§ 2. Базис векторного пространства

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2.1. Определение и простейшие свойства базиса, примеры

Определение

Базисом векторного пространства называется упорядоченная максимальная линейно независимая система векторов из этого пространства.

- Слово «упорядоченная» в определении базиса означает, что если две максимальных линейно независимых системы векторов состоят из одних и тех же векторов, записанных в разном порядке, то они являются *различными* базисами.
- Слова «максимальная линейно независимая система векторов» в определении базиса означают, что базис — это система векторов, максимальная (по включению) среди линейно независимых систем, т. е. линейно независимая система векторов, которая при добавлении к ней любого вектора становится линейно зависимой.

Определение

Система векторов из векторного пространства V называется *системой образующих* этого пространства, если любой вектор из V линейно выражается через какие-то векторы из этой системы.

Лемма 2.1

Конечная упорядоченная система векторов является базисом векторного пространства V тогда и только тогда, когда она является линейно независимой системой образующих этого пространства.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — базис пространства V и $\mathbf{b} \in V$. По определению базиса система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ линейно независима, а система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ линейно зависима. В силу леммы 1.4 вектор $\mathbf{b}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Следовательно, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — система образующих пространства V. А линейная независимость этого набора векторов вытекает из того, что он является базисом V.

Достаточность. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — линейно независимая система образующих пространства V и $\mathbf{b} \in V$. По определению системы образующих $\mathbf{b}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. В силу леммы 1.5 система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ линейно зависима. Таким образом, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — максимальная линейно независимая система, а следовательно — базис пространства V. $\square$

Следующее наблюдение показывает, что в случаях плоскости и обычного трехмерного пространства введенное в данном параграфе понятие базиса совпадает с теми понятиями базиса, которые были введены в курсе аналитической геометрии.

Замечание 2.1

а) *Базисом плоскости (в смысле данного выше определения) является произвольная упорядоченная пара неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости.*

б) *Базисом обычного трехмерного пространства (в смысле данного выше определения) является произвольная упорядоченная тройка некомпланарных векторов этого пространства.*

Доказательство. а) Пара неколлинеарных векторов плоскости линейно независима в силу замечания 1.2 и является системой образующих плоскости в силу теоремы о разложении вектора по базису на плоскости. Остается сослаться на лемму 2.1.

б) Это утверждение доказывается вполне аналогично предыдущему. □

Пример базиса в пространстве F^n

Приведем очень важный для дальнейшего пример базиса в пространстве F^n. В §1 были введены в рассмотрение векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ из этого пространства.

Замечание 2.2

Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ образуют базис пространства F^n.

Доказательство. В силу замечаний 1.3 и 1.4 векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ являются линейно независимой системой образующих пространства F^n. Остается сослаться на лемму 2.1. $\square$

Определение

Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ называется *стандартным базисом* пространства F^n.

- Как мы увидим в дальнейшем, стандартный базис играет в линейной алгебре такую же роль, какую в аналитической геометрии играл ортонормированный базис плоскости или трехмерного пространства.

Обсудим вкратце вопрос о базисах в других векторных пространствах, упоминавшихся в § 1.

Пространство многочленов и пространство функций. Легко проверить, что в качестве базиса пространства $F_n[x]$ можно взять многочлены $1, x, x^2, \dots, x^n$. В самом деле, любой многочлен степени $\leqslant n$ имеет вид $a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, т. е. является линейной комбинацией многочленов $1, x, x^2, \dots, x^n$. Следовательно, набор многочленов $1, x, x^2, \dots, x^n$ является системой образующих пространства $F_n[x]$. Осталось проверить, что этот набор линейно независим. Но это очевидно, поскольку $a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = o$ тогда и только тогда, когда $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

А вот пространство $F[x]$ и пространство функций базиса не имеют. Убедимся в этом для пространства многочленов. Предположим, что многочлены $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ образуют базис пространства многочленов и обозначим через k максимум из степеней этих многочленов. Очевидно, что степень любой линейной комбинации многочленов $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ не превосходит k, и потому многочлен x^{k+1} не выражается линейно через $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$. Следовательно, многочлены $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ не являются системой образующих пространства $F[x]$, а значит, не являются и базисом этого пространства.

Пространство матриц. Пусть F — поле, m и n — натуральные числа, $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n$. Обозначим через E_{ij} матрицу размера $m \times n$, в которой в i-й строке и j-м столбце стоит 1, а все остальные элементы равны 0. Такие матрицы называются *матричными единицами*. Легко проверяется, что совокупность всех матричных единиц размера $m \times n$ образует базис пространства $F^{m \times n}$. В самом деле, если $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размера $m \times n$, то $A = \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$. Таким образом, набор матриц $\{E_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ является системой образующих пространства $F^{m \times n}$. Осталось проверить, что этот набор линейно независим. Но это очевидно, поскольку $A = (a_{ij}) = O$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant j \leqslant n$.

Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Вопросу о том, как построить базис этого пространства, будет целиком посвящен один из следующих параграфов. Здесь мы ограничимся только упоминанием о том, что если однородная система является неопределенной, то базис пространства ее решений существует, а если она имеет единственное решение — то не существует.

Нулевое пространство. Из следующего наблюдения вытекает, что это пространство базиса не имеет.

Замечание 2.3

Нулевой вектор векторного пространства не может входить ни в какой его базис.

Доказательство. В силу леммы 1.2 любая система векторов, в которую входит нулевой вектор, линейно зависима и потому не является базисом. □

Определение

Ненулевое векторное пространство называется *конечномерным*, если в нем существует базис. Нулевое пространство также по определению считается конечномерным.

Как мы видели выше, существуют ненулевые векторные пространства, не имеющие базиса (например, пространство многочленов или пространство функций). В действительности, в таких пространствах тоже можно ввести понятие базиса, Мы не будем давать соответствующего определения, поскольку далее оно нам не пригодится. Отметим только, что все базисы таких пространств состоят из бесконечного числа векторов. Пространства, базисы которых бесконечны, называются *бесконечномерными*. Изучение бесконечномерных пространств выходит за рамки линейной алгебры. Им посвящен другой раздел математики, называемый функциональным анализом.

!! *На протяжении всего последующего курса мы будем рассматривать только конечномерные пространства. Слова «векторное пространство» всюду далее означают «конечномерное векторное пространство».*

2.2. Координаты вектора в базисе

Следующее утверждение является точным аналогом теорем о разложении вектора по базису на плоскости и в трехмерном пространстве, известных из курса аналитической геометрии.

Теорема 2.1 (теорема о разложении вектора по базису)

Пусть V — ненулевое векторное пространство, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — базис этого пространства и $\mathbf{x} \in V$. Тогда существуют, и притом единственные, скаляры $t_1, t_2, \dots, t_n$ такие, что

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n. \tag{1}$$

Доказательство. Существование коэффициентов $t_1, t_2, \dots, t_n$ с требуемым свойством вытекает из леммы 2.1. Осталось доказать единственность. Предположим, что наравне с равенством (1) выполнено равенство $\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_n\mathbf{a}_n$ для некоторых скаляров $s_1, s_2, \dots, s_n$. Вычтем последнее равенство из (1). Получим

$$(t_1 - s_1)\mathbf{a}_1 + (t_2 - s_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (t_n - s_n)\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Поскольку векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы, получаем, что $t_i - s_i = 0$, т. е. $t_i = s_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. $\square$

Определение

Равенство (1) называется *разложением вектора* $\mathbf{x}$ *по базису* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Скаляры $t_1, t_2, \ldots, t_n$ называются *координатами* вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Тот факт, что вектор $\mathbf{x}$ имеет в некотором базисе координаты $t_1, t_2, \ldots, t_n$ записывается так: $\mathbf{x} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Из замечания 1.4 вытекает

Замечание 2.4

Компоненты любого вектора из пространства F^n являются координатами этого вектора в стандартном базисе. □

Координаты суммы векторов и произведения вектора на скаляр

Замечание 2.5

Пусть V — векторное пространство, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, а t — произвольный скаляр. Если в некотором базисе вектор $\mathbf{x}$ имеет координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а вектор $\mathbf{y}$ — координаты $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то вектор $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ имеет в том же базисе координаты $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$, а вектор $t\mathbf{x}$ — координаты $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — базис, в котором даны координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Тогда

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{y}_2 + \cdots + y_n\mathbf{a}_n.$$

Складывая эти два равенства, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n) + (y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{y}_2 + \cdots + y_n\mathbf{a}_n) = \\ &= (x_1 + y_1)\mathbf{a}_1 + (x_2 + y_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_n + y_n)\mathbf{a}_n, \end{aligned}$$

а умножая первое из них на скаляр t — что

$$t\mathbf{x} = t(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n) = tx_1\mathbf{a}_1 + tx_2\mathbf{a}_2 + \cdots + tx_n\mathbf{a}_n.$$

Остается вспомнить определение координат вектора. $\square$

Рассмотрим вопрос о том, как найти координаты вектора из пространства F^n в каком-либо базисе этого пространства. Пусть $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, ..., $\mathbf{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$ — базис пространства F^n, а $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ — вектор из этого пространства. Требуется найти скаляры $x_1, x_2, \dots, x_n$ такие, что

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Расписав это равенство покомпонентно, получим следующий набор равенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Мы получили крамеровскую систему линейных уравнений, в которой в основной матрице по столбцам записаны базисные векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, а в столбце свободных членов — вектор $\mathbf{b}$. В силу теоремы о разложении вектора по базису эта система имеет единственное решение. Решить ее можно тремя способами — по формулам, которые входят в теорему Крамера, методом Гаусса или методом Гаусса–Жордана. Последний из этих способов приводит к алгоритму, сформулированному на следующем слайде.

Нахождение координат вектора (2)

Алгоритм 2.1

Пусть V — векторное пространство, $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ — его базис, а $\mathbf{b} \in V$. Чтобы найти координаты вектора $\mathbf{b}$ в базисе A, надо составить расширенную матрицу системы линейных уравнений, записав в основную часть матрицы по столбцам координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ в некотором базисе, а в последнем столбце — координаты вектора $\mathbf{b}$ в том же базисе. После этого надо элементарными преобразованиями расширенной матрицы привести ее основную часть к единичному виду. В этот момент в последнем столбце полученной матрицы будут записаны искомые координаты.

Зная, что такое координаты вектора, мы можем сформулировать еще один алгоритм.

Алгоритм 2.2

Чтобы выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или линейно независимой, надо записать в матрицу по строкам координаты векторов этой системы в некотором фиксированном базисе и начать приводить эту матрицу к ступенчатому виду. Если в процессе элементарных преобразований возникнет хотя бы одна нулевая строка, система линейно зависима. Если мы доведем матрицу до ступенчатого вида и нулевые строки в процессе преобразований не возникнут, система линейно независима.

Обоснование этого алгоритма будет дано позднее.

2.3. Размерность векторного пространства

Наша ближайшая цель — доказать, что любые два базиса векторного пространства состоят из одного и того же числа векторов. Как мы увидим, этот факт легко вытекает из следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 2.2

Если векторное пространство содержит базис из n векторов, то любой набор из более чем n векторов из этого пространства линейно зависим.

- Частным случаем этого утверждения для плоскости и трехмерного пространства является замечание 1.2.

Доказательство. Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис векторного пространства V, $k > n$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$. Разложим векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ по базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = a_{11}\mathbf{b}_1 + a_{12}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{b}_n, \\ \mathbf{a}_2 = a_{21}\mathbf{b}_1 + a_{22}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{b}_n, \\ \dotfill \\ \mathbf{a}_k = a_{k1}\mathbf{b}_1 + a_{k2}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{kn}\mathbf{b}_n. \end{cases} \tag{2}$$

Равномощность базисов (2)

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — произвольные скаляры такие, что

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Умножим первое равенство из набора равенств (2) на t_1, второе — на t_2, ..., последнее — на t_k и сложим полученные равенства. Получим:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \\
&= t_1(a_{11}\mathbf{b}_1 + a_{12}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{b}_n) + \\
&+ t_2(a_{21}\mathbf{b}_1 + a_{22}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{b}_n) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ t_k(a_{k1}\mathbf{b}_1 + a_{k2}\mathbf{b}_2 + \cdots + a_{kn}\mathbf{b}_n) = \\
&= (t_1a_{11} + t_2a_{21} + \cdots + t_ka_{k1})\mathbf{b}_1 + \\
&+ (t_1a_{12} + t_2a_{22} + \cdots + t_ka_{k2})\mathbf{b}_2 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (t_1a_{1n} + t_2a_{2n} + \cdots + t_ka_{kn})\mathbf{b}_n.
\end{aligned}$$

Поскольку векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ линейно независимы, отсюда вытекает, что

$$\begin{cases}
a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \cdots + a_{k1}t_k = 0, \\
a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{k2}t_k = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \cdots + a_{kn}t_k = 0.
\end{cases} \qquad (3)$$

Равномощность базисов (3)

Будем смотреть на равенства (3) как на однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $t_1, t_2, \ldots, t_k$. Число уравнений в этой системе меньше, чем число неизвестных, так как $k > n$. В силу замечания 7.3 курса «Основы алгебры» система (3) имеет ненулевое решение. Это означает, что можно найти скаляры $t_1, t_2, \ldots, t_k$, по крайней мере один из которых не равен нулю, такие, что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. Следовательно, система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима. □

Теперь мы можем легко доказать анонсированное выше утверждение.

Теорема 2.2

Любые два базиса векторного пространства состоят из одного и того же числа векторов.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базисы одного и того же векторного пространства. Поскольку обе эти системы векторов линейно независимы, из леммы 2.2 вытекает, что ни случай $k < n$, ни случай $n < k$ невозможны. Следовательно, $k = n$. □

Теорема 2.2 делает корректным следующее

Определение

Число векторов в базисе ненулевого векторного пространства называется *размерностью* этого пространства. Размерность нулевого пространства по определению равна 0. Размерность векторного пространства V обозначается через $\dim V$. Если $\dim V = n$, то пространство V называется n-*мерным*.

Из приведенных выше примеров базисов в различных пространствах вытекает, что справедливо

Замечание 2.6

а) *Размерность пространства* F^n *равна* n.

б) *Размерность пространства* $F_n[x]$ *равна* $n+1$.

в) *Размерность пространства* $F^{m\times n}$ *равна* mn. $\square$

Из леммы 2.2 вытекает

Замечание 2.7

Если $\dim V = n$, *то любой линейно независимый набор из* n *векторов пространства* V *является базисом в* V.

Доказательство. Если к линейно независимому набору из n векторов n-мерного пространства добавить любой вектор, то в силу леммы 2.2 полученный набор векторов будет линейно зависимым. Остается сослаться на определение базиса. $\square$

Дополняемость линейно независимой системы векторов до базиса

Теорема 2.3

Любой линейно независимый набор векторов из конечномерного векторного пространства можно дополнить до базиса этого пространства.

Доказательство. Пусть V — n-мерное векторное пространство и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — линейно независимый набор векторов из V. Из леммы 2.2 вытекает, что $k \leqslant n$. Если $k = n$, то в силу замечания 2.7 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — базис пространства V. Пусть теперь $k < n$. В силу теоремы 2.2 векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ не образуют базиса пространства V. Поскольку они линейно независимы, из определения базиса вытекает, что к ним можно добавить вектор $\mathbf{a}_{k+1}$ так, что набор векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}$ останется линейно независимым. Если $k + 1 = n$, то в силу замечания 2.7 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k+1}$ — базис пространства V. В противном случае к нему вновь можно добавить один вектор так, чтобы получившийся набор остался линейно независимым. Продолжая этот процесс, мы через $n - k$ шагов получим линейно независимый набор из n векторов. После этого останется только в очередной раз сослаться на замечание 2.7. $\square$

Из теоремы 2.3 вытекает

Замечание 2.8

Всякое ненулевое векторное пространство V над бесконечным полем имеет бесконечно много базисов.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный ненулевой вектор из V. Из леммы 1.1 вытекает, что набор векторов, состоящий из одного вектора $\mathbf{x}$, линейно независим. По теореме 2.3 этот набор можно дополнить до базиса пространства V. Для различных ненулевых векторов из V полученные таким образом базисы будут различными, так как они будут начинаться с различных векторов (напомним, что базис — это упорядоченный набор векторов). Остается заметить, что, в силу замечания 1.1, пространство V содержит бесконечное число векторов. $\square$

Изоморфизм векторных пространств

Поскольку, как отмечалось в § 1, векторные пространства являются универсальными алгебрами, к ним можно применять понятие изоморфизма, введенное в § 4 курса «Основы алгебры». Чтобы облегчить восприятие дальнейшего материала, укажем явно, какой вид принимает определение изоморфизма применительно к векторным пространствам.

Определение

Векторные пространства V_1 и V_2 над одним и тем же полем F называются *изоморфными*, если существует биекция f из V_1 на V_2 (называемая *изоморфизмом*) такая, что для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V_1$ и любого $t \in F$ выполнены равенства

$$f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) \quad \text{и} \quad f(t\mathbf{x}) = t \cdot f(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Теорема 2.4 (теорема об изоморфизме векторных пространств)

Любое n-мерное векторное пространство V над полем F изоморфно пространству F^n.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ — базис пространства V, $\mathbf{b} \in V$, а $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ — координаты вектора $\mathbf{b}$ в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Определим отображение f из V в F^n правилом: $f(\mathbf{b}) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Из единственности разложения вектора по базису вытекает, что это отображение определено корректно (т. е. образ всякого вектора определен однозначно). Проверим, что отображение f инъективно. Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Это означает, что

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_n\mathbf{a}_n = \mathbf{y}.$$

Инъективность отображения f доказана. Сюръективность этого отображения очевидна: если $\mathbf{y} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in F^n$, то $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_n\mathbf{a}_n$. Наконец, выполнение равенств (4) вытекает из замечания 2.5. Таким образом, f — изоморфизм из V на F^n. $\square$

Теорема об изоморфизме (2)

Теорема об изоморфизме векторных пространств показывает, насколько важной характеристикой векторного пространства является его размерность. С точки зрения действия алгебраических операций размерность конечномерного векторного пространства однозначно определяет это пространство: для всякого n существует (с точностью до изоморфизма) лишь одно n-мерное векторное пространство над данным полем F — пространство F^n. Этим и объясняется упоминавшаяся в предыдущем параграфе особая роль пространства F^n в линейной алгебре.

2.4. Матрица перехода от одного базиса к другому

Возникает естественный вопрос, как связаны между собой координаты одного и того же вектора в разных базисах. Чтобы ответить на него, нам понадобится понятие матрицы перехода от одного базиса к другому.

Определение

Пусть V — векторное пространство над полем F, а $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ и $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ — базисы этого пространства. *Матрицей перехода от базиса P к базису Q* называется квадратная матрица порядка n, в которой, для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$, в i-м столбце записаны координаты вектора $\mathbf{q}_i$ в базисе P. Эта матрица обозначается через T_{PQ}. При этом базис P мы будем называть *старым*, а базис Q — *новым*.

Пусть P и Q — базисы векторного пространства V. Чтобы найти матрицу T_{PQ}, надо найти координаты каждого из векторов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ в базисе P. Для этого можно воспользоваться алгоритмом 1.1. В соответствии с этим алгоритмом, чтобы найти координаты вектора $\mathbf{q}_i$ в базисе P (где $1 \leqslant i \leqslant n$), надо решить методом Гаусса–Жордана крамеровскую систему линейных уравнений, у которой в основной матрице по столбцам записаны координаты векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ в некотором базисе, а в последнем столбце — координаты вектора $\mathbf{q}_i$ в том же базисе. Иными словами, надо решить n систем линейных уравнений, которые имеют одну и ту же основную матрицу и отличаются только столбцом свободных членов. Ясно, что при решении всех этих систем почти все преобразования будут одинаковыми, по разному будет меняться лишь последний столбец. Для того, чтобы сэкономить время, можно решать все эти системы одновременно в соответствии с алгоритмом, изложенным на следующем слайде.

Алгоритм 2.3

Чтобы найти матрицу перехода от базиса $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ векторного пространства V к базису $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ того же пространства, надо составить матрицу размера $n \times 2n$, записав в ее левую часть (первые n столбцов) координаты векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ в некотором базисе, а в ее правую часть (последние n столбцов) координаты векторов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ в том же базисе. После этого надо элементарными преобразованиями всей матрицы привести ее левую часть к единичному виду. В этот момент в правой части по столбцам будут записаны координаты векторов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ в базисе P, т. е. матрица T_{PQ}. $\square$

Матрица перехода от одного базиса к другому: случай, когда старый базис — стандартный

В случае, когда $V = F^n$, а в качестве старого базиса выступает стандартный базис пространства F^n, матрицу перехода от него к любому другому можно выписать сразу, без всяких вычислений. В самом деле, сравнивая определение матрицы перехода от одного базиса к другому с замечанием 2.4, мы получаем

Замечание 2.9

Матрицей перехода от стандартного базиса пространства F^n к произвольному базису Q этого пространства является матрица, в которой по столбцам записаны векторы базиса Q. □

Теперь мы можем ответить на вопрос о том, как связаны между собой координаты одного и того же вектора в разных базисах.

Предложение 2.1

Пусть V — векторное пространство, $\mathbf{x} \in V$, а $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ и $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ — базисы пространства V. Тогда

$$[\mathbf{x}]_P = T_{PQ}[\mathbf{x}]_Q. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе P через $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а его координаты в базисе Q — через $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Положим $T_{PQ} = (t_{ij})$. Тогда $\mathbf{x} = x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n$ и

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= x'_1\mathbf{q}_1 + x'_2\mathbf{q}_2 + \cdots + x'_n\mathbf{q}_n = \\
&= x'_1(t_{11}\mathbf{p}_1 + t_{21}\mathbf{p}_2 + \cdots + t_{n1}\mathbf{p}_n) + \\
&+ x'_2(t_{12}\mathbf{p}_1 + t_{22}\mathbf{p}_2 + \cdots + t_{n2}\mathbf{p}_n) + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ x'_n(t_{1n}\mathbf{p}_1 + t_{2n}\mathbf{p}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{p}_n) = \\
&= (t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + \cdots + t_{1n}x'_n)\mathbf{p}_1 + \\
&+ (t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + \cdots + t_{2n}x'_n)\mathbf{p}_2 + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ (t_{n1}x'_1 + t_{n2}x'_2 + \cdots + t_{nn}x'_n)\mathbf{p}_n.
\end{aligned}$$

Изменение координат вектора при замене базиса (2)

В силу единственности разложения вектора по базису, имеем

$$\begin{cases} x_1 = t_{11}x_1' + t_{12}x_2' + \cdots + t_{1n}x_n', \\ x_2 = t_{21}x_1' + t_{22}x_2' + \cdots + t_{2n}x_n', \\ \dotfill \\ x_n = t_{n1}x_1' + t_{n2}x_2' + \cdots + t_{nn}x_n'. \end{cases}$$

Этот набор равенств эквивалентен матричному равенству (5). $\square$

Обратимость матрицы перехода от одного базиса к другому (1)

В завершение параграфа докажем следующее утверждение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Предложение 2.2

Пусть V — векторное пространство, а $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ и $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n\}$ — базисы этого пространства. Матрица T_{PQ} обратима и обратной к ней является матрица T_{QP}.

Доказательство. Положим $T_{PQ} = (t_{ij})$ и $T_{QP} = (s_{ij})$. Достаточно доказать, что $T_{PQ}T_{QP} = E$. Пусть $T_{PQ}T_{QP} = (x_{ij})$. Используя определение матрицы перехода от одного базиса к другому, имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_j &= s_{1j}\mathbf{q}_1 + s_{2j}\mathbf{q}_2 + \cdots + s_{nj}\mathbf{q}_n = \\
&= s_{1j}(t_{11}\mathbf{p}_1 + t_{21}\mathbf{p}_2 + \cdots + t_{n1}\mathbf{p}_n) + \\
&+ s_{2j}(t_{12}\mathbf{p}_1 + t_{22}\mathbf{p}_2 + \cdots + t_{n2}\mathbf{p}_n) + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ s_{nj}(t_{1n}\mathbf{p}_1 + t_{2n}\mathbf{p}_2 + \cdots + t_{nn}\mathbf{p}_n).
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки, перегруппировывая слагаемые и учитывая определение произведения матриц, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_j &= (t_{11}s_{1j} + t_{12}s_{2j} + \dots + t_{1n}s_{nj})\mathbf{p}_1 +\\ &+ (t_{21}s_{1j} + t_{22}s_{2j} + \dots + t_{2n}s_{nj})\mathbf{p}_2 +\\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +\\ &+ (t_{n1}s_{1j} + t_{n2}s_{2j} + \dots + t_{nn}s_{nj})\mathbf{p}_n =\\ &= x_{1j}\mathbf{p}_1 + x_{2j}\mathbf{p}_2 + \dots + x_{nj}\mathbf{p}_n.\end{aligned}$$

С другой стороны, $\mathbf{p}_j = 0 \cdot \mathbf{p}_1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{p}_{j-1} + 1 \cdot \mathbf{p}_j + 0 \cdot \mathbf{p}_{j+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{p}_n$. В силу единственности разложения вектора по базису, получаем, что

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j,\\ 0, & \text{если } i \neq j.\end{cases}$$

Это означает, что $T_{PQ}T_{QP} = E$, и потому $T_{QP} = (T_{PQ})^{-1}$. □