Глава I. Векторные пространства

§ 1. Векторное пространство, линейная зависимость и независимость векторов

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт естественных наук и математики,
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

1.1. Определение и примеры векторных пространств

Определения

Пусть F — произвольное поле. *Векторным* (или *линейным*) *пространством* над полем F называется произвольное непустое множество V, на котором заданы бинарная операции сложения и, для каждого элемента $t \in F$, унарная операция умножения на t, удовлетворяющие следующим условиям, которые называются *аксиомами векторного пространства*:

1) если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (сложение *коммутативно*);
2) если $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$, то $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (сложение *ассоциативно*);
3) существует элемент $\mathbf{0} \in V$ такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V$;
4) для любого $\mathbf{x} \in V$ существует $\mathbf{y} \in V$ такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$;
5) если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, а $t \in F$, то $t(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = t\mathbf{x} + t\mathbf{y}$;
6) если $\mathbf{x} \in V$, а $t, s \in F$, то $(t + s)\mathbf{x} = t\mathbf{x} + s\mathbf{x}$;
7) если $\mathbf{x} \in V$, а $t, s \in F$, то $t(s\mathbf{x}) = (ts)\mathbf{x}$;
8) если $\mathbf{x} \in V$, то $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Элементы множества V называются *векторами*, а элементы поля F — *скалярами*. Поле F иногда будет называться *основным* полем.

- Векторное пространство V над полем F можно рассматривать как универсальную алгебру в сигнатуре, состоящей из одной бинарной операции (сложения векторов) и набора унарных операций умножения на элементы поля F (по одной операции для каждого $t \in F$). При этом, как показывают аксиомы 1)–4), $\langle V; + \rangle$ — абелева группа. Нейтральный элемент этой группы (вектор $\mathbf{0}$) называется *нулевым вектором*. Вектор, противоположный к вектору $\mathbf{a}$, обозначается через $-\mathbf{a}$.

Приведем примеры векторных пространств.

Пример 1. Пусть V — множество всех обычных («геометрических») векторов трехмерного физического пространства с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на (действительное) число. Все аксиомы векторного пространства в этом случае выполнены; в частности, роль нулевого вектора $\mathbf{0}$ играет вектор $\vec{0}$. Поэтому V является векторным пространством над полем $\mathbb{R}$. Векторным пространством над $\mathbb{R}$ будет также множество всех векторов (в обычном смысле этого слова), коллинеарных некоторой плоскости или некоторой прямой.

- Таким образом, свойства векторов в векторном пространстве являются обобщением свойств обычных, «геометрических» векторов. Именно этим и объясняется и термин «векторное пространство», и использование термина «вектор» применительно к элементам произвольного векторного пространства.

Пример 2. Пусть F — произвольное поле, а n — произвольное натуральное число. Обозначим через F^n множество всевозможных упорядоченных последовательностей вида $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$. В § 6 курса «Основы алгебры» были введены операции сложения элементов из F^n и их умножения на скаляр. Напомним эти определения. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in F^n$, а $t \in F$. Суммой последовательностей $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называется последовательность $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$, а произведением последовательности $\mathbf{x}$ на скаляр t — последовательность $t\mathbf{x} = (tx_1, tx_2, \ldots, tx_n)$. Легко проверяется, что множество F^n с такими операциями является векторным пространством (роль нулевого вектора играет последовательность $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$). Это пространство называют *пространством строк длины n над полем F* или просто *пространством строк*. Оно играет особую роль в теории векторных пространств. Объяснение этому будет дано в конце следующего параграфа. Скаляры $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем называть *компонентами* вектора $\mathbf{x}$.

- Пространство F^1, т. е. множество всех последовательностей вида (x_1), где $x_1 \in F$, естественно отождествить с полем F. Таким образом, любое поле можно рассматривать как векторное пространство над самим собой. Нулевым вектором этого пространства является нуль поля.

При $n = 1, 2, 3$ пространство $\mathbb{R}^n$ имеет естественную геометрическую интерпретацию. Предположим, что в обычном трехмерном пространстве зафиксирован некоторый базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Тогда произвольному вектору $\vec{x}$ из этого пространства можно поставить в соответствие упорядоченную тройку чисел (x_1, x_2, x_3) — координат вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Эта тройка чисел является элементом пространства $\mathbb{R}^3$. Легко проверяется, что отображение f из обычного трехмерного пространства в пространство $\mathbb{R}^3$, заданное правилом $f(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)$, является изоморфизмом. Таким образом,

!! *пространство $\mathbb{R}^3$ изоморфно обычному («физическому») трехмерному пространству. Аналогично, пространство $\mathbb{R}^2$ изоморфно плоскости, а пространство $\mathbb{R}^1$ — прямой в обычном трехмерном пространстве.*

Пример 3. Рассмотрим множество $F[x]$ всех многочленов над полем F. В § 10 курса «Основы алгебры» была определена операция сложения многочленов. Для всякого $t \in F$ определим операцию умножения многочлена на скаляр t правилом: если $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in F[x]$, то $tf = ta_n x^n + ta_{n-1}x^{n-1} + \dots + ta_0$. Выполнимость всех аксиом векторного пространства легко проверяется (роль нулевого вектора при этом играет многочлен o). Таким образом, множество $F[x]$ является векторным пространством. Оно называется *пространством многочленов*. Для всякого натурального n обозначим через $F_n[x]$ множество всех многочленов степени $\leqslant n$ над полем F. Ясно, что $F_n[x]$ также будет векторным пространством относительно сложения многочленов и умножения многочлена на скаляры из F.

Пример 4. Рассмотрим множество всех функций от одной переменной из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Введем операции сложения функций и умножения функции на число стандартным образом: если f и g — две функции, а $t \in \mathbb{R}$, то $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(tf)(x) = tf(x)$ для всякого $x \in \mathbb{R}$. Ясно, что эти операции удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства (в качестве нулевого вектора выступает функция, значение которой при любом x равно 0). Это векторное пространство называется *пространством функций*. Если ограничиться непрерывными или дифференцируемыми функциями из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, мы получим *пространство непрерывных функций* и *пространство дифференцируемых функций* соответственно.

Примеры векторных пространств: пространство решений однородной системы линейных уравнений

Пример 5. Рассмотрим произвольную однородную систему линейных уравнений с n неизвестными над полем F и обозначим через V множество всех ее частных решений. Ясно, что $V \subseteq F^n$. Из теоремы 6.1 курса «Основы алгебры» вытекает, что операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр, определенные в пространстве F^n, являются и операциями в V. Все аксиомы векторного пространства для множества V с этими операциями выполнены (в качестве нулевого вектора выступает нулевое решение системы). Таким образом, множество V является векторным пространством, которое называется *пространством решений однородной системы*.

Примеры векторных пространств: пространство матриц и нулевое пространство

Пример 6. Пусть F — поле, а m и n — натуральные числа. Напомним, что через $F^{m\times n}$ обозначается множество всех матриц размера $m \times n$. В § 4 курса «Основы алгебры» была введена операция сложения матриц, а в § 6 того же курса — операция умножения матрицы на скаляр. Эти операции удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства. Таким образом, множество $F^{m\times n}$ с операциями сложения матриц и умножения матриц на скаляры из F является векторным пространством, которое называется *пространством матриц размера* $m \times n$. Нулевым вектором этого пространства является нулевая матрица размера $m \times n$.

Пример 7. Пусть V — произвольное множество, состоящее из одного элемента $\mathbf{a}$. Операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр в таком множестве вводятся просто: $\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ и $t \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ для любого t. Ясно, что все аксиомы векторного пространства выполняются. Таким образом, V можно рассматривать как векторное пространство. При этом его единственный элемент $\mathbf{a}$ будет нулевым вектором. Такое пространство называется *нулевым*.

Укажем одно полезное свойство операций в векторном пространстве.

Лемма 1.1

Пусть $\mathbf{x}$ *— произвольный вектор из векторного пространства, а* t *— произвольный скаляр. Равенство* $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *выполнено тогда и только тогда, когда либо* $t = 0$, *либо* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Доказательство. *Достаточность.* Ясно, что

$$0 \cdot \mathbf{x} = (t - t)\mathbf{x} = t\mathbf{x} - t\mathbf{x} = \mathbf{0},$$
$$t \cdot \mathbf{0} = t(\mathbf{x} - \mathbf{x}) = t\mathbf{x} - t\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Необходимость. Пусть $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $t \neq 0$. В силу уже доказанной достаточности, $t^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Умножая обе части равенства $t\mathbf{x} = \mathbf{0}$ на t^{-1}, получаем, что $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. □

Из леммы 1.1 вытекает

Замечание 1.1

Всякое ненулевое векторное пространство V над бесконечным полем F состоит из бесконечного числа векторов.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ — ненулевой вектор из V, а t_1 и t_2 — различные скаляры из F. Поскольку $t_1 - t_2 \neq 0$, из леммы 1.1 вытекает, что $(t_1 - t_2)\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, откуда $t_1\mathbf{x} \neq t_2\mathbf{x}$. Поскольку поле F бесконечно, получаем, что бесконечным является уже множество векторов $\{t\mathbf{x} \mid t \in F\}$, а тем более и все пространство V. $\square$

1.2. Линейная зависимость и независимость

Перейдем к понятиям, которые будут играть весьма важную роль в дальнейшем.

Определения

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ — система векторов из векторного пространства V над полем F, а $t_1, t_2, \ldots, t_k \in F$. Вектор вида

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k \tag{1}$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Линейная комбинация (1) называется *тривиальной*, если $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$, и *нетривиальной*, если хотя бы один из скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_k$ отличен от нуля. Если вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$, то говорят, что $\mathbf{b}$ *линейно выражается* через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, и *линейно независимыми* в противном случае, т. е. если любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нулевому вектору.

Линейная зависимость и независимость в обычном пространстве (1)

Как отмечалось выше, плоскость можно отождествить с пространством $\mathbb{R}^2$, а трехмерное физическое пространство — с пространством $\mathbb{R}^3$. Оказывается, что введеные только что понятия линейной зависимости и независимости векторов в этих двух частных случаях равносильны некоторым хорошо знакомым нам понятиям.

Замечание 1.2

а) *Два вектора на плоскости или в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

б) *Любой набор из более чем двух векторов на плоскости линейно зависим.*

в) *Три вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

г) *Любой набор из более чем трех векторов в трехмерном пространстве линейно зависим.*

Доказательство. а) *Необходимость.* Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы. Тогда $p\vec{a} + q\vec{b} = \vec{0}$ для некоторых скаляров p и q, хотя бы один из которых отличен от 0. Пусть, без ограничения общности, $p \neq 0$. Тогда $\vec{a} = -\frac{q}{p} \cdot \vec{b}$, и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны по критерию коллинеарности векторов.

Достаточность. Предположим теперь, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если $\vec{b} = \vec{0}$, то $0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = \vec{0}$. Если же $\vec{b} \neq \vec{0}$, то по критерию коллинеарности $\vec{a} = t\vec{b}$ для некоторого t, т. е. $1 \cdot \vec{a} - t\vec{b} = \vec{0}$. В обоих случаях получаем, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.

б) Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — векторы на плоскости и $n > 2$. Если $\vec{a}_1 = \vec{0}$, то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы, поскольку

$$1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Если $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, но векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны, то $\vec{a}_2 = t\vec{a}_1$ для некоторого t по критерию коллинеарности векторов. Но тогда векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы, поскольку

$$t\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Пусть, наконец, векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны. Тогда они образуют базис плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Разложим вектор $\vec{a}_3$ по этому базису: $\vec{a}_3 = t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2$ для некоторых чисел t_1 и t_2. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы, поскольку

$$t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 - \vec{a}_3 + 0 \cdot \vec{a}_4 + \cdots + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}.$$

в) *Необходимость.* Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы. Тогда $p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} = \vec{0}$ для некоторых скаляров p, q и r, хотя бы один из которых отличен от 0. Пусть, без ограничения общности, $p \neq 0$. Тогда $\vec{a} = -\frac{q}{p} \cdot \vec{b} - \frac{r}{p} \cdot \vec{c}$. Это значит, что вектор $\vec{a}$ лежит в той плоскости, которой принадлежат векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и потому векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Достаточность. Предположим теперь, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{c} = \vec{0}$, то $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Если $\vec{c} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \parallel \vec{c}$, то по критерию коллинеарности векторов $\vec{b} = t\vec{c}$ для некоторого t, и потому $0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} - t\vec{c} = \vec{0}$. Наконец, если $\vec{b} \nparallel \vec{c}$, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис той плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. По теореме о разложении вектора по базису на плоскости $\vec{a} = t\vec{b} + s\vec{c}$ для некоторых чисел t и s, откуда $\vec{a} - t\vec{b} - s\vec{c} = \vec{0}$. Во всех трех случаях получаем, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы.

г) Это утверждение можно доказать геометрически, аналогично тому, как выше было доказано утверждение б). Мы приведем другое, алгебраическое доказательство. Пусть $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ — векторы в трехмерном пространстве и $n > 3$. Зафиксируем в пространстве некоторый базис и запишем координаты векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ в этом базисе: $\vec{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i})$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$. Предположим, что $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_n\vec{a}_n = \vec{0}$ для некоторых чисел $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Распишем это векторное равенство покоординатно. Получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} t_1a_{11} + t_2a_{12} + \cdots + t_na_{1n} = 0, \\ t_1a_{21} + t_2a_{22} + \cdots + t_na_{2n} = 0, \\ t_1a_{31} + t_2a_{32} + \cdots + t_na_{3n} = 0. \end{cases}$$

Это однородная система линейных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных. В силу замечания 7.3 курса «Основы алгебры» эта система имеет по крайней мере одно ненулевое решение. Иными словами, существует набор чисел $t_1, t_2, \ldots, t_n$, по крайней мере одно из которых не равно нулю, такой, что $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \cdots + t_n\vec{a}_n = \vec{0}$. Иными словами, набор векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ линейно зависим. $\square$

Пример линейно независимой системы векторов

Приведем пример линейно независимой системы векторов в пространстве F^n, которая будет многократно возникать и играть особую роль в дальнейшем.

Положим $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Замечание 1.3

Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ линейно независима.

Доказательство. Предположим, что $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ для некоторых $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$. Очевидно, что

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Таким образом, $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{0}$, т. е. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Мы доказали, что если какая-то линейная комбинация векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ равна нулевому вектору, то эта комбинация тривиальна. □

В процессе доказательства этого замечания фактически доказано следующее полезное для дальнейшего утверждение.

Замечание 1.4

Если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольный вектор из пространства F^n, то $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. □

Свойства линейно зависимых и линейно независимых систем векторов (1)

Отметим несколько простых свойств линейно зависимых и линейно независимых систем векторов.

Лемма 1.2

Если среди векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ имеется нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. Тогда

$$0 \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_{i-1} + 1 \cdot \mathbf{a}_i + 0 \cdot \mathbf{a}_{i+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Следовательно, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. $\square$

Лемма 1.3

Подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима. Если к линейно зависимой системе векторов добавить произвольную конечную систему векторов, то расширенная система векторов также будет линейно зависимой.

Доказательство. Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы. Выберем произвольное подмножество этой системы векторов. Для простоты обозначений будем считать, что мы взяли сколько-то первых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, где $m \leqslant k$ (в противном случае мы всегда можем перенумеровать исходные векторы). Предположим, что векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы, т. е. что существуют скаляры $t_1, t_2, \ldots, t_m$, по крайней мере один из которых отличен от нуля, такие, что $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$. Тогда

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Поскольку среди скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_m$ хотя бы один отличен от нуля, последнее равенство противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Первое утверждение леммы доказано.

Пусть теперь система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависима, т. е. существует нетривиальная линейная комбинация $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m$ этих векторов, равная нулевому вектору. Добавим к исходной системе векторы $\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_k$. Тогда

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_m\mathbf{a}_m + 0 \cdot \mathbf{a}_{m+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

Следовательно, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы.

Лемма 1.4

Если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *линейно независимы, а векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ *линейно зависимы, то вектор* $\mathbf{b}$ *линейно выражается через векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Доказательство. По условию существуют скаляры $t_1, t_2, \ldots, t_k, s$, по крайней мере один из которых не равен нулю такие, что

$$t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k + s\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Если $s = 0$, то $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ и по крайней мере один из скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_k$ отличен от нуля. Это, однако, противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Следовательно, $s \neq 0$, и потому $\mathbf{b} = -\frac{t_1}{s} \cdot \mathbf{a}_1 - \frac{t_2}{s} \cdot \mathbf{a}_2 - \cdots - \frac{t_k}{s} \cdot \mathbf{a}_k$. □

Лемма 1.5

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через остальные.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы, т. е. $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ для некоторых скаляров $t_1, t_2, \ldots, t_k$, не все из которых равны нулю. Пусть $t_i \neq 0$. Тогда

$$\mathbf{a}_i = -\frac{t_1}{t_i}\cdot\mathbf{a}_1 - \frac{t_2}{t_i}\cdot\mathbf{a}_2 - \cdots - \frac{t_{i-1}}{t_i}\cdot\mathbf{a}_{i-1} - \frac{t_{i+1}}{t_i}\cdot\mathbf{a}_{i+1} - \cdots - \frac{t_k}{t_i}\cdot\mathbf{a}_k,$$

т. е. вектор $\mathbf{a}_i$ линейно выражается через остальные.

Достаточность. Если вектор $\mathbf{a}_i$ линейно выражается через остальные, т. е. $\mathbf{a}_i = r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2 + \cdots + r_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + r_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \cdots + r_k\mathbf{a}_k$ для некоторых скаляров $r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_k$, то

$$r_1\mathbf{a}_1 + r_2\mathbf{a}_2 + \cdots + r_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} - \mathbf{a}_i + r_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \cdots + r_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0},$$

и потому векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависимы. $\square$