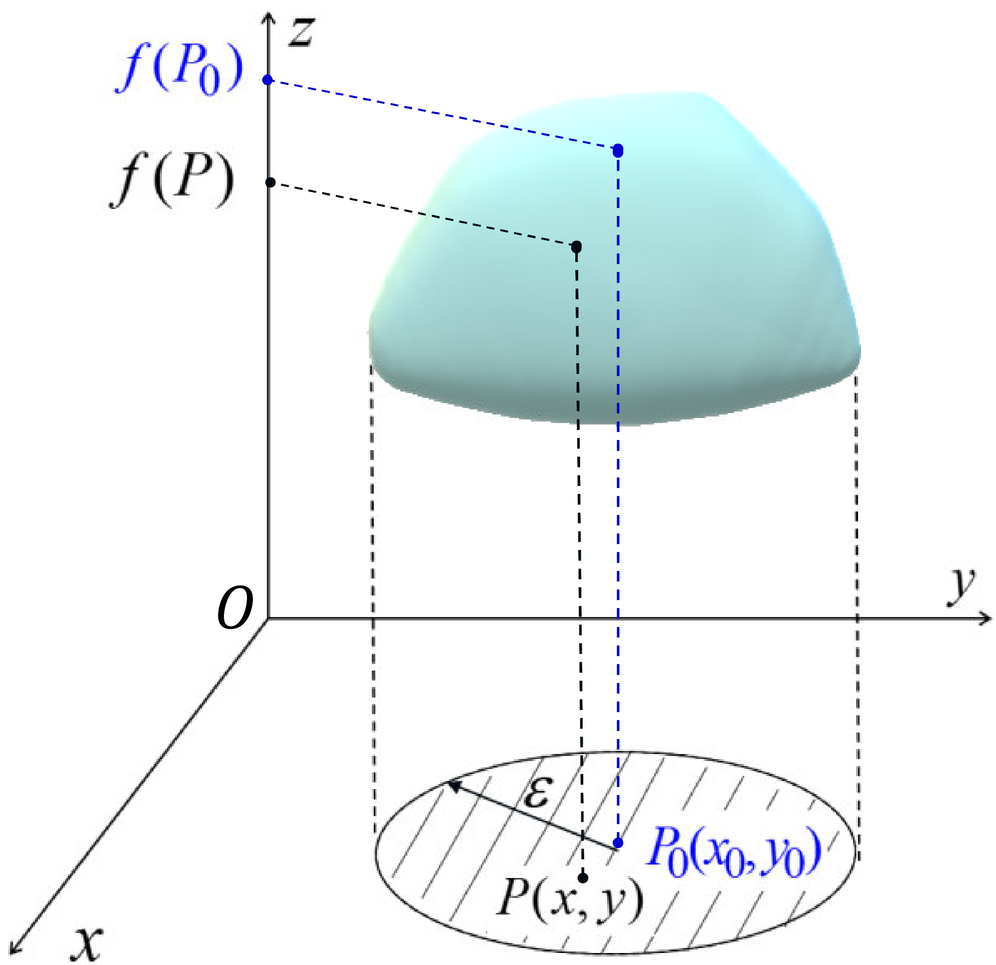
Дифференциал второго порядка функции двух переменных

$$\boxed{d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2}$$

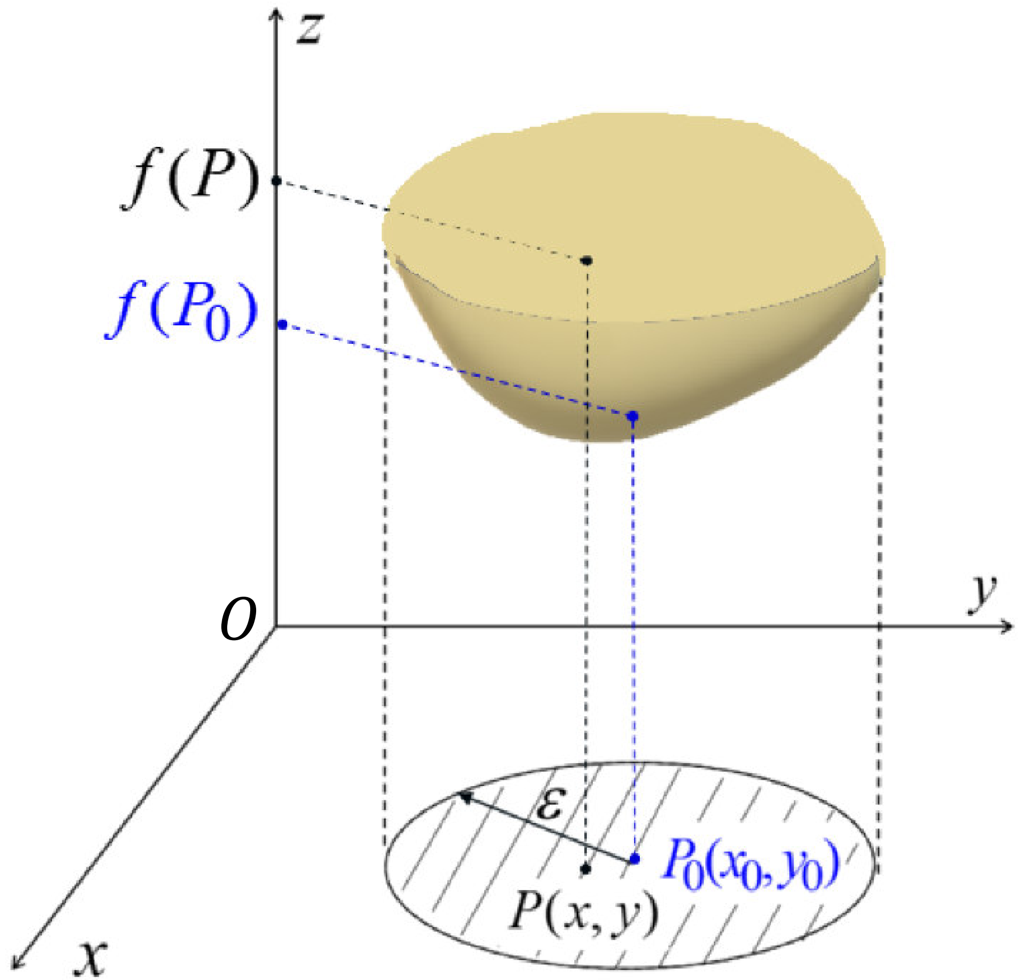
Экстремум функции двух переменных (определение)

Опр. Пусть функция определена в $O(P_0)$. Точка $P_0(x_0, y_0)$ называется точкой локального максимума (локального минимумума) функции $z = f(x, y)$, если в некоторой окрестности функция $z = f(x, y)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение в этой точке.

Локальный максимум Ф2П (иллюстрация)



Локальный минимум Ф2П (иллюстрация)



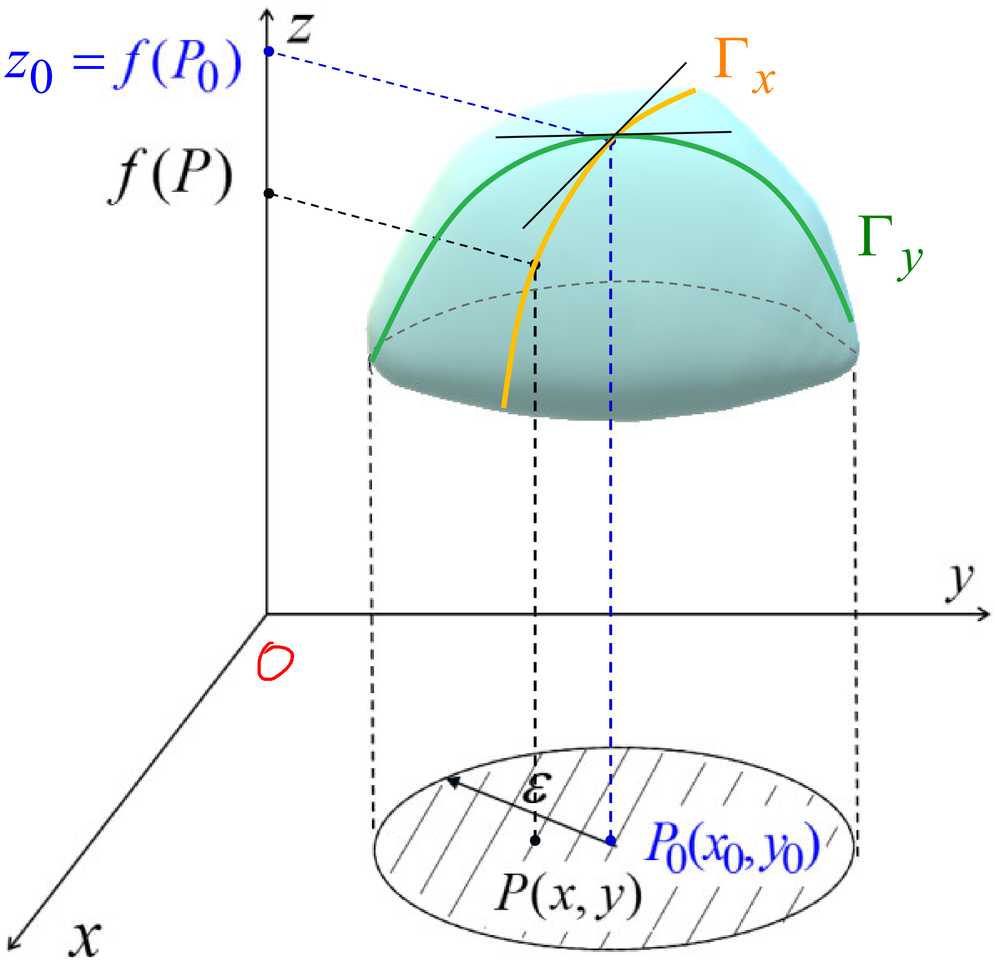
Необходимое условие экстремума Ф2П

Теорема 3. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P_0)$, дифференцируема в точке $P_0(x_0, y_0)$ и точка $P_0(x_0, y_0)$ − **точка локального экстремума**.

Тогда частные производные функции $z = f(x, y)$ в точке P_0 равны нулю:

$$\frac{\partial f\left(P_0\right)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f\left(P_0\right)}{\partial y} = 0 \ \left(\text{т.е. } dz(P_0) = 0\right)$$

Геометрическое доказательство теоремы 3



Γ_x – *график кривой*

$z = f(x, y_0)$

Γ_y – *график кривой*

$z = f(x_0, y)$

$x = x_0$ – точка *locextr* для функции $z = f(x, y_0) \Rightarrow$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = 0$$

$y = y_0$ – точка *locextr* для функции $z = f(x_0, y) \Rightarrow$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = 0$$

Геометрический смысл необходимого условия экстремума Ф2П

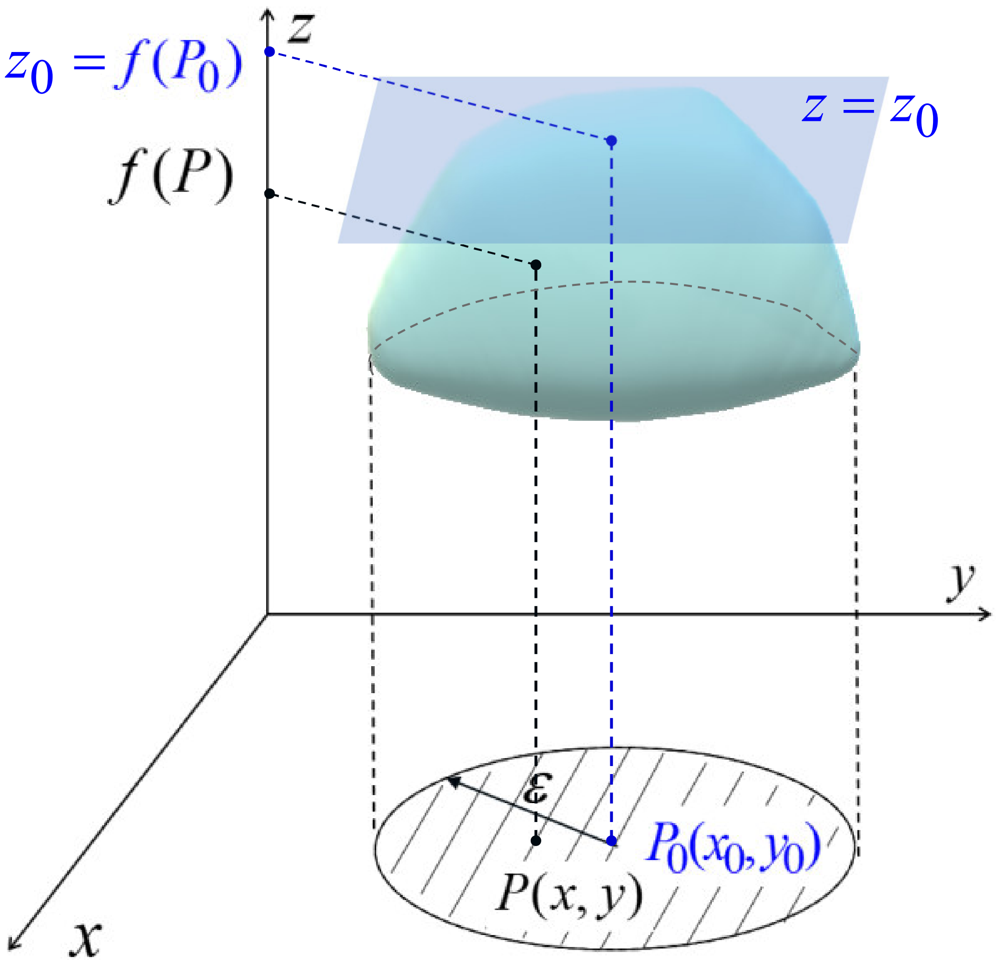
<u>Утверждение.</u> Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P_0)$, дифференцируема в точке $P_0(x_0, y_0)$ и точка $P_0(x_0, y_0)$ − **точка локального экстремума**.

Тогда уравнение касательной к поверхности $z = f(x, y)$ в точке P_0 задается уравнением $z = z_0$:

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}(y - y_0)$$

$$z - z_0 = 0 \cdot (x - x_0) + 0 \cdot (y - y_0)$$

Геометрическая интерпретация теоремы 3 (иллюстрация)



В точках локального экстремума дифференцируемой Ф2П касательная плоскость параллельна плоскости Oxy

Необходимое условие экстремума Ф2П

<u>Точки возможного экстремума Ф2П:</u>

- точки, в которых $dz = 0$ (**стационарные**)
- точки, в которых функция $z = f(x, y)$ не дифференцируема.

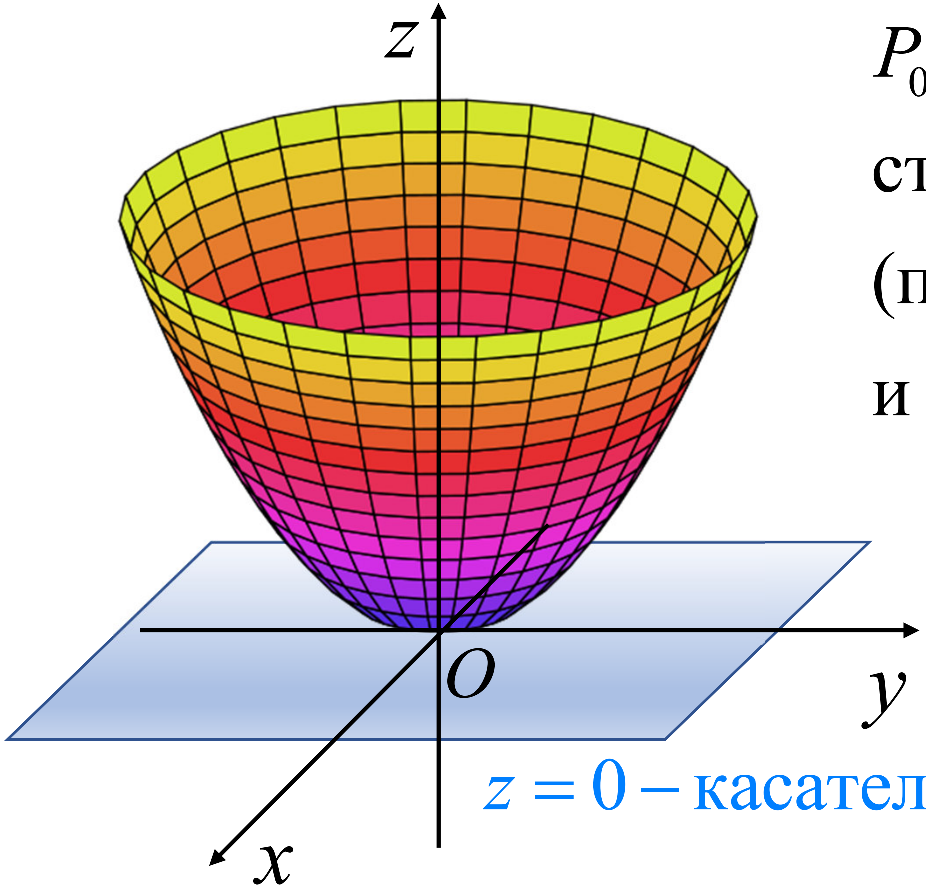
Необходимое условие экстремума Ф2П
Пример 3

<u>Пример 3.</u> Найти стационарные точки функции $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \Rightarrow P_0(0,0) - \\ \textit{стационарная}\ \text{точка} \end{array}$$

Необходимое условие экстремума Ф2П
Пример 3



$P_0(0,0) = O -$ стационарная точка (по определению) и точка $loc\min$

$z = 0 -$ касательная плоскость

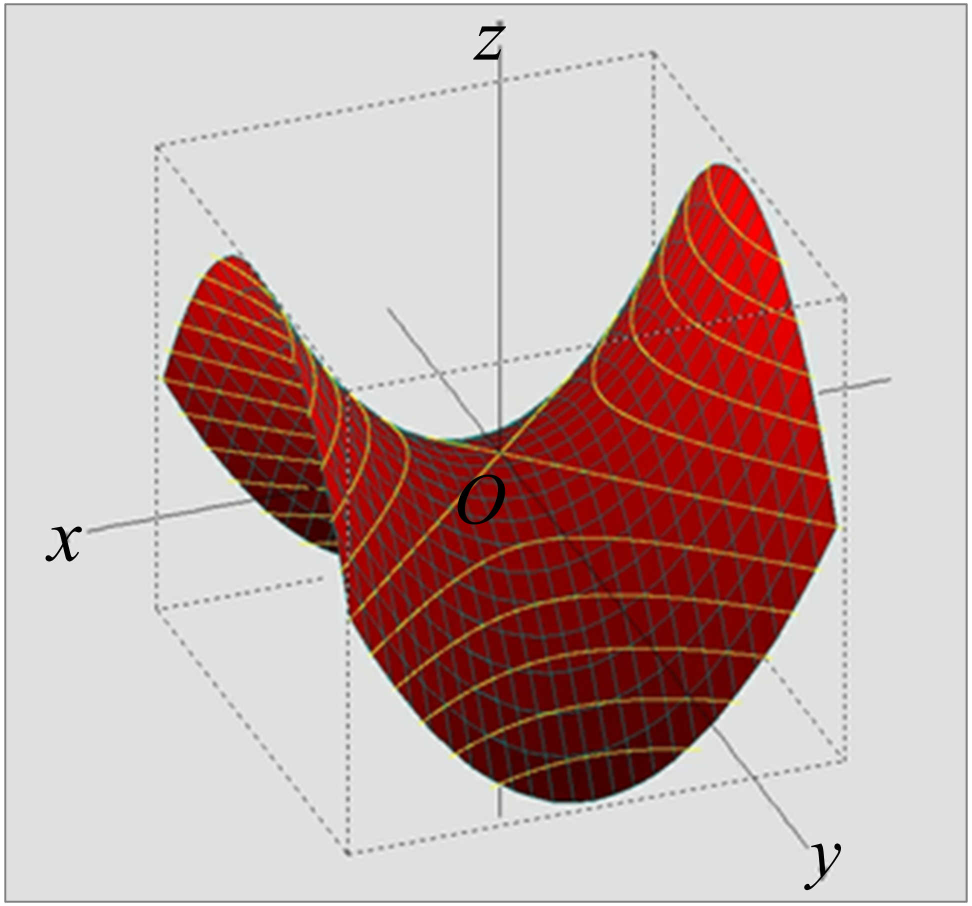
Необходимое условие экстремума Ф2П
Пример 4

Пример 3. Найти стационарные точки функции $z = f(x, y) = x^2 - y^2$.

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right| \Rightarrow P_0(0,0) - \textit{стационарная} \text{ точка}$$

Необходимое условие экстремума Ф2П
Пример 4



$P_0(0,0) = O$ – стационарная точка, которая не является точкой *locextr*

Необходимое условие экстремума для Ф2П не является достаточным!

Достаточное условие экстремума Ф2П через второй дифференциал

Теорема 4. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P_0)$ и ее вторые производные непрерывны в $O(P_0)$.

Тогда для любых dx, dy одновременно не равных нулю (т.е. таких, что $dx^2 + dy^2 \neq 0$) выполняется

Достаточное условие экстремума Ф2П через второй дифференциал

1). $d^2z(P_0) < 0$ (сохраняет знак «-»),
то P_0 - точка максимума,

2). $d^2z(P_0) > 0$ (сохраняет знак «+»),
то P_0 - точка минимума,

3). $d^2z(P_0)$ не сохраняет знака при изменении dx, dy,
то в точке P_0 нет экстремума.

Достаточное условие экстремума Ф2П через второй дифференциал. Док-во

$$\Delta z \approx dz\Big|_{P_0} + \frac{1}{2} d^2 z\Big|_{P_0} \text{ при } dx = \Delta x, dy = \Delta y \text{ (без док-ва)}$$

$$P_0 - \textit{стационарная} \Rightarrow dz\Big|_{P_0} = 0$$

$$\Downarrow$$

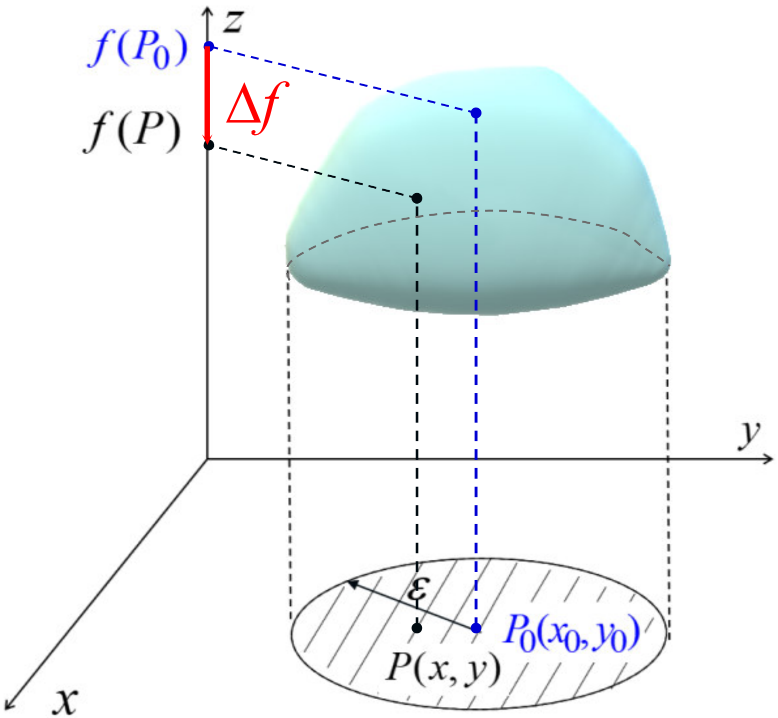
$$\Delta z < 0 \; (\Delta z > 0) \; \textit{для любых} \; \Delta x, \Delta y, \text{ т.ч. } \Delta x^2 + \Delta y^2 \neq 0,$$

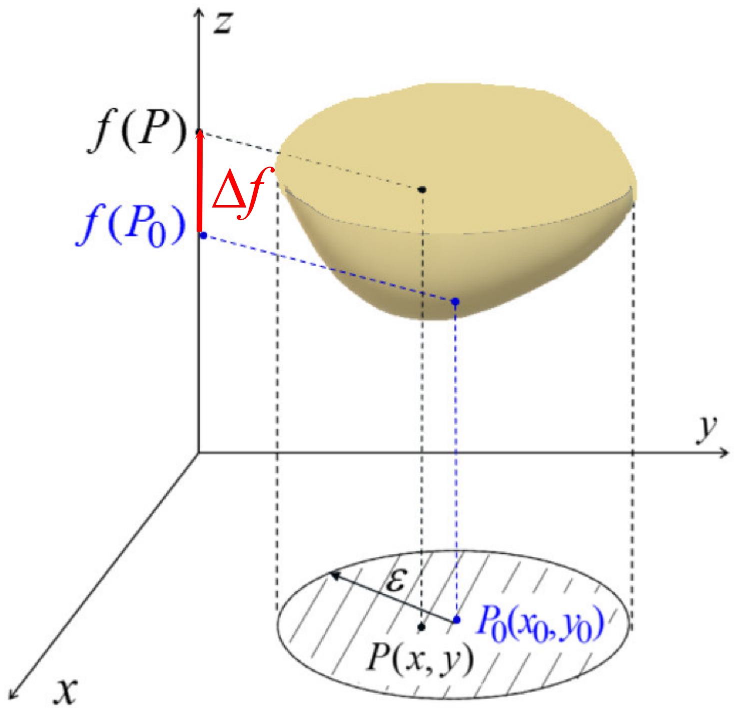
т.е. $P_0 -$ точка $loc \max$ $(loc \min)$ $\Leftrightarrow$

$$d^2 z\Big|_{P_0} < 0 \left(d^2 z\Big|_{P_0} > 0 \right) \textit{для любых} \; dx, dy, \text{т.ч. } dx^2 + dy^2 \neq 0$$

$\blacksquare$

Достаточное условие экстремума Ф2П через второй дифференциал





Необходимое условие экстремума Ф2П через второй дифференциал. Пример 5

Пример 5. Исследовать на локальный экстремум функцию $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ при помощи вторых дифференциалов

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_0} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_0} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \Rightarrow$$

Необходимое условие экстремума Ф2П через второй дифференциал. Пример 4

$P_0(0,0) - \textit{стационарная}$ точка

$$d^2z\Big|_{P_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= 2dx^2 + 2dy^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow d^2z\Big|_{P_0} > 0$ для любых $dx, dy,$ одновременно

не равных нулю $\Rightarrow$ $P_0(0,0) -$ т. locmin

Необходимое условие экстремума Ф2П через второй дифференциал. Пример 6

<u>Пример 6.</u> Исследовать на локальный экстремум функцию $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ при помощи вторых дифференциалов

$P_0(0,0) -$ *стационарная* точка

$$d^2z\Big|_{P_0} = 2dx^2 - 2dy^2 \Rightarrow$$

$d^2z|_{P_0}$ не сохраняет знака при изменении знака dx, $dy \Rightarrow P_0$ не является точкой locextr.

Достаточное условие экстремума Ф2П через вторые производные

<u>Теорема 5.</u> Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P_0)$, ее вторые производные непрерывны в $O(P_0)$ и

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix},$$

где $A = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right|_{P_0} (P_0),\ B = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{P_0},\ C = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right|_{P_0}$ и точка $P_0 -$ стационарная точка. Тогда

- P_0 – точка максимума, если $\Delta > 0$, $A < 0$;
- P_0 – точка минимума, если $\Delta > 0$, $A > 0$;
- в точке P_0 экстремума нет, если $\Delta < 0$;
- требуется дополнит. исследование, если $\Delta = 0$.

Необходимое условие экстремума Ф2П через второй дифференциал. Пример 7

Пример 7. Исследовать на локальный экстремум функцию $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ при помощи вторых производных.

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_0} = 2,\ C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_0} = 2,$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{P_0} = 0 \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta > 0\ ,\ A > 0 \Rightarrow P_0(0,0) - \text{ точка locmin}$$

Необходимое условие экстремума Ф2П через второй дифференциал. Пример 8

Пример 8. Исследовать на локальный экстремум функцию $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ при помощи вторых производных.

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 \Rightarrow A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_0} = 2,\ C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_0} = -2,$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{P_0} = 0 \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$\Delta < 0 \Rightarrow P_0(0,0)$ – не является точкой locextr