§ 8. Образ и ядро линейного отображения

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

Определения

Пусть $\mathcal{A}$ — линейное отображение из пространства V в пространство W. *Образом* отображения $\mathcal{A}$ называется множество всех векторов $\mathbf{y} \in W$ таких, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{x} \in V$. *Ядром* отображения $\mathcal{A}$ называется множество всех векторов $\mathbf{x} \in V$ таких, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$. Образ оператора $\mathcal{A}$ обозначается через $\operatorname{Im} \mathcal{A}$, а его ядро — через $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Каждое из множеств $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ и $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ непусто. Для первого из них это очевидно, а для второго вытекает из того, что $\mathcal{A}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. Введенные понятия проиллюстрированы на рис. 1.

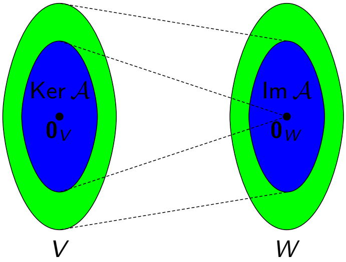

Рис. 1. Образ и ядро

Замечание 8.1

Пусть V и W — векторные пространства над полем F, а $\mathcal{A}$ — линейное отображение из V в W.

а) *Образ отображения $\mathcal{A}$ является подпространством в W, а его ядро — подпространством в V.*

б) *Если $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ — базис пространства V, то подпространство $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ порождается векторами $\mathcal{A}(\mathbf{p}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_2)$, ..., $\mathcal{A}(\mathbf{p}_n)$.*

Доказательство. а) Пусть $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$, а $t \in F$. Тогда существуют векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ такие, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$ и $\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$. Следовательно,

$$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad \text{и} \quad t\mathbf{y}_1 = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = \mathcal{A}(t\mathbf{x}_1).$$

Это означает, что $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2, t\mathbf{y}_1 \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$, и потому $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ — подпространство в W. Далее, пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, а t — вновь произвольный скаляр. Тогда

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W \quad \text{и} \\ &\mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = t \cdot \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W. \end{aligned}$$

Это означает, что $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, t\mathbf{x}_1 \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, и потому $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ — подпространство в V.

б) Если $\mathbf{x} \in V$ и $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе P, то

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n) = x_1\mathcal{A}(\mathbf{p}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{p}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}_n(\mathbf{p}_n).$$

Следовательно, $\operatorname{Im}\mathcal{A} \subseteq \langle \mathcal{A}(\mathbf{p}_1), \mathcal{A}(\mathbf{p}_2), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{p}_n)\rangle$. Обратное включение очевидно, поскольку $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i) \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$ для всякого $i = 1, 2, \dots, n$ и $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ — подпространство в W. Таким образом, мы доказали, что $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \langle \mathcal{A}(\mathbf{p}_1), \mathcal{A}(\mathbf{p}_2), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{p}_n)\rangle$. $\square$

Ранг и дефект (1)

Замечание 8.1 позволяет говорить о размерности и базисе образа и ядра отображения $\mathcal{A}$.

Определение

Размерность образа линейного отображения $\mathcal{A}$ называется *рангом* $\mathcal{A}$ и обозначается через $r(\mathcal{A})$, а размерность ядра отображения $\mathcal{A}$ называется *дефектом* $\mathcal{A}$ и обозначается через $d(\mathcal{A})$.

Замечание 8.2

Пусть V и W — векторные пространства над одним и тем же полем, $\mathcal{A}$ — линейное отображение из V в W, а P и Q — базисы пространств V и W соответственно. Тогда ранг отображения $\mathcal{A}$ равен рангу матрицы $A_{P,Q}$.

Доказательство. Из замечания 8.1 и определения матрицы линейного отображения в базисах вытекает, что пространство $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ совпадает с пространством, порожденным векторами-столбцами матрицы $A_{P,Q}$. Следовательно, ранг оператора равен рангу этой матрицы по столбцам. $\square$

Ранг и дефект (2)

Из замечания 8.2 вытекает следующий факт.

Следствие 8.1

Пусть V — векторное пространство, $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V, а P — базис пространства V. Тогда ранг оператора $\mathcal{A}$ равен рангу матрицы A_P. □

А из этого утверждения, в свою очередь, вытекает

Следствие 8.2

Пусть V — векторное пространство, $\mathcal{A}$ — линейный оператор в V, а P и Q — базисы пространства V. Тогда матрицы A_P и A_Q имеют один и тот же ранг. □

Теорема о ранге и дефекте (1)

Теорема 8.1 (теорема о ранге и дефекте)

Пусть V и W — векторные пространства над одним и тем же полем, а $\mathcal{A}$ — линейное отображение из V в W. Тогда сумма ранга и дефекта отображения $\mathcal{A}$ равна размерности пространства V.

Доказательство. Дальнейшие рассуждения иллюстрирует рис. 2, на котором подпространства $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ выделены зеленым цветом. Обозначим ранг отображения $\mathcal{A}$ через r, а его дефект — через d. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d$ — базис $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, а $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r$ — базис $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Для всякого $i = 1, 2, \ldots, r$ существует вектор $\mathbf{b}_i \in V$ такой, что $\mathcal{A}(\mathbf{b}_i) = \mathbf{c}_i$.

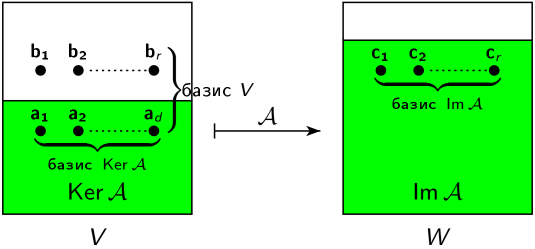

Рис. 2. Базисы подпространств $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ и пространства V

Докажем, что набор векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r$ является базисом пространства V. Этого, очевидно, достаточно для наших целей.

Сначала докажем, что $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r$ — система образующих в V. Для всякого вектора $\mathbf{x} \in V$, его образ $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ можно разложить по базису пространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$: $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t_1\mathbf{c}_1 + t_2\mathbf{c}_2 + \cdots + t_r\mathbf{c}_r$. Положим $\mathbf{x}' = t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + \cdots + t_r\mathbf{b}_r$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{x}') &= \mathcal{A}(t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + \cdots + t_r\mathbf{b}_r) = \\ &= t_1\mathcal{A}(\mathbf{b}_1) + t_2\mathcal{A}(\mathbf{b}_2) + \cdots + t_r\mathcal{A}(\mathbf{b}_r) = \\ &= t_1\mathbf{c}_1 + t_2\mathbf{c}_2 + \cdots + t_r\mathbf{c}_r = \mathcal{A}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}')$, и потому $\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}') = \mathbf{0}_W$. Следовательно, $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Разложим вектор $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ по базису пространства $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$: $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_d\mathbf{a}_d$. Следовательно,

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \mathbf{x}' = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_d\mathbf{a}_d + t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + \cdots + t_r\mathbf{b}_r.$$

Мы доказали, что $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r$ — система образующих пространства V.

Осталось доказать, что этот набор векторов линейно независим. Пусть

$$p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{a}_2 + \cdots + p_d\mathbf{a}_d + q_1\mathbf{b}_1 + q_2\mathbf{b}_2 + \cdots + q_r\mathbf{b}_r = \mathbf{0}_V.$$

Учитывая, что $\mathcal{A}(\mathbf{a}_i) = \mathbf{0}_W$ для всех $i = 1, 2, \ldots, d$ и $\mathcal{A}(\mathbf{b}_j) = \mathbf{c}_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, r$, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{0}_V) &= \mathcal{A}(p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{a}_2 + \cdots + p_d\mathbf{a}_d + q_1\mathbf{b}_1 + q_2\mathbf{b}_2 + \cdots + q_r\mathbf{b}_r) = \\ &= p_1\mathcal{A}(\mathbf{a}_1) + p_2\mathcal{A}(\mathbf{a}_2) + \cdots + p_d\mathcal{A}(\mathbf{a}_d) + \\ &+ q_1\mathcal{A}(\mathbf{b}_1) + q_2\mathcal{A}(\mathbf{b}_2) + \cdots + q_r\mathcal{A}(\mathbf{b}_r) = \\ &= q_1\mathbf{c}_1 + q_2\mathbf{c}_2 + \cdots + q_r\mathbf{c}_r,\end{aligned}$$

и потому $q_1\mathbf{c}_1 + q_2\mathbf{c}_2 + \cdots + q_r\mathbf{c}_r = \mathcal{A}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. Поскольку векторы $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r$ линейно независимы, получаем, что $q_1 = q_2 = \cdots = q_r = 0$. Следовательно, $p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{a}_2 + \cdots + p_d\mathbf{a}_d = \mathbf{0}_V$. Но векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d$ линейно независимы, и потому $p_1 = p_2 = \cdots = p_d = 0$. Таким образом, мы доказали, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_d, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r$ линейно независимы. $\square$

Из теоремы о ранге и дефекте непосредственно вытекает

Следствие 8.3

Сумма ранга и дефекта линейного оператора в векторном пространстве V равна размерности V. $\square$

Алгоритм нахождения базиса и размерности образа

Пусть $\mathcal{A}$ — линейное отображение из пространства V в пространство W, а A — матрица этого отображения в некоторых базисах. Из замечания 8.1 и определения матрицы линейного отображения в базисах вытекает, что пространство $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ совпадает с пространством, порожденным векторами-столбцами матрицы A или, что то же самое, с пространством, порожденным векторами-строками матрицы $A^\top$. Учитывая алгоритм 1.1, мы получаем следующий

Алгоритм 8.1

Пусть V и W — векторные пространства над одним и тем же полем, P и Q — базисы пространств V и W соответственно, $\mathcal{A}$ — линейное отображение из V в W, а A — матрица отображения $\mathcal{A}$ в базисах P и Q. Чтобы найти базис подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, надо привести к ступенчатому виду матрицу $A^\top$. В ненулевых строках полученной матрицы будут записаны координаты базисных векторов пространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ в базисе Q, а число этих строк равно размерности пространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. $\square$

Пусть, по-прежнему, V и W — векторные пространства над одним и тем же полем, P и Q — базисы пространств V и W соответственно, $\mathcal{A}$ — линейное отображение из V в W, а A — матрица отображения $\mathcal{A}$ в базисах P и Q. Ясно, что $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $[\mathcal{A}(\mathbf{x})]_Q = A_{P,Q}[\mathbf{x}]_P = O$, где O — нулевой столбец. Иными словами, пространство $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ совпадает с пространством решений однородной системы линейных уравнений $A_{P,Q}[\mathbf{x}]_P = O$. Следовательно, базис ядра линейного отображения $\mathcal{A}$ — это фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений, основная матрица которой есть матрица этого отображения в некоторых базисах. Алгоритм нахождения фундаментального набора решений однородной системы линейных уравнений указан в § 5. Поэтому нет необходимости в том, чтобы специально формулировать алгоритм нахождения базиса и размерности ядра линейного отображения.

Алгоритм Чуркина

Приведем еще один алгоритм нахождения базисов и размерностей образа и ядра линейного отображения $\mathcal{A}$. Его преимуществом является то, что он позволяет найти базисы образа и ядра одновременно. Кроме того, этот алгоритм будет существенно использоваться в дальнейшем при решении более сложных задач. Алгоритм найден сравнительно недавно (в 1991 г.), его автором является новосибирский математик В. А. Чуркин.

Алгоритм 8.2 (алгоритм Чуркина)

Пусть V и W — векторные пространства над одним и тем же полем, $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ и $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m\}$ — базисы пространств V и W соответственно, $\mathcal{A}$ — линейное отображение из V в W, а A — матрица отображения $\mathcal{A}$ в базисах P и Q. Запишем матрицу $B = (E \mid A^\top)$, где E — единичная матрица порядка n. Элементарными преобразованиями всей этой матрицы (без использования перестановки столбцов) приведем ее правую часть к ступенчатому виду. Полученную матрицу обозначим через $C = (C_1 \mid C_2)$, где C_2 — ступенчатая матрица, полученная на месте матрицы $A^\top$. Тогда ненулевые строки матрицы C_2 содержат координаты базисных векторов пространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ в базисе Q, а строки матрицы C_1, продолжениями которых в матрице C_2 являются нулевые строки, содержат координаты базисных векторов пространства $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ в базисе P.

Обоснование алгоритма Чуркина. Утверждение (i) немедленно вытекает из алгоритма 8.1 и того факта, что в процессе преобразований левая и правая части матрицы B не «перемешиваются». Обоснуем утверждение (ii). Для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ вектор $\mathbf{p}_i$ имеет в базисе P координаты $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на i-м месте. Поэтому можно считать, что единичная матрица, стоящая в левой части матрицы B, есть матрица, в которой по строкам записаны координаты векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ в базисе P. Вспоминая определение матрицы линейного оператора, получаем, что в правой части i-й строки матрицы B стоят координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ в базисе Q. Итак, строки матрицы B обладают следующим свойством: если рассматривать левую часть строки как координаты некоторого вектора $\mathbf{x}$ в базисе P, то в ее правой части записаны координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ в базисе Q. Легко понять, что это свойство сохраняется при элементарных преобразованиях матрицы. В частности, он выполнено для матрицы, полученной в результате выполнения алгоритма Чуркина. Поэтому в тех строках матрицы C_1, продолжения которых в C_2 являются нулевыми, записаны координаты векторов из пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ в базисе P. Матрица C_1 получена с помощью элементарных преобразований из единичной матрицы. Поскольку элементарные преобразования не меняют ранга матрицы, $r(C_1) = r(E) = n$.

В частности, система всех строк матрицы C_1 линейно независима. Тогда ее подсистема, состоящая из тех строк, продолжения которых в C_2 являются нулевыми, также линейно независима (см. лемму 1.3). В силу замечания 2.7 осталось доказать, что число этих строк равно размерности пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$. В силу замечания 6.2 получаем, что $r(A^{\top}) = r(A) = r(\mathcal{A})$. Учитывая теорему о ранге и дефекте, получаем, что число строк матрицы C_1, продолжения которых в C_2 являются нулевыми, равно $n - r(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A}) = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. В силу сказанного выше, это завершает обоснование алгоритма Чуркина. $\square$

Критерий автоморфности (1)

Как уже отмечалось в § 6, линейный оператор является эндоморфизмом векторного пространства. Следующее утверждение показывает, когда этот эндоморфизм является автоморфизмом.

Предложение 8.1

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V. Следующие условия эквивалентны:

1) $\mathcal{A}$ — *автоморфизм V на себя;*

2а) $\mathcal{A}$ — *сюръективное отображение из V на себя;*

2б) $\operatorname{Im}\mathcal{A} = V$;

2в) $r(\mathcal{A}) = \dim V$;

3а) $\mathcal{A}$ — *инъективное отображение из V в себя;*

3б) $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$;

3в) $d(\mathcal{A}) = 0$;

4а) *матрица оператора $\mathcal{A}$ в произвольном базисе невырожденна;*

4б) *матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе невырожденна.*

Доказательство. Эквивалентность условий 2а) и 2б) очевидна, а условия 2б) и 2в) эквивалентны в силу определения ранга оператора.

Условия 3б) и 3в) эквивалентны в силу определения дефекта оператора. Докажем эквивалентность условий 3а) и 3б).

3а) $\Longrightarrow$ 3б). Если оператор $\mathcal{A}$ инъективен, то $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ для любого ненулевого вектора $\mathbf{x} \in V$, и потому $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$.

3б) $\Longrightarrow$ 3а). Пусть $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$. Предположим, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y})$ для некоторых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) - \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, и потому $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Следовательно, $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Это означает, что оператор $\mathcal{A}$ инъективен.

Из теоремы о ранге и дефекте вытекает эквивалентность условий 2в) и 3в). С учетом сказанного выше, мы доказали эквивалентность условий 2а)–2в) и 3а)–3в).

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2а) очевидна. В силу эквивалентности условий 2а) и 3а), импликация 2а) $\Longrightarrow$ 1) эквивалентна тому, что из одновременного выполнения условий 2а) и 3а) вытекает 1), а это следует из определений автоморфизма и линейного оператора. Это доказывает, что условие 1) эквивалентно условиям 2а)–2в) и 3а)–3в).

Импликация 4а) $\Longrightarrow$ 4б) очевидна.

4б) $\Longrightarrow$ 4а). Пусть A и B — матрицы оператора $\mathcal{A}$ в двух разных базисах и $|A| \neq 0$. Тогда существует невырожденная квадратная матрица T такая, что $B = T^{-1}AT$. Следовательно,

$$|B| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}| \cdot |A| \cdot |T| = \frac{1}{|T|} \cdot |A| \cdot |T| = |A| \neq 0.$$

Для завершения доказательства достаточно убедиться, например, в эквивалентности условий 2в) и 4а).

2в) $\Longrightarrow$ 4а). Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. По условию $r(\mathcal{A}) = \dim V$, а согласно следствию 8.1, $r(\mathcal{A}) = r(A)$. Итак, $r(A) = \dim V$, т. е. ранг матрицы A совпадает с ее порядком. В частности, ранг A по минорам равен порядку матрицы A. Следовательно, $|A| \neq 0$, т. е. матрица A невырожденна.

4а) $\Longrightarrow$ 2в). Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. По условию $|A| \neq 0$. Следовательно, ранг A по минорам равен порядку матрицы A. Иными словами, $r(A) = \dim V$. Учитывая следствие 8.1, получаем, что $r(\mathcal{A}) = \dim V$. $\square$