§ 9. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

9.1. Определение, свойства и способ нахождения собственных векторов и собственных значений

Определение

Пусть V — векторное пространство над полем F, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V. Вектор $\mathbf{x} \in V$ называется *собственным вектором* оператора $\mathcal{A}$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и существует скаляр $t \in F$ такой, что

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t\mathbf{x}. \tag{1}$$

Скаляр $t \in F$ называется *собственным значением* или *собственным числом* оператора $\mathcal{A}$, если существует вектор $\mathbf{x} \in V$ такой, что $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и выполнено равенство (1). При наличии равенства (1) мы будем называть $\mathbf{x}$ собственным вектором, *относящимся к собственному значению* t, а t — собственным значением, *относящимся к собственному вектору* $\mathbf{x}$.

Свойство собственных векторов, относящихся к одному и тому же собственному значению

Теорема 9.1

Совокупность всех собственных векторов, относящихся к одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором образует подпространство.

Доказательство. Обозначим через M_0 множество всех собственных векторов, относящихся к собственному значению t_0 и положим $M = M_0 \cup \{\mathbf{0}\}$. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in M$. Если $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, то $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in M$. Пусть теперь $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$. Если $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, то $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = \mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = t_0 \cdot \mathbf{0} = t_0\mathbf{x}_1$. Если же $\mathbf{x}_0 \in M_0$, то $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = t_0\mathbf{x}_1$ по определению множества M_0. Таким образом, последнее равенство выполнено в любом случае. Аналогично проверяется, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = t_0\mathbf{x}_2$. Следовательно,

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = t_0\mathbf{x}_1 + t_0\mathbf{x}_2 = t_0(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2),$$

и потому $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in M_0 \subseteq M$. Аналогично, для любого скаляра t имеем: если $t\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, то $t\mathbf{x}_1 \in M$, а если $t\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$, то

$$\mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = t(t_0\mathbf{x}_1) = t_0(t\mathbf{x}_1),$$

откуда $t\mathbf{x}_1 \in M_0 \subseteq M$.

Свойство собственных векторов, относящихся к различным собственным значениям (1)

Теорема 9.2

Если векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ являются собственными векторами линейного оператора $\mathcal{A}$ и относятся к попарно различным собственным значениям $t_1, t_2, \ldots, t_k$ соответственно, то векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ линейно независимы.

Доказательство будем вести индукцией по числу векторов.

База индукции. Пусть $k = 1$ и $\mathbf{x}_1$ — собственный вектор. По определению собственного вектора, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$. Поэтому если $s_1\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ для некоторого s_1, то $s_1 = 0$. Следовательно, система, состоящая из вектора $\mathbf{x}_1$, линейно независима.

Шаг индукции. Пусть теперь $k > 1$ и $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ — собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к попарно различным собственным значениям $t_1, t_2, \ldots, t_k$ соответственно. Предположим, что

$$s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \qquad (2)$$

для некоторых скаляров $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k \in F$.

Свойство собственных векторов, относящихся к различным собственным значениям (2)

Используя замечание 6.1, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \mathcal{A}(\mathbf{0}) &= \mathcal{A}(s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k\mathbf{x}_k) = \\ &= s_1\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + s_2\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) + \cdots + s_{k-1}\mathcal{A}(\mathbf{x}_{k-1}) + s_k\mathcal{A}(\mathbf{x}_k) = \\ &= s_1 t_1\mathbf{x}_1 + s_2 t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1} t_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k t_k\mathbf{x}_k.\end{aligned}$$

Итак,

$$s_1 t_1\mathbf{x}_1 + s_2 t_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1} t_{k-1}\mathbf{x}_{k-1} + s_k t_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \tag{3}$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (2) на t_k, получаем, что

$$s_1 t_k\mathbf{x}_1 + s_2 t_k\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1} t_k\mathbf{x}_{k-1} + s_k t_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Вычитая равенство (4) из (3), получаем, что

$$s_1(t_1 - t_k)\mathbf{x}_1 + s_2(t_2 - t_k)\mathbf{x}_2 + \cdots + s_{k-1}(t_{k-1} - t_k)\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

По предположению индукции векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}$ линейно независимы. Следовательно, $s_1(t_1 - t_k) = s_2(t_2 - t_k) = \cdots = s_{k-1}(t_{k-1} - t_k) = 0$. Поскольку скаляры $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k$ попарно различны, получаем, что $s_1 = s_2 = \cdots = s_{k-1} = 0$. Из (2) вытекает теперь, что $s_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Учитывая, что $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$ (поскольку вектор $\mathbf{x}_k$ — собственный), получаем, что $s_k = 0$. Итак, если выполнено равенство (2), то $s_1 = s_2 = \cdots = s_{k-1} = s_k = 0$. Следовательно, векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k$ линейно независимы. $\square$

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий в векторном пространстве V над полем F. Зафиксируем некоторый базис пространства V и обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Для произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$ обозначим через X столбец его координат в выбранном базисе. Пусть $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, относящийся к собственному значению t. В силу формулы (2) из § 6 равенство (1) равносильно матричному равенству $AX = tX$. Последнее равенство можно переписать в виде $AX = tEX$, где E — единичная матрица того же порядка, что и A. Следовательно, $AX - tEX = O$, где O — нулевой столбец. Последнее равенство можно переписать в виде

$$(A - tE)X = O. \tag{5}$$

Мы получили матричную запись системы линейных уравнений, основная матрица которой содержит параметр t. Эта система крамеровская (так как ее основная матрица — квадратная) и однородная. Очевидно, что

- *собственными векторами оператора $\mathcal{A}$ являются ненулевые решения системы* (5) *и только они*;
- *собственными значениями оператора $\mathcal{A}$ являются те значения параметра t, при которых система* (5) *имеет ненулевые решения, и только они.*

Используя следствие 9.3 из курса «Основы алгебры», получаем, что справедливо следующее

Предложение 9.1

Пусть V — векторное пространство над полем F, а $\mathcal{A}$ — линейный оператор в пространстве V.

а) *Скаляр t является собственным значением линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $t \in F$ и*

$$|A - tE| = 0. \tag{6}$$

б) *Собственными векторами линейного оператора $\mathcal{A}$, относящимися к его собственному значению t_0, являются ненулевые решения системы линейных уравнений $(A - t_0E)X = 0$ и только они.* □

В левой части равенства (6) стоит характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ (или матрицы A).

Определение

Уравнение (6) называется *характеристическим уравнением* оператора $\mathcal{A}$ и матрицы A.

Таким образом, п. а) предложения 9.1 можно переформулировать следующим образом:

- *собственными значениями линейного оператора являются корни его характеристического уравнения, лежащие в основном поле, и только они.*

9.2. Операторы, приводимые к диагональному виду

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий в пространстве V, называется *приводимым к диагональному виду* или *оператором простой структуры*, если существует базис пространства V, в котором матрица этого оператора диагональна.

Теорема 9.3

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в векторном пространстве V над полем F приводим к диагональному виду тогда и только тогда, когда в V существует базис, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть матрица A оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ является диагональной, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & t_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t_n \end{pmatrix}.$$

Тогда, по определению матрицы оператора в базисе, $\mathcal{A}(\mathbf{y}_1) = t_1\mathbf{y}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{y}_2) = t_2\mathbf{y}_2$, ..., $\mathcal{A}(\mathbf{y}_n) = t_n\mathbf{y}_n$. В силу замечания 2.3 векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ — ненулевые. Следовательно, базис $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Достаточность. Предположим теперь, что базис $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ пространства V состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}(\mathbf{y}_1) = s_1\mathbf{y}_1$, $\mathcal{A}(\mathbf{y}_2) = s_2\mathbf{y}_2$, ..., $\mathcal{A}(\mathbf{y}_n) = s_n\mathbf{y}_n$ для некоторых скаляров $s_1, s_2, \dots, s_n \in F$. Тогда по определению матрицы оператора в базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ приводим к диагональному виду. $\square$

Критерий приводимости оператора к диагональному виду (3)

Из доказательства теоремы 9.3 непосредственно извлекается следующая информация, полезная при решении задач.

- *Если пространство имеет базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$, то матрица оператора $\mathcal{A}$ именно в этом базисе диагональна и на ее диагонали стоят собственные значения, причем каждое собственное значение стоит столько раз, сколько имеется относящихся к нему линейно независимых собственных векторов. Если матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе диагональна, то именно этот базис состоит из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.*

Следствие 9.1

Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем F, $\mathcal{A}$ — линейный оператор в этом пространстве, а A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. Если уравнение $|A - tE| = 0$ имеет n различных корней, лежащих в поле F, то оператор $\mathcal{A}$ приводим к диагональному виду.

Доказательство. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n \in F$ — различные корни уравнения $|A - tE| = 0$. Они являются собственными значениями оператора $\mathcal{A}$. Для каждого собственного значения t_i зафиксируем собственный вектор $\mathbf{y}_i$ относящийся к t_i. По теореме 9.2 векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ линейно независимы. В силу замечания 2.7 они образуют базис пространства V. Для завершения доказательства остается сослаться на теорему 9.3. $\square$

9.3. Модель Леонтьева

В заключение параграфа приведем пример, показывающий, как собственные значения матриц возникают в приложениях линейной алгебры. Речь пойдет о математическом моделировании экономических процессов.

Рассмотрим n технологических процессов (или n предприятий) $p_1, p_2, \ldots, p_n$, которые производят n продуктов $G_1, G_2, \ldots, G_n$ при следующих ограничениях: каждый технологический процесс производит один и только один продукт и нет притока продуктов извне. Для удобства обозначений будем считать, что технологический процесс p_i производит продукт G_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для производства продукта G_i в технологическом процессе p_i могут понадобиться продукты $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Пусть a_{ij} — количество единиц продукта G_i, необходимое для производства одной единицы продукта G_j. Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется *матрицей потребления*. Ясно, что A — матрица над полем $\mathbb{R}$, все элементы которой неотрицательны. Такие матрицы называются *неотрицательными*.

Модель Леонтьева (2)

Зафиксируем некоторый временной интервал, скажем, год. Пусть в течение этого времени произведено x_i единиц продукта G_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *вектором валового выпуска*. Векторы из пространства $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать как матрицы над $\mathbb{R}$ размера $1 \times n$. Это позволяет говорить о *неотрицательных векторах*. Ясно, что вектор $\mathbf{x}$ — неотрицательный. Часть произведенной продукции расходуется в процессе производства. Эта часть описывается вектором $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Вектор $\mathbf{y}$ называется *вектором производственных затрат*. Через X обозначим столбец длины n, состоящий из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а через Y — столбец длины n, состоящий из элементов $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Переходя к матричным обозначениям, имеем $Y = AX$. Вектор $\mathbf{c} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ предназначен для использования в непроизводственной сфере и накопления. Он называется *вектором конечного потребления*. Столбец длины n, элементами которого являются компоненты вектора $\mathbf{c}$, обозначим через C. Ясно, что $C = X - Y = X - AX$.

Основная задача, возникающая в планировании производства на наш временной интервал, формулируется следующим образом: при заданном векторе конечного потребления **c** найти необходимый вектор валового выпуска **x**. Другими словами, необходимо при заданных векторе **c** и матрице A найти хотя бы один неотрицательный вектор **x**, удовлетворяющий равенству $X - AX = C$ или

$$(E - A)X = C. \qquad (7)$$

Это матричная запись системы линейных уравнений. Эта система с указанной интерпретацией матрицы A и столбцов X и C называется *моделью «затраты–выпуск»* или *моделью Леонтьева*[1]. Решение $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ системы (7) называется *неотрицательным*, если $x_i^0 \geqslant 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

[1] В честь автора модели — американского экономиста российского происхождения Василия Васильевича Леонтьева (1905–1999), получившего в 1973 г. Нобелевскую премию по экономике «за развитие метода “затраты — выпуск” и за его применение к важным экономическим проблемам».

Продуктивные матрицы (1)

Определение

Неотрицательная квадратная матрица A называется *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора $\mathbf{c}$ существует неотрицательное решение системы (7).

Следующее утверждение дает два критерия продуктивности матрицы.

Теорема 9.4

Для неотрицательной квадратной матрицы A над полем $\mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:

1) *матрица A продуктивна;*
2) *матрица $E - A$ обратима и матрица, обратная к $E - A$, неотрицательна;*
3) *все корни характеристического уравнения матрицы A по модулю меньше единицы.*

В частности, если t — собственное значение продуктивной матрицы, то $|t| < 1$.

Продуктивные матрицы (2)

Доказательство. Мы докажем лишь эквивалентность условий 1) и 2). Эквивалентность условий 1) и 3) доказывается сложнее, и эту часть доказательства мы опустим.

1) $\Longrightarrow$ 2). Обозначим через n порядок матрицы A. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ обозначим через E_i столбец длины n, в котором на i-м месте стоит 1, а все остальные элементы равны 0. В силу продуктивности матрицы A система $(E - A)X = E_i$ имеет неотрицательное решение. Обозначим его через X_i. Ясно, что X_i — столбец длины n. Обозначим через X квадратную матрицу порядка n, i-й столбец которой (для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$) совпадает с X_i. Тогда $(E - A)X$ — это квадратная матрица порядка n, i-й столбец которой (для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$) совпадает с E_i. Иными словами, $(E - A)X = E$. Это означает, что матрица $E - A$ обратима и $(E - A)^{-1} = X$. Отсюда вытекает неотрицательность матрицы $(E - A)^{-1}$, поскольку матрица X неотрицательна по построению.

2) $\Longrightarrow$ 1). Из обратимости матрицы $E - A$ вытекает, что $|E - A| \neq 0$. По теореме Крамера система $(E - A)X = C$ совместна. Если X_0 — решение этой системы, то столбец $X_0 = (E - A)^{-1}C$ неотрицателен как произведение двух неотрицательных матриц. $\square$

Из эквивалентности утверждений 1) и 2) теоремы 9.4, критерия обратимости матрицы и теоремы Крамера вытекает

Следствие 9.2

Если A — продуктивная квадратная матрица порядка n, то, для всякого неотрицательного столбца C длины n, система линейных уравнений (7) имеет единственное решение. □

В заключение параграфа сформулируем (без доказательства) утверждение, которое играет важную роль в доказательстве эквивалентности условий 1) и 3) теоремы 9.4. Если A — квадратная матрица порядка n над полем $\mathbb{R}$, то характеристическое уравнение этой матрицы имеет n корней в поле $\mathbb{C}$ (некоторые из которых могут совпадать). Наибольший из них по модулю называется *спектральным радиусом* матрицы A и обозначается через t_A. Подчеркнем, что в общем случае t_A — комплексное число, которое не обязано быть действительным. Если же оно лежит в $\mathbb{R}$, то оно является собственным значением матрицы A.

Теорема 9.5 (теорема Фробениуса–Перрона)

Если A — неотрицательная квадратная матрица над полем $\mathbb{R}$, то ее спектральный радиус является действительным числом и существует относящийся к нему неотрицательный собственный вектор матрицы A. $\square$