§ 10. Нильпотентные операторы

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

10.1. Жорданова нормальная форма матрицы

Во многих приложениях линейной алгебры важно найти базис, в котором матрица данного оператора выглядит как можно более просто. Одной из причин, приводящих к этой задаче, является часто возникающая необходимость вычислять произвольную степень квадратной матрицы, являющейся матрицей некоторого линейного оператора. В общем случае это очень трудоемкая задача. Предположим теперь, что в исходном базисе F наш оператор имеет матрицу A, а в некотором другом базисе G — матрицу B. Тогда $A = T^{-1}BT$, где T — матрица перехода от базиса G к базису F, которую можно считать известной. В силу замечания 6.2 $A^k = T^{-1}B^kT$. Естественно считать, что если матрица B устроена просто, то ее степени тоже вычисляются просто. Таким образом, если мы найдем базис, в котором оператор будет иметь просто устроенную матрицу B, то для вычисления матрицы A^k надо будет вычислить матрицу B^k (что сделать легко) и затем умножить ее на T^{-1} слева и на T справа.

Естественно считать, что диагональные матрицы устроены очень просто. В частности, степени диагональных матриц вычисляются очень легко:

$$\text{если}\quad A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},\quad \text{то}\quad A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^k & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^k \end{pmatrix}.$$

Но, как мы видели в конце § 9, далеко не для всякого оператора можно подобрать базис, в котором его матрица диагональна.

В данном параграфе будут введены в рассмотрение достаточно просто устроенные матрицы, называемые матрицами, имеющими *жорданову нормальную форму*. В их число входят, в частности, все диагональные матрицы. Как будет показано в следующем параграфе, для всякого линейного оператора, удовлетворяющего некоторому не слишком обременительному дополнительному ограничению, существует базис (называемый *жордановым базисом* для данного оператора), в котором матрица этого оператора имеет жорданову нормальную форму. А в некоторых важных частных случаях (например, в векторных пространствах над полем $\mathbb{C}$) такой базис существует для произвольного линейного оператора.

Предварительные замечания (3)

Данный параграф носит подготовительный характер. В нем результат о приводимости матрицы оператора к жордановой нормальной форме будет доказан для некоторого частного, но важного типа операторов. И сам этот результат, и полученная в ходе его доказательства информация будут активно использоваться в следующем параграфе при рассмотрении общего случая.

Клетки Жордана. Жорданова нормальная форма матрицы

Определение

Квадратная матрица над полем F называется *клеткой Жордана*, если она имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in F$. Говорят, что квадратная матрица A имеет *жорданову нормальную форму*, если A — клеточно-диагональная матрица, в которой все диагональные клетки являются клетками Жордана. Матрицу, имеющую жорданову нормальную форму, будем для краткости называть *жордановой*.

- Всякая клетка Жордана и всякая жорданова матрица являются нижнетреугольными матрицами.
- Всякая диагональная матрица жорданова (все ее клетки Жордана имеют порядок 1).

10.2. Инвариантные подпространства

Введем одно вспомогательное понятие, которое неоднократно будет возникать в дальнейшем.

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V. Подпространство W пространства V называется *инвариантным относительно оператора* $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in W$ для всякого вектора $\mathbf{x} \in W$.

Ясно, что если подпространство W инвариантно относительно $\mathcal{A}$, то ограничение $\mathcal{A}$ на W можно рассматривать как линейный оператор в W.

Приведем примеры инвариантных подпространств.

Пример 1. Ясно, что все пространство V и его нулевое подпространство $\{\mathbf{0}\}$ инвариантны относительно любого линейного оператора.

Пример 2. Если V — векторное пространство над полем F, W — его произвольное подпространство, а $t \in F$, то W инвариантно относительно оператора растяжения в t раз (так как если $\mathbf{x} \in W$, то и $t\mathbf{x} \in W$).

Пример 3. Предположим, что векторное пространство V разлагается в прямую сумму подпространств M_1 и M_2, а $\mathcal{P}$ — оператор проектирования на подпространство M_1 параллельно M_2. Тогда подпространство M_1 инвариантно относительно $\mathcal{P}$ (так как если $\mathbf{x} \in M_1$, то $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \in M_1$).

Пример 4. Пространство многочленов степени $\leqslant n$ над полем F является инвариантным подпространством пространства всех многочленов над F относительно оператора дифференцирования, поскольку если $\deg f \leqslant n$, то $\deg f' \leqslant n - 1 < n$.

Если $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$, то, в силу замечания 3.6, объединение базисов подпространств $V_1, V_2, \ldots, V_k$ является базисом V.

Предложение 10.1

Пусть $\mathcal{H}$ — линейный оператор в векторном пространстве V и $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$, где $V_1, V_2, \ldots, V_k$ — ненулевые подпространства в V, инвариантные относительно $\mathcal{H}$. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$ обозначим через $\mathcal{H}_i$ ограничение оператора $\mathcal{H}$ на подпространство V_i, через P_i — некоторый базис пространства V_i, а через H_i — матрицу оператора $\mathcal{H}_i$ в базисе P_i. Тогда:

1) *матрица оператора $\mathcal{H}$ в базисе $P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_k$ пространства V имеет вид*

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & O & \cdots & O \\ O & H_2 & \cdots & O \\ \hdotsfor{4} \\ O & O & \cdots & H_k \end{pmatrix};$$

2) $\chi_{\mathcal{H}}(x) = \chi_{\mathcal{H}_1}(x) \cdot \chi_{\mathcal{H}_2}(x) \cdot \ldots \cdot \chi_{\mathcal{H}_k}(x)$.

Доказательство. 1) Для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$ положим $r_i = \dim V_i$. По условию $r_1, r_2, \ldots, r_k \neq 0$. Если $\mathbf{p}$ — вектор из базиса P_i, то $\mathcal{H}(\mathbf{p}) \in V_i$ (так как V_i инвариантно относительно $\mathcal{H}$). Следовательно, вектор $\mathcal{H}(\mathbf{p})$ имеет в базисе P координаты вида $(0, \ldots, 0, p_1, \ldots, p_{r_i}, 0, \ldots, 0)$, где число начальных нулей равно $r_1 + \cdots + r_{i-1}$, число конечных нулей — $r_{i+1} + \cdots + r_k$, а $(p_1, \ldots, p_{r_i})$ — координаты вектора $\mathcal{H}_i(\mathbf{p})$ в базисе P_i. Доказываемое утверждение вытекает теперь из определения матрицы линейного оператора в базисе.

2) Используя предложение 8.12 из курса «Основы алгебры», имеем

$$\chi_{\mathcal{H}}(x) = |H - xE| = \begin{vmatrix} H_1 - xE & O & \cdots & O \\ O & H_2 - xE & \cdots & O \\ \hdotsfor{4} \\ O & O & \cdots & H_k - xE \end{vmatrix} =$$

$$= |H_1 - xE| \cdot |H_2 - xE| \cdot \ldots \cdot |H_k - xE| =$$

$$= \chi_{\mathcal{H}_1}(x) \cdot \chi_{\mathcal{H}_2}(x) \cdot \ldots \cdot \chi_{\mathcal{H}_k}(x).$$

Предложение доказано. $\square$

В дальнейшем нам пригодится следующее простое наблюдение.

Замечание 10.1

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V над полем F, U — подпространство в V, а $\lambda \in F$. Подпространство U инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}+\lambda\mathcal{E}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in U$. Тогда

$$(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{E})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \lambda\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \lambda\mathbf{x}.$$

Учитывая, что $\lambda\mathbf{x} \in U$, получаем, что $(\mathcal{A}+\lambda\mathcal{E})(\mathbf{x}) \in U$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in U$. $\square$

10.3. Приведение нильпотентных операторов к жордановой нормальной форме

Определение

Будем говорить, что линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве V *приводим к жордановой нормальной форме*, если существует базис пространства V, в котором матрица этого оператора жорданова. Эту жорданову матрицу (если она существует) будем называть *жордановой нормальной формой оператора* $\mathcal{A}$.

Введем в рассмотрение важный тип операторов.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{N}$ в векторном пространстве V называется *нильпотентным*, если существует натуральное число m такое, что $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$. Наименьшее натуральное число с таким свойством называется *ступенью нильпотентности* оператора $\mathcal{N}$.

Например, оператор дифференцирования в пространстве $F_n[x]$ нильпотентен, поскольку если f — многочлен степени $\leqslant n$ над полем F, то $f^{(n+1)} = 0$. При этом, как видно из замечания 12.4 из курса «Основы алгебры», если char $F = 0$, то ступень нильпотентности этого оператора

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 10.1

Пусть $\mathcal{N}$ — нильпотентный линейный оператор в векторном пространстве V. Тогда:

1) *существует базис P пространства V, в котором матрица этого оператора жорданова;*
2) *во всех диагональных клетках матрицы оператора $\mathcal{N}$ в базисе P на главной диагонали стоит 0;*
3) *если оператор $\mathcal{N}$ имеет жорданову нормальную форму в двух различных базисах, то матрицы оператора $\mathcal{N}$ в этих базисах могут отличаться только порядком следования клеток Жордана на главной диагонали.*

Для доказательства этой теоремы нам придется проделать большую предварительную работу.

На протяжени всего доказательства теоремы 10.1 *обозначения* $\mathcal{N}$ *и* V *имеют тот же смысл, что в формулировке этой теоремы, через* F *обозначается поле скаляров пространства* V*, а через* m *— ступень нильпотентности оператора* $\mathcal{N}$*.*

Ключевую роль в доказательстве теоремы 10.1 играет следующее понятие.

Определение

Упорядоченный набор векторов $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ называется *нильслоем* относительно оператора $\mathcal{N}$, если $\mathcal{N}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_{i+1}$ для всякого $i = 0, 1, \ldots, k-1$, $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$ и $\mathcal{N}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$. *Длиной нильслоя* называется число векторов в нем.

Начиная с произвольного ненулевого вектора $\mathbf{v}$, можно построить нильслой, полагая $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1 = \mathcal{N}(\mathbf{v}_0)$, ..., $\mathbf{v}_i = \mathcal{N}(\mathbf{v}_{i-1}) = \mathcal{N}^i(\mathbf{v})$, ... — до первого появления нулевого вектора. Поскольку $\mathcal{N}^m(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ для любого $\mathbf{v} \in V$, нулевой вектор при этом обязательно появится. Этот процесс построения нильслоя мы будем иногда называть *вытягиванием нильслоя* из данного вектора.

Из равенства $\mathcal{N}^m(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ вытекает, что

- *длина любого нильслоя не превосходит* m*.*

Схема доказательства пп. 1) и 2) основной теоремы о нильпотентных операторах (1)

Доказательство пп. 1) и 2) теоремы 10.1 основывается на следующих трех утверждениях.

Лемма 10.1

Подпространство пространства V, порожденное некоторым нильслоем, инвариантно относительно $\mathcal{N}$.

Лемма 10.2

Если W — подпространство пространства V, порожденное некоторым нильслоем, то существует базис пространства W, в котором матрица ограничения оператора $\mathcal{N}$ на W является жордановой клеткой с 0 на главной диагонали.

Лемма 10.3

Пространство V является прямой суммой конечного числа своих подпространств, каждое из которых порождено некоторым нильслоем.

Схема доказательства пп. 1) и 2) основной теоремы о нильпотентных операторах (2)

Покажем, как из этих трех лемм вытекают пп. 1) и 2) теоремы 10.1. В силу леммы 10.3 пространство V является прямой суммой подпространств, каждое из которых порождено некоторым нильслоем. Согласно лемме 10.2, каждое из этих подпространств имеет базис, в котором матрица ограничения оператора $\mathcal{N}$ на это подпространство является жордановой клеткой с 0 на главной диагонали. Требуемые утверждения вытекают теперь из п. 1) предложения 10.1 и леммы 10.1.

Доказательство леммы 10.1. Пусть W — подпространство пространства V, порожденное нильслоем $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, и $\mathbf{x} \in W$. Тогда $\mathbf{x} = t_0\mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + t_k\mathbf{v}_k$ для некоторых скаляров $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\mathbf{x}) &= \mathcal{N}(t_0\mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + t_k\mathbf{v}_k) = \\ &= t_0\mathcal{N}(\mathbf{v}_0) + t_1\mathcal{N}(\mathbf{v}_1) + \dots + t_{k-1}\mathcal{N}(\mathbf{v}_{k-1}) + t_k\mathcal{N}(\mathbf{v}_k) = \\ &= t_0\mathbf{v}_1 + t_1\mathbf{v}_2 + \dots + t_{k-1}\mathbf{v}_k + t_k \cdot \mathbf{0} \in W.\end{aligned}$$

Следовательно, подпространство W инвариантно относительно $\mathcal{N}$. $\square$

Для доказательства леммы 10.2 нам пригодится следующая

Лемма 10.4

Всякий нильслой линейно независим.

Доказательство. Предположим, что $t_0\mathbf{v}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + \dots + t_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ для некоторых $t_0, t_1, \dots, t_k \in F$, причем $t_i \neq 0$ для некоторого $0 \leqslant i \leqslant k$. Будем считать, что i — наименьший индекс с таким свойством. Тогда выполнено равенство $t_i\mathbf{v}_i + t_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \dots + t_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Подействуем на обе части этого равенства оператором $\mathcal{N}^{k-i}$. Поскольку $\mathcal{N}^{k-i}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_k$, а если $j > i$, то

$$\mathcal{N}^{k-i}(\mathbf{v}_j) = \mathcal{N}^{j-i}(\mathcal{N}^{k-j}(\mathbf{v}_j)) = \mathcal{N}^{j-i}(\mathbf{v}_k) = \mathcal{N}^{j-i-1}(\mathcal{N}(\mathbf{v}_k)) = \mathcal{N}^{j-i-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

мы получим $t_i\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Но это не так, поскольку $t_i \neq 0$ и $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$. Следовательно, векторы $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ линейно независимы. □

Доказательство леммы 10.2. Пусть W — подпространство пространства V, порожденное нильслоем $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. В силу леммы 10.4 этот нильслой линейно независим. Таким образом, набор векторов $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ является линейно независимой системой образующих, т. е. базисом пространства W. Поскольку $\mathcal{N}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_{i+1}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, k-1$ и $\mathcal{N}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$, мы получаем, что оператор $\mathcal{N}|_W$ имеет в базисе $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 10.2 доказана. $\square$

- Как видно из доказательства леммы 10.2, базис, в котором матрица оператора $\mathcal{N}|_W$ является жордановой клеткой, есть не что иное, как нильслой, порождающий подпространство W.

Для доказательства леммы 10.3 нам понадобится ряд новых понятий и результатов.

Определение

Система векторов называется *жордановой системой* относительно оператора $\mathcal{N}$, если она состоит из нильслоев, следующих один за другим. *Жордановой таблицей* относительно оператора $\mathcal{N}$ называется такая запись жордановой системы, в которой нильслои записаны друг под другом и выровнены по правому краю.

Определение

Элементарными преобразованиями жордановой таблицы называются следующие действия:

1) прибавление («повекторное») ко всем векторам одной строки соответствующих векторов другой, не менее длинной, строки;
2) умножение всех векторов одной строки на ненулевой элемент из F;
3) перестановка строк.

При этом, если в результате выполнения преобразования 1) в некоторой строке появляются нулевые векторы, то **обязательно** выполняются следующие действия:

- если появляется строка, состоящая из нулевых векторов, то она вычеркивается из таблицы;
- если появляется строка, в которой есть как ненулевые, так и нулевые векторы, то из нее вычеркиваются все нулевые векторы, стоящие после последнего ненулевого вектора, после чего строка выравнивается с другими по правому краю, т. е. сдвигается вправо так, чтобы ее последний вектор оказался в последнем столбце таблицы.

Если в результате наших действий в строке появится нулевой вектор, то и все идущие за ним в этой строке векторы будут нулевыми. В самом деле, в исходной жордановой таблице в каждой строке каждый следующий вектор получается применением оператора $\mathcal{N}$ к предыдущему. Элементарные преобразования таблицы сохраняют это свойство. Остается учесть, что $\mathcal{N}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Поэтому применение преобразования 1) (с указанными на предыдущем слайде дополнительными действиями) всегда приводит к удалению из таблицы всех нулевых векторов, если они возникают. Следовательно, справедливо

Замечание 10.2

После применения к жордановой таблице элементарных преобразований получается снова жорданова таблица. □

Лемма 10.5

Жорданова система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима система, состоящая из векторов последнего столбца соответствующей жордановой таблицы.

Доказательство. *Необходимость* вытекает из леммы 1.3.

Достаточность. Пусть жорданова система состоит из нильслоев $(\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \dots, \mathbf{v}_{1s_1})$, $(\mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}, \dots, \mathbf{v}_{2s_2})$, $\dots$, $(\mathbf{v}_{\ell 1}, \mathbf{v}_{\ell 2}, \dots, \mathbf{v}_{\ell s_\ell})$ и линейно зависима. Требуется доказать, что система $\mathbf{v}_{1s_1}, \mathbf{v}_{2s_2}, \dots, \mathbf{v}_{\ell s_\ell}$ также линейно зависима. Для удобства дальнейших рассуждений переобозначим векторы, входящие в жорданову систему: будем считать, что

$$\{\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \dots, \mathbf{v}_{1s_1}, \mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}, \dots, \mathbf{v}_{2s_2}, \dots, \mathbf{v}_{\ell 1}, \mathbf{v}_{\ell 2}, \dots, \mathbf{v}_{\ell s_\ell}\} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m\}.$$

По условию

$$t_1\mathbf{y}_1 + t_2\mathbf{y}_2 + \dots + t_m\mathbf{y}_m = \mathbf{0}, \qquad (1)$$

где по крайней мере один из коэффициентов $t_1, t_2, \dots, t_m$ отличен от нуля. Запишем векторы, входящие в нашу жорданову систему, в виде жордановой таблицы.

Выберем в этой таблице самый левый столбец с тем свойством, что по крайней мере один из векторов столбца входит в линейную комбинацию (1) с ненулевым коэффициентом. Обозначим номер этого столбца через j, а число столбцов в нашей жордановой таблице — через r. Для удобства будем считать, что j-й столбец состоит из векторов $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, ..., $\mathbf{y}_q$ для некоторого $q \leqslant m$ (если это не так, мы можем нужным образом перенумеровать векторы $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, ..., $\mathbf{y}_m$). Таким образом, по крайней мере один из коэффициентов $t_1, t_2, \ldots, t_q$ отличен от нуля. Подействуем на обе части равенства (1) оператором $\mathcal{N}^{r-j}$. Векторы, входящие в столбцы таблицы с номерами, большими j, перейдут в $\mathbf{0}$, векторы из j-го столбца перейдут в векторы из r-го столбца, а векторы, входящие в столбцы с номерами, меньшими j, входят в линейную комбинацию (1) с коэффициентом 0. В результате мы получим равенство вида

$$t_1\mathbf{z}_1 + t_2\mathbf{z}_2 + \cdots + t_q\mathbf{z}_q = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{z}_i = \mathcal{N}^{r-j}(\mathbf{y}_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, q$. Векторы $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_q$ входят в последний столбец нашей жордановой таблицы. Поскольку по крайней мере один из коэффициентов $t_1, t_2, \ldots, t_q$ отличен от нуля, в последнем столбце жордановой таблицы нашлась линейно зависимая подсистема. Следовательно, и весь последний столбец нашей таблицы линейно зависим.

Предложение 10.2

В пространстве V существует базис, являющийся жордановой системой относительно оператора $\mathcal{N}$.

Доказательство. Пусть $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ — произвольный базис пространства V. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ вытянем из вектора $\mathbf{p}_i$ нильслой $\mathbf{p}_{i1} = \mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_{i2} = \mathcal{N}(\mathbf{p}_{i1})$, …, $\mathbf{p}_{is_i} = \mathcal{N}(\mathbf{p}_{is_{i-1}})$. По определению нильслоя $\mathbf{p}_{is_i} \neq \mathbf{0}$, но $\mathcal{N}(\mathbf{p}_{is_i}) = \mathbf{0}$. Жорданова система, состоящая из всех полученных нильслоев, порождает V, так как содержит в качестве подсистемы базис P. Если эта жорданова система линейно независима, то она является базисом. В противном случае запишем ее в виде жордановой таблицы. В силу леммы 10.5 последний столбец этой жордановой таблицы линейно зависим.

Это означает, что один из векторов последнего столбца является линейной комбинацией остальных его векторов. Среди всех строк жордановой таблицы, последний элемент которых обладает этим свойством, выберем самую короткую строку и обозначим ее номер через k. Тогда $\mathbf{p}_{ks_k} = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \mu_i \mathbf{p}_{is_i}$ для некоторых скаляров μ_i. Ясно, что если $\mu_i \neq 0$ для некоторого i, то последний элемент i-й строки таблицы также линейно выражается через последние элементы остальных строк, и потому i-я строка не короче k-й. Для всякого i такого, что $i \neq k$ и $\mu_i \neq 0$, прибавим к k-й строке жордановой таблицы все соответствующие векторы i-й строки, умноженные на $-\mu_i$. Последний вектор k-й строки обратится в $\mathbf{0}$. Сдвинем эту строку вправо, удалив из нее все нулевые векторы (а если она вся станет нулевой, вычеркнем ее). Получим жорданову таблицу, содержащую меньше векторов, чем исходная.

Исходная жорданова система была системой образующих для пространства V. Получение нулевого вектора в результате описанных выше действий означает, что тот вектор, который ранее стоял на месте полученного нулевого вектора, является линейной комбинацией других векторов жордановой системы, которые располагались в других строках жордановой таблицы, и потому не были из нее вычеркнуты.

Базис, являющийся жордановой системой (3)

Ясно, что если из системы образующих векторного пространства вычеркнуть векторы, являющиеся линейными комбинациями оставшихся в этой системе векторов, то полученная система вновь будет системой образующих нашего пространства. Таким образом, жорданова система, полученная в результате действий, описанных в предыдущем абзаце, по-прежнему будет системой образующих пространства V.

Если полученная нами система векторов линейно независима, то она является базисом в V. В противном случае повторим описанные выше действия применительно к новой жордановой таблице. Поскольку число векторов в исходной таблице конечно, рано или поздно этот процесс оборвется и мы найдем жорданову систему, являющуюся базисом в V. $\square$

Доказательство леммы 10.3. Пусть P — базис пространства V, являющийся жордановой системой (он существует в силу предложения 10.2). Предположим, что этот базис состоит из нильслоев вида $(\mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \ldots, \mathbf{p}_{is_i})$, где $i = 1, 2, \ldots, k$. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$ положим $V_i = \langle \mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \ldots, \mathbf{p}_{is_i} \rangle$. Легко понять, что:

1) если $\mathbf{x} \in V$, то $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_k$ для некоторых векторов $\mathbf{x}_1 \in V_1$, $\mathbf{x}_2 \in V_2$, ..., $\mathbf{x}_k \in V_k$;
2) $V_i \cap V_j = \{\mathbf{0}\}$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i \neq j$.

В самом деле, пусть $\mathbf{x} \in V$. Разложим вектор $\mathbf{x}$ по базису P:

$$\mathbf{x} = t_{11}\mathbf{p}_{11} + t_{12}\mathbf{p}_{12} + \cdots + t_{1s_1}\mathbf{p}_{1s_1} + t_{21}\mathbf{p}_{21} + t_{22}\mathbf{p}_{22} + \cdots + t_{2s_2}\mathbf{p}_{2s_2} + \\ + \cdots + t_{k1}\mathbf{p}_{k1} + t_{k2}\mathbf{p}_{k2} + \cdots + t_{ks_k}\mathbf{p}_{ks_k}.$$

Для всякого $i = 1, 2, \ldots, k$ положим $\mathbf{x}_i = t_{i1}\mathbf{p}_{i1} + t_{i2}\mathbf{p}_{i2} + \cdots + t_{is_i}\mathbf{p}_{is_i}$. Тогда $\mathbf{x}_1 \in V_1$, $\mathbf{x}_2 \in V_2$, ..., $\mathbf{x}_k \in V_k$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_k$. Утверждение 1) доказано.

Предположим теперь, что $\mathbf{x} \in V_i \cap V_j$ для некоторых $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i \neq j$. Тогда, с одной стороны, $\mathbf{x} = t_{i1}\mathbf{p}_{i1} + t_{i2}\mathbf{p}_{i2} + \cdots + t_{is_i}\mathbf{p}_{is_i}$ для некоторых t_{i1}, t_{i2}, ..., t_{is_i}, а с другой — $\mathbf{x} = t_{j1}\mathbf{p}_{j1} + t_{j2}\mathbf{p}_{j2} + \cdots + t_{js_j}\mathbf{p}_{js_j}$ для некоторых t_{j1}, t_{j2}, ..., t_{js_j}. Следовательно,

$$t_{i1}\mathbf{p}_{i1} + t_{i2}\mathbf{p}_{i2} + \cdots + t_{is_i}\mathbf{p}_{is_i} - t_{j1}\mathbf{p}_{j1} - t_{j2}\mathbf{p}_{j2} - \cdots - t_{js_j}\mathbf{p}_{js_j} = \mathbf{0}.$$

Но векторы $\mathbf{p}_{i1}$, $\mathbf{p}_{i2}$, ..., $\mathbf{p}_{is_i}$, $\mathbf{p}_{j1}$, $\mathbf{p}_{j2}$, ..., $\mathbf{p}_{js_j}$ линейно независимы, так как входят в базис P. Следовательно, $t_{i1} = t_{i2} = \cdots = t_{is_i} = 0$, откуда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Утверждение 2) также доказано. Из утверждений 1) и 2) вытекает, что $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} V_i$. $\square$

Тем самым мы завершили доказательство пп. 1) и 2) теоремы 10.1.

Для того, чтобы доказать п. 3) теоремы 10.1, нам понадобятся некоторые новые обозначения и результаты. Для данного базиса P пространства V, являющегося жордановой системой относительно оператора $\mathcal{N}$, и для всякого натурального i обозначим через q_i число нильслоев длины i в базисе P. Оказывается, что числа вида q_i не зависят от выбора базиса P, а однозначно определяются оператором $\mathcal{N}$. А именно, справедливо следующее

Предложение 10.3

*Положим $r_0 = \dim V$ и $r_i = r(\mathcal{N}^i)$ для любого натурального i. Пусть P — базис пространства V, являющийся жордановой системой относительно оператора $\mathcal{N}$. Тогда для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ выполнено равенство $q_i = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}$.*frame 34

Доказательство. Поскольку длина любого нильслоя не превосходит m, базис P состоит из q_1 нильслоев длины 1, q_2 нильслоев длины 2, $\ldots$, q_m нильслоев длины m. Следовательно, $r_0 = \dim V = q_1 + 2q_2 + \cdots + mq_m$. Если $(\mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \ldots, \mathbf{p}_{is_i})$ — нильслой из P и $s_i > 1$, то под действием оператора $\mathcal{N}$ этот нильслой перейдет в нильслой $(\mathbf{p}_{i2}, \ldots, \mathbf{p}_{is_i})$.

Число нильслоев данной длины в жордановом базисе (2)

Следовательно, $\mathcal{N}(\langle \mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{i2}, \dots, \mathbf{p}_{is_i} \rangle) = \langle \mathbf{p}_{i2}, \dots, \mathbf{p}_{is_i} \rangle$. Заметим, что система векторов $\{\mathbf{p}_{i2}, \dots, \mathbf{p}_{is_i}\}$ линейно независима, так как она входит в базис P. Следовательно, эта система является базисом пространства $\langle \mathbf{p}_{i2}, \dots, \mathbf{p}_{is_i} \rangle$. Подпространство $\operatorname{Im} \mathcal{N}$ порождается множеством векторов вида $\{\mathcal{N}(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in P\}$, т. е. жордановой системой, которая получится, если из каждого нильслоя, входящего в P, вычеркнуть первый вектор. Ясно, что эта жорданова система состоит из q_2 нильслоев длины 1, q_3 нильслоев длины 2, …, q_m нильслоев длины $m-1$. Таким образом, $r_1 = \dim \operatorname{Im} \mathcal{N} = q_2 + 2q_3 + \dots + (m-1)q_m$. Аналогично проверяется, что $r_i = q_{i+1} + 2q_{i+2} + \dots + (m-i)q_m$ для всякого натурального i. Следовательно,

$$\begin{aligned} r_i - r_{i+1} &= (q_{i+1} + 2q_{i+2} + \dots + (m-i)q_m) - \\ &- (q_{i+2} + 2q_{i+3} + \dots + (m-i-1)q_m) = \\ &= q_{i+1} + q_{i+2} + \dots + q_m \end{aligned}$$

для $i = 0, 1, \dots, m-1$. Итак, $r_i - r_{i+1} = q_{i+1} + q_{i+2} + \dots + q_m$ и $r_{i-1} - r_i = q_i + q_{i+1} + \dots + q_m$, откуда

$$q_i = (r_{i-1} - r_i) - (r_i - r_{i+1}) = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}.$$

Предложение доказано.

Завершение доказательства основной теоремы о нильпотентных операторах

Из доказательства пп. 1) и 2) теоремы 10.1 видно, что порядки клеток Жордана в жордановой нормальной форме нильпотентного оператора — это длины нильслоев, из которых состоит базис пространства, являющийся жордановой системой. Предложение 10.3 показывает, что эти числа не зависят от выбора такого базиса, а определяются самим оператором $\mathcal{N}$. Это доказывает п. 3) теоремы 10.1. Тем самым, мы завершили доказательство этой теоремы. $\square$

Предложение 10.4

Линейный оператор $\mathcal{N}$ в n-мерном векторном пространстве нильпотентен тогда и только тогда, когда $\chi_{\mathcal{N}}(x) = (-1)^n x^n$.

Доказательство. *Необходимость.* Из теоремы 10.1 видно, что для нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ существует базис, в котором его матрица N нижнетреугольна и все элементы на ее главной диагонали равны 0. Тогда $N - xE$ — нижнетреугольная матрица, все элементы главной диагонали которой равны $-x$. Следовательно, $\chi_{\mathcal{N}}(x) = |N - xE| = (-x)^n = (-1)^n x^n$.

Достаточность. Если $\chi_{\mathcal{N}}(x) = (-1)^n x^n$, то, в силу теоремы Гамильтона–Кэли для линейных операторов, $(-1)^n \mathcal{N}^n = \mathcal{O}$, а значит и $\mathcal{N}^n = \mathcal{O}$. □

! Предложение 10.4 показывает, что характеристический многочлен произвольного нильпотентного оператора разложим в основном поле на линейные множители. Как мы увидим в следующем параграфе, именно по этой причине нильпотентные операторы приводимы к жордановой нормальной форме.

Из предложения 10.4 вытекает

Следствие 10.1

Единственным собственным значением нильпотентного оператора является число 0. $\square$

Алгоритм приведения матрицы нильпотентного оператора к жордановой нормальной форме (1)

Из доказательства теоремы 10.1 вытекает следующий алгоритм приведения матрицы нильпотентного оператора к жордановой нормальной форме.

Алгоритм 10.1, начало

Дана матрица A, являющаяся матрицей нильпотентного оператора в некотором базисе. Требуется найти жорданов базис относительно этого оператора и матрицу оператора в этом базисе. Записываем матрицу $(E \mid A^\top)$ и с помощью элементарных преобразований приводим ее к виду $(B_{1,1} \mid B_{1,2})$, где $B_{1,2}$ — ступенчатая матрица. Если $B_{1,2}A^\top \neq O$, записываем матрицу $(B_{1,1} \mid B_{1,2} \mid B_{1,2}A^\top)$ и с помощью элементарных преобразований приводим ее к виду $(B_{2,1} \mid B_{2,2} \mid B_{2,3})$, где $B_{2,3}$ — ступенчатая матрица. Продолжаем описанный процесс до тех пор, пока при каком-то k не станет верным равенство $B_{k,k+1}A^\top = O$. Строки полученной матрицы вида $(B_{k,1} \mid B_{k,2} \mid \cdots \mid B_{k,k+1})$ состоят из блоков, находящихся внутри матриц $B_{k,1}, B_{k,2}, \ldots, B_{k,k+1}$. В каждой строке вычеркиваем блоки, состоящие из нулей, и выравниваем полученные строки по правому краю. Получилась жорданова таблица.

Алгоритм приведения матрицы нильпотентного оператора к жордановой нормальной форме (2)

Алгоритм 10.1, окончание

«Сжимаем» эту жорданову таблицу до тех пор, пока оставшиеся в ней векторы не станут линейно независимыми (способ «сжатия» указан в доказательстве предложения 10.1). Векторы полученной жордановой таблицы образуют искомый базис. Матрица оператора в этом базисе является жордановой. Число клеток Жордана в этой матрице равно числу строк в полученной жордановой таблице, порядки клеток равны длинам этих строк, на главной диагонали всех клеток стоит число 0.

Этот алгоритм, как и алгоритм 8.2, найден В. А. Чуркиным в 1991 г.

Обоснование алгоритма 10.1. Строки единичной матрицы, стоящей в левой части исходной матрицы, — это координаты векторов исходного базиса (в нем самом). К ним на первом шаге приписываются (по строкам) координаты их образов при данном операторе (матрица $A^\top$). Далее находится базис подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ (ненулевые строки в $B_{1,2}$) — см. алгоритм Чуркина). После этого приписываются (опять по строкам) координаты образов векторов этого найденного базиса при действии оператора $\mathcal{A}$ (матрица $B_{1,2}A^\top$) — см. формулу (3) в § 6. Затем находится базис подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}^2$ (ненулевые строки в $B_{2,3}$). Продолжая этот процесс, мы вытягиваем нильслои из векторов исходного базиса. Этот процесс оборвется, так как в силу нильпотентности оператора $\operatorname{Im}\mathcal{A}^k = \{\mathbf{0}\}$ для некоторого k. Итак, в результате выполнения алгоритма, получается жорданова таблица, которая состоит из всевозможных ненулевых векторов вида $\mathcal{A}^s(\mathbf{p}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ — исходный базис пространства. Далее эта жорданова таблица перестраивается в базис, являющийся жордановой системой, так, как это описано в доказательстве предложения 10.1. Тот факт, что матрица оператора в этом базисе жорданова, а клетки Жордана в ней выглядят так, как указано в конце алгоритма, вытекает из доказательства теоремы 10.1. $\square$

Приведение к жордановой нормальной форме оператора с одним собственным значением

Нильпотентные операторы — это операторы, характеристический многочлен которых имеет ровно один корень, равный 0. Изложенный выше алгоритм легко позволяет приводить к нормальной жордановой форме произвольный оператор, характеристический многочлен которых имеет ровно один корень, лежащий в основном поле (не обязательно равный 0). В самом деле, предположим, что линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет ровно одно собственное значение t_0, причем кратность этого собственного значения как корня характеристического уравнения оператора $\mathcal{A}$ равна размерности пространства. Иными словами, $\chi_{\mathcal{A}}(x) = (-1)^n(x - t_0)^n$, где n — размерность пространства. Положим $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} - t_0\mathcal{E}$. Тогда, по теореме Гамильтона–Кэли для линейных операторов, $\mathcal{A}_1^n = \mathcal{O}$, т. е. оператор $\mathcal{A}_1$ нильпотентен. Обозначим через F жорданов базис для этого оператора, через A_1 матрицу оператора $\mathcal{A}_1$ в базисе F, а через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Найдя по изложенному выше алгоритму базис F и матрицу A_1, мы легко найдем и матрицу A, поскольку из равенства $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + t_0\mathcal{E}$ вытекает, что $A = A_1 + t_0 E$. Ясно, что матрица A будет жордановой. Заметим, что A отличается от A_1 только тем, что в матрице A все элементы на главной диагонали равны не 0, а t_0.