

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 1

1. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

Найти его матрицу в базисе $\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Будет ли прямой суммой подпространств U и W , где $U = \langle a_1, a_2 \rangle$, $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0, -1)$, а W задано как множество всех решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0? \end{cases}$$

4. Дана система векторов: $a_1 = (6, 3, -7, 8, -6)$, $a_2 = (4, 3, 6, 2, -2)$, $a_3 = (4, 1, 1, -5, 6)$, $a_4 = (18, 12, 11, 14, -12)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

5. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов:

$$a_1 = (6, 1, 2, 3, -3), a_2 = (6, -4, 5, -8, -6), a_3 = (2, -6, 4, 1, -7);$$
$$b_1 = (3, -2, -4, -4, 4), b_2 = (14, -18, 11, -4, -32).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 2

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 - 4x_6 = 14; \\ -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 6; \\ 4x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 = 14. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Найти базис образа и базис ядра линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -6 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Дана система векторов: $a_1 = (1, 8, 3, -4, 2)$, $a_2 = (1, 8, 7, -2, 5)$, $a_3 = (3, -1, 7, -3, 6)$, $a_4 = (-4, 18, 0, 2, -2)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов:

$$a_1 = (14, 9, 2, 3, 13), a_2 = (7, 9, 4, 2, -3), a_3 = (4, -3, -4, 2, 9);$$

$$b_1 = (1, 2, 1, 2, 2), b_2 = (1, 3, 1, -1, 5).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $\vec{a}_1 = (8, -6, 7)$, $\vec{a}_2 = (-16, 7, -13)$, $\vec{a}_3 = (9, -3, 7)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе $\vec{b}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{b}_2 = (3, -1, 2)$, $\vec{b}_3 = (2, 1, 2)$.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 3

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = \alpha; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 = -3; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - 4x_5 = 1. \end{cases}$$

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (5, -4, -5, 5, -3)$, $a_2 = (4, -6, 5, -5, 5)$, $a_3 = (7, 6, -5, 4, 3)$, $a_4 = (-10, -18, 15, -13, -1)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов:

$$a_1 = (1, 1, 1, 0, 0), a_2 = (1, -1, 7, -6, -9), a_3 = (4, 1, -8, 5, -8);$$

$$b_1 = (1, -4, -6, 5, -4), b_2 = (5, 0, -1, -1, -17).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Найти базис образа и базис ядра линейного отображения, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 4

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + x_6 = -5; \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 - x_6 = 0; \\ -4x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 7x_5 + 2x_6 = -1. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (6, -2, -3, -4, 2)$, $a_2 = (4, 3, 6, -1, 5)$, $a_3 = (3, -1, 8, -1, -2)$, $a_4 = (1, 4, -2, 0, 7)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (1, 3, 4, -2, -3), a_2 = (1, 2, -1, -2, -3), a_3 = (3, 0, -3, -3, -4); \\ b_1 = (4, -7, -4, 0, -3), b_2 = (10, 5, 0, -14, -10).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Найти образы решений какой-нибудь фундаментальной системы для следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

относительно линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}?$$

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 5

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -1; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 1; \\ 2x_2 + 4x_3 + 3x_5 = \alpha \end{cases}$$

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (1, 6, -7, 4, -9)$, $a_2 = (1, -7, 9, -7, 2)$, $a_3 = (5, -4, 8, 1, 1)$, $a_4 = (2, -1, 2, -3, -7)$, $a_5 = (-4, -3, 1, -8, 1)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, \dots, a_k и b_1, \dots, b_m :

$$a_1 = (2, 0, -3, 5, -9), a_2 = (7, 1, -8, -6, -3), a_3 = (1, 5, 2, 8, 8);$$

$$b_1 = (6, -8, -5, 2, 3), b_2 = (10, 6, -18, 7, -8).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Доказать, что существует единственный линейный оператор, который переводит векторы $a_1 = (2, 0, 3)$, $a_2 = (4, 1, 5)$, $a_3 = (3, 1, 2)$ соответственно в векторы $b_1 = (1, 2, -1)$, $b_2 = (4, 5, -2)$, $b_3 = (1, -1, 1)$. Найти матрицу этого оператора в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 6

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 4x_5 - 2x_6 = -13; \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_5 + x_6 = -2; \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_4 + 4x_5 - 6x_6 = 10. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (7, 6, -7, -4, -4)$, $a_2 = (2, 1, -7, 4, -8)$, $a_3 = (7, -2, -8, -5, 8)$, $a_4 = (-17, 8, 10, 23, -40)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, \dots, a_k и b_1, \dots, b_m :

$$a_1 = (4, 3, 9, -1, -5), a_2 = (3, 4, 1, -3, -1), a_3 = (5, 6, -4, -2, 1);$$

$$b_1 = (3, 9, -4, 4, -3), b_2 = (12, 26, 6, -6, -5).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Будет ли оператор, который каждой строке (x_1, x_2, x_3, x_4) сопоставляет строку

$$(2x_1 + x_4, x_1 - x_2 + x_3 + x_4, 4x_1 + 3x_2 + x_3, -x_2 + x_3),$$

линейным? Если да, то найти его матрицу в базисе из строк единичной матрицы, образ и ядро.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 7

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 2; \\ -4x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = -12; \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4; \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = \alpha. \end{cases}$$

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (6, -2, -3, -4, 2)$, $a_2 = (4, 3, 6, -1, 5)$, $a_3 = (3, -1, 8, -1, -2)$, $a_4 = (10, 1, 3, -5, 7)$, $a_5 = (1, 4, -2, 0, 7)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (8, 5, -2, 1, -7), a_2 = (9, 1, 6, -5, -6), a_3 = (3, -8, -1, 8, 1);$$
$$b_1 = (9, -8, 6, 2, 3), b_2 = (20, -1, 3, 2, -12).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Будет ли оператор, который каждой строке (x_1, x_2, x_3, x_4) сопоставляет строку

$$(x_1 + x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, 4x_1 - 3x_2 - x_3, -2x_2 + 4x_3),$$

линейным? Если да, то найти его матрицу в базисе из строк единичной матрицы, образ и ядро.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 8

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 3x_5 + 4x_6 = -19; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 3x_5 - 2x_6 = -5; \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 + x_5 - 3x_6 = 4. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (6, 5, 7, -6, -9)$, $a_2 = (2, 5, -8, 8, -4)$, $a_3 = (6, 5, -1, 5, -1)$, $a_4 = (-14, -5, -13, 1, -5)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (1, -3, -1, 3, 3), a_2 = (7, 3, 5, 7, 2), a_3 = (3, 0, -8, -9, 8);$$

$$b_1 = (5, 3, 8, 9, -1), b_2 = (11, 0, -4, 1, 13).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Будет ли линейный оператор, заданный в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

линейным оператором простой структуры?

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 9

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -6; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 1; \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = \alpha; \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = -9. \end{cases}$$

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (5, -8, 1, 7, -4)$, $a_2 = (1, 2, -3, -8, -4)$, $a_3 = (1, -4, 1, -6, -4)$, $a_4 = (7, -4, -5, -9, -12)$, $a_5 = (-1, 10, -5, 4, 4)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (1, 0, 1, 0, 1), a_2 = (7, 6, 5, 4, 8), a_3 = (2, -2, -4, 0, 7);$$

$$b_1 = (8, -8, -5, 3, -6), b_2 = (9, 2, 1, 2, 15).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

Найти его матрицу в базисе $\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 10

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 - 3x_6 = -13; \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 + 3x_6 = -10; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_6 = 10. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Линейный оператор \mathcal{A} в стандартном базисе задан матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(x)$, его собственные значения и собственные векторы.

3. Дана система векторов: $a_1 = (5, 6, 7, -7, -7)$, $a_2 = (7, 2, 7, -6, -8)$, $a_3 = (5, -5, -7, -2, 8)$, $a_4 = (-3, 12, 21, -2, -24)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (4, -7, -9, -2, 8), a_2 = (7, 2, 1, -7, -9), a_3 = (1, -8, 8, -9, 6);$$

$$b_1 = (8, -2, -5, -8, 4), b_2 = (24, -13, 0, -36, 10).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Будет ли прямой суммой подпространств U и W , где $U = \langle a_1, a_2 \rangle$, $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0, -1)$, а W задано как множество всех решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0? \end{cases}$$

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 11

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0; \\ -4x_1 + x_2 - 3x_4 + x_5 = -5; \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = -7; \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = \alpha. \end{cases}$$

2. Линейный оператор \mathcal{A} в стандартном базисе задан матрицей $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 8 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Найти характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора \mathcal{A} . Является ли \mathcal{A} оператором простой структуры?

3. Дана система векторов: $a_1 = (6, -5, -7, -6, -1)$, $a_2 = (6, -7, 0, 0, -8)$, $a_3 = (4, -3, 2, -8, 3)$, $a_4 = (2, -4, -2, 8, -11)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, \dots, a_k и b_1, \dots, b_m :

$$a_1 = (7, -1, 8, -9, -6), a_2 = (6, -7, -4, 6, -4), a_3 = (2, 5, 6, 6, -6); \\ b_1 = (1, -3, -6, 0, 4), b_2 = (15, -6, 10, 6, -16).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $\vec{a}_1 = (8, -6, 7)$, $\vec{a}_2 = (-16, 7, -13)$, $\vec{a}_3 = (9, -3, 7)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе $\vec{b}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{b}_2 = (3, -1, 2)$, $\vec{b}_3 = (2, 1, 2)$.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 12

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -3x_1 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 2x_6 = -6; \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_6 = -3; \\ x_2 - 4x_3 - 3x_4 + x_5 - 4x_6 = 3. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Линейный оператор \mathcal{A} в стандартном базисе задан матрицей $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти его характеристический многочлен, собственные значения и собственные векторы. Является ли \mathcal{A} оператором простой структуры?

3. Дана система векторов: $a_1 = (8, 0, -5, 3, -6)$, $a_2 = (5, 6, 3, -1, 1)$, $a_3 = (1, 2, -3, 4, -1)$, $a_4 = (7, 6, 15, -14, 5)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (6, -5, -8, -8, 3), a_2 = (3, 7, 9, -5, -3), a_3 = (9, -3, -5, 2, -6);$$

$$b_1 = (6, -1, -6, 6, 4), b_2 = (18, -2, -8, -11, -12).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Найти базис образа и базис ядра линейного отображения, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 13

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 4; \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -6; \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = \alpha. \end{cases}$$

2. Линейный оператор \mathcal{A} в стандартном базисе задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Найти его характеристический многочлен, собственные значения и собственные векторы. Является ли \mathcal{A} оператором простой структуры?

3. Дана система векторов: $a_1 = (3, 5, 5, -4, -9)$, $a_2 = (4, 0, 8, -5, -5)$, $a_3 = (8, 2, -8, 9, 8)$, $a_4 = (11, 5, 21, -14, -19)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (1, 0, 1, 0, 1), a_2 = (1, 4, -1, 7, -7), a_3 = (9, 8, 4, -2, 6);$$

$$b_1 = (8, 4, -8, 6, 1), b_2 = (10, 12, 6, 10, -1).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Найти образы решений какой-нибудь фундаментальной системы для следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

относительно линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}?$$

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 14

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 - 4x_6 = -10; \\ -x_1 + x_4 - 3x_5 - 4x_6 = 3; \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 + x_6 = 14. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (6, 3, -7, 8, -6)$, $a_2 = (4, 3, 6, 2, -2)$, $a_3 = (4, 1, 1, -5, 6)$, $a_4 = (18, 12, 11, 14, -12)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов:

$$a_1 = (6, 1, 2, 3, -3), a_2 = (6, -4, 5, -8, -6), a_3 = (2, -6, 4, 1, -7);$$
$$b_1 = (3, -2, -4, -4, 4), b_2 = (14, -18, 11, -4, -32).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Доказать, что существует единственный линейный оператор, который переводит векторы $a_1 = (2, 0, 3)$, $a_2 = (4, 1, 5)$, $a_3 = (3, 1, 2)$ соответственно в векторы $b_1 = (1, 2, -1)$, $b_2 = (4, 5, -2)$, $b_3 = (1, -1, 1)$. Найти матрицу этого оператора в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 15

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 4; \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -7; \\ 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = \alpha. \end{cases}$$

2. Найти базис образа и базис ядра линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -6 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Дана система векторов: $a_1 = (1, 8, 3, -4, 2)$, $a_2 = (1, 8, 7, -2, 5)$, $a_3 = (3, -1, 7, -3, 6)$, $a_4 = (-4, 18, 0, 2, -2)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов:

$$a_1 = (14, 9, 2, 3, 13), a_2 = (7, 9, 4, 2, -3), a_3 = (4, -3, -4, 2, 9);$$

$$b_1 = (1, 2, 1, 2, 2), b_2 = (1, 3, 1, -1, 5).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Будет ли оператор, который каждой строке (x_1, x_2, x_3, x_4) сопоставляет строку

$$(2x_1 + x_4, x_1 - x_2 + x_3 + x_4, 4x_1 + 3x_2 + x_3, -x_2 + x_3),$$

линейным? Если да, то найти его матрицу в базисе из строк единичной матрицы, образ и ядро.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 16

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 3x_5 + 2x_6 = -2; \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 = -7. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (5, -4, -5, 5, -3)$, $a_2 = (4, -6, 5, -5, 5)$, $a_3 = (7, 6, -5, 4, 3)$, $a_4 = (-10, -18, 15, -13, -1)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов:

$$a_1 = (1, 1, 1, 0, 0), a_2 = (1, -1, 7, -6, -9), a_3 = (4, 1, -8, 5, -8);$$

$$b_1 = (1, -4, -6, 5, -4), b_2 = (5, 0, -1, -1, -17).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Будет ли оператор, который каждой строке (x_1, x_2, x_3, x_4) сопоставляет строку

$$(x_1 + x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, 4x_1 - 3x_2 - x_3, -2x_2 + 4x_3),$$

линейным? Если да, то найти его матрицу в базисе из строк единичной матрицы, образ и ядро.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 17

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 - x_5 = \alpha; \\ -4x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 = -6; \\ -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - 4x_5 = \alpha; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 10. \end{cases}$$

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (6, -2, -3, -4, 2)$, $a_2 = (4, 3, 6, -1, 5)$, $a_3 = (3, -1, 8, -1, -2)$, $a_4 = (1, 4, -2, 0, 7)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (1, 3, 4, -2, -3), a_2 = (1, 2, -1, -2, -3), a_3 = (3, 0, -3, -3, -4);$$

$$b_1 = (4, -7, -4, 0, -3), b_2 = (10, 5, 0, -14, -10).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Будет ли линейный оператор, заданный в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

линейным оператором простой структуры?

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 18

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 3x_5 + 4x_6 = -10; \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 4x_5 + x_6 = -14; \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_5 + 3x_6 = 6. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (1, 6, -7, 4, -9)$, $a_2 = (1, -7, 9, -7, 2)$, $a_3 = (5, -4, 8, 1, 1)$, $a_4 = (2, -1, 2, -3, -7)$, $a_5 = (-4, -3, 1, -8, 1)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, \dots, a_k и b_1, \dots, b_m :

$$a_1 = (2, 0, -3, 5, -9), a_2 = (7, 1, -8, -6, -3), a_3 = (1, 5, 2, 8, 8);$$

$$b_1 = (6, -8, -5, 2, 3), b_2 = (10, 6, -18, 7, -8).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

Найти его матрицу в базисе $\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 19

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} -2x_2 - 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -2; \\ -x_1 + x_3 = 0; \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -10; \\ -x_1 - 4x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = \alpha \end{cases}$$

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (7, 6, -7, -4, -4)$, $a_2 = (2, 1, -7, 4, -8)$, $a_3 = (7, -2, -8, -5, 8)$, $a_4 = (-17, 8, 10, 23, -40)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, \dots, a_k и b_1, \dots, b_m :

$$a_1 = (4, 3, 9, -1, -5), a_2 = (3, 4, 1, -3, -1), a_3 = (5, 6, -4, -2, 1);$$
$$b_1 = (3, 9, -4, 4, -3), b_2 = (12, 26, 6, -6, -5).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Будет ли прямой суммой подпространств U и W , где $U = \langle a_1, a_2 \rangle$, $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0, -1)$, а W задано как множество всех решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0? \end{cases}$$

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 20

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 3x_6 = -10; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 4x_5 + 2x_6 = -15; \\ -4x_3 + x_4 - 3x_5 - x_6 = -11. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (6, -2, -3, -4, 2)$, $a_2 = (4, 3, 6, -1, 5)$, $a_3 = (3, -1, 8, -1, -2)$, $a_4 = (10, 1, 3, -5, 7)$, $a_5 = (1, 4, -2, 0, 7)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (8, 5, -2, 1, -7), a_2 = (9, 1, 6, -5, -6), a_3 = (3, -8, -1, 8, 1);$$

$$b_1 = (9, -8, 6, 2, 3), b_2 = (20, -1, 3, 2, -12).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $\vec{a}_1 = (8, -6, 7)$, $\vec{a}_2 = (-16, 7, -13)$, $\vec{a}_3 = (9, -3, 7)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе $\vec{b}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{b}_2 = (3, -1, 2)$, $\vec{b}_3 = (2, 1, 2)$.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 21

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \\ -4x_1 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = \alpha; \\ -3x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -7. \end{cases}$$

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (6, 5, 7, -6, -9)$, $a_2 = (2, 5, -8, 8, -4)$, $a_3 = (6, 5, -1, 5, -1)$, $a_4 = (-14, -5, -13, 1, -5)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (1, -3, -1, 3, 3), a_2 = (7, 3, 5, 7, 2), a_3 = (3, 0, -8, -9, 8);$$

$$b_1 = (5, 3, 8, 9, -1), b_2 = (11, 0, -4, 1, 13).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Найти базис образа и базис ядра линейного отображения, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 22

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 - 2x_6 = 3; \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 = 2; \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 9. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (5, -8, 1, 7, -4)$, $a_2 = (1, 2, -3, -8, -4)$, $a_3 = (1, -4, 1, -6, -4)$, $a_4 = (7, -4, -5, -9, -12)$, $a_5 = (-1, 10, -5, 4, 4)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (1, 0, 1, 0, 1), a_2 = (7, 6, 5, 4, 8), a_3 = (2, -2, -4, 0, 7);$$

$$b_1 = (8, -8, -5, 3, -6), b_2 = (9, 2, 1, 2, 15).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Найти образы решений какой-нибудь фундаментальной системы для следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

относительно линейного оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}?$$

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 23

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 4x_5 = -6; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 = -8; \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = \alpha. \end{cases}$$

2. Линейный оператор \mathcal{A} в стандартном базисе задан матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(x)$, его собственные значения и собственные векторы.

3. Дана система векторов: $a_1 = (5, 6, 7, -7, -7)$, $a_2 = (7, 2, 7, -6, -8)$, $a_3 = (5, -5, -7, -2, 8)$, $a_4 = (-3, 12, 21, -2, -24)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (4, -7, -9, -2, 8), a_2 = (7, 2, 1, -7, -9), a_3 = (1, -8, 8, -9, 6);$$

$$b_1 = (8, -2, -5, -8, 4), b_2 = (24, -13, 0, -36, 10).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Доказать, что существует единственный линейный оператор, который переводит векторы $a_1 = (2, 0, 3)$, $a_2 = (4, 1, 5)$, $a_3 = (3, 1, 2)$ соответственно в векторы $b_1 = (1, 2, -1)$, $b_2 = (4, 5, -2)$, $b_3 = (1, -1, 1)$. Найти матрицу этого оператора в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 24

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 4x_6 = 2; \\ -4x_1 + 4x_2 - x_3 - 4x_4 - 4x_5 - x_6 = -11; \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = -9. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Линейный оператор \mathcal{A} в стандартном базисе задан матрицей $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 8 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Найти характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора \mathcal{A} . Является ли \mathcal{A} оператором простой структуры?

3. Дана система векторов: $a_1 = (6, -5, -7, -6, -1)$, $a_2 = (6, -7, 0, 0, -8)$, $a_3 = (4, -3, 2, -8, 3)$, $a_4 = (2, -4, -2, 8, -11)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, \dots, a_k и b_1, \dots, b_m :

$$a_1 = (7, -1, 8, -9, -6), a_2 = (6, -7, -4, 6, -4), a_3 = (2, 5, 6, 6, -6);$$

$$b_1 = (1, -3, -6, 0, 4), b_2 = (15, -6, 10, 6, -16).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Будет ли оператор, который каждой строке (x_1, x_2, x_3, x_4) сопоставляет строку

$$(2x_1 + x_4, x_1 - x_2 + x_3 + x_4, 4x_1 + 3x_2 + x_3, -x_2 + x_3),$$

линейным? Если да, то найти его матрицу в базисе из строк единичной матрицы, образ и ядро.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 25

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} -4x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_5 = -5; \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_5 = \alpha; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1; \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = -1. \end{cases}$$

2. Линейный оператор \mathcal{A} в стандартном базисе задан матрицей $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти его характеристический многочлен, собственные значения и собственные векторы. Является ли \mathcal{A} оператором простой структуры?

3. Дана система векторов: $a_1 = (8, 0, -5, 3, -6)$, $a_2 = (5, 6, 3, -1, 1)$, $a_3 = (1, 2, -3, 4, -1)$, $a_4 = (7, 6, 15, -14, 5)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (6, -5, -8, -8, 3), a_2 = (3, 7, 9, -5, -3), a_3 = (9, -3, -5, 2, -6);$$

$$b_1 = (6, -1, -6, 6, 4), b_2 = (18, -2, -8, -11, -12).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Будет ли оператор, который каждой строке (x_1, x_2, x_3, x_4) сопоставляет строку

$$(x_1 + x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4, 4x_1 - 3x_2 - x_3, -2x_2 + 4x_3),$$

линейным? Если да, то найти его матрицу в базисе из строк единичной матрицы, образ и ядро.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 26

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 + 4x_6 = 3; \\ 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 = -4; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 19. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Линейный оператор \mathcal{A} в стандартном базисе задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

Найти его характеристический многочлен, собственные значения и собственные векторы. Является ли \mathcal{A} оператором простой структуры?

3. Дана система векторов: $a_1 = (3, 5, 5, -4, -9)$, $a_2 = (4, 0, 8, -5, -5)$, $a_3 = (8, 2, -8, 9, 8)$, $a_4 = (11, 5, 21, -14, -19)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (1, 0, 1, 0, 1), a_2 = (1, 4, -1, 7, -7), a_3 = (9, 8, 4, -2, 6);$$

$$b_1 = (8, 4, -8, 6, 1), b_2 = (10, 12, 6, 10, -1).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Будет ли линейный оператор, заданный в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

линейным оператором простой структуры?

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 27

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 1; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = \alpha; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 9. \end{cases}$$

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (6, 3, -7, 8, -6)$, $a_2 = (4, 3, 6, 2, -2)$, $a_3 = (4, 1, 1, -5, 6)$, $a_4 = (18, 12, 11, 14, -12)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов:

$$a_1 = (6, 1, 2, 3, -3), a_2 = (6, -4, 5, -8, -6), a_3 = (2, -6, 4, 1, -7);$$

$$b_1 = (3, -2, -4, -4, 4), b_2 = (14, -18, 11, -4, -32).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

Найти его матрицу в базисе $\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 28

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 - 4x_6 = 14; \\ -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 6; \\ 4x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 = 14. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Найти базис образа и базис ядра линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -6 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Дана система векторов: $a_1 = (1, 8, 3, -4, 2)$, $a_2 = (1, 8, 7, -2, 5)$, $a_3 = (3, -1, 7, -3, 6)$, $a_4 = (-4, 18, 0, 2, -2)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов:

$$a_1 = (14, 9, 2, 3, 13), a_2 = (7, 9, 4, 2, -3), a_3 = (4, -3, -4, 2, 9);$$

$$b_1 = (1, 2, 1, 2, 2), b_2 = (1, 3, 1, -1, 5).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Будет ли прямой суммой подпространств U и W , где $U = \langle a_1, a_2 \rangle$, $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 0, -1)$, а W задано как множество всех решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0? \end{cases}$$

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 29

1. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α :

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = \alpha; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 = -3; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - 4x_5 = 1. \end{cases}$$

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (5, -4, -5, 5, -3)$, $a_2 = (4, -6, 5, -5, 5)$, $a_3 = (7, 6, -5, 4, 3)$, $a_4 = (-10, -18, 15, -13, -1)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов:

$$a_1 = (1, 1, 1, 0, 0), a_2 = (1, -1, 7, -6, -9), a_3 = (4, 1, -8, 5, -8);$$

$$b_1 = (1, -4, -6, 5, -4), b_2 = (5, 0, -1, -1, -17).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Линейный оператор \mathcal{A} в базисе $\vec{a}_1 = (8, -6, 7)$, $\vec{a}_2 = (-16, 7, -13)$, $\vec{a}_3 = (9, -3, 7)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе $\vec{b}_1 = (1, -2, 1)$, $\vec{b}_2 = (3, -1, 2)$, $\vec{b}_3 = (2, 1, 2)$.

Контрольная работа № 2 по линейной алгебре

Семестр II, физический факультет, дневное отделение

Вариант № 30

1. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + x_6 = -5; \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 - x_6 = 0; \\ -4x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 7x_5 + 2x_6 = -1. \end{cases}$$

Убедившись, что система совместна, найти ее общее решение и два частных решения. Найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений и указать связь между множествами решений исходной системы и соответствующей однородной системы.

2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Дана система векторов: $a_1 = (6, -2, -3, -4, 2)$, $a_2 = (4, 3, 6, -1, 5)$, $a_3 = (3, -1, 8, -1, -2)$, $a_4 = (1, 4, -2, 0, 7)$. Будет ли эта система линейно зависимой? Найти ее ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему. Найти также какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов.

4. Даны линейные подпространства U и W , порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 :

$$a_1 = (1, 3, 4, -2, -3), a_2 = (1, 2, -1, -2, -3), a_3 = (3, 0, -3, -3, -4);$$

$$b_1 = (4, -7, -4, 0, -3), b_2 = (10, 5, 0, -14, -10).$$

Найти базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$.

5. Найти базис образа и базис ядра линейного отображения, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$