# Распознование лиц

1 мая 2020г.

В этой подзадаче вам нужно реализовать простейшее распознавание людей по лицам. Пусть дана база данных $Q$ из чёрно-белых фотографий лиц. В $Q$ обычно помещают несколько фотографий каждого человека в разных ракурсах. Каждое фото из $Q$ представляет собой матрицу $64 \times 64$, элементы которой — это числа от 0 до 255, задающие градацию серого. Задача распознавания состоит в том, чтобы по заданному изображению $p \in \mathbb{R}^{64\times 64}$ понять, на какое из лиц в $Q$ оно больше всего похоже. Очевидное решение $\arg\min_{q\in Q} ||p-q||_F$ неприемлемо по двум причинам: (1) база данных $Q$ обычно занимает много места и не всегда есть возможность хранить её целиком, (2) возможность ошибок достаточно велика, потому что расстояния $||p-q||_F$ сильно меняются даже при минимальных движениях лица в $p$.

Решим проблему (1) следующим образом. Вам предстоит построить 20 "эталонных лиц" $f_1, \ldots, f_{20} \in \mathbb{R}^{64\times 64}$ (число 20 подобрано экспериментально для конкретной базы данных из задачи), комбинации которых $\sum_{i=1}^{20} c_i f_i$ (при $c_1, \ldots, c_{20} \in \mathbb{R}$) наилучшим образом приближают матрицы из $Q$. Под наилучшим приближением будем понимать минимизацию суммы квадратов отклонений (более строго это описано далее). Такая постановка приводит к задаче наилучшего приближения $Q$ подпространством $\langle f_1, \ldots, f_{20}\rangle$. Но на практике приближение подпространством не всегда адекватно отражает геометрию $Q$.

Чтобы расширить область рассматриваемых приближений, наложим на комбинации $\sum_{i=1}^{20} c_i f_i$ дополнительное ограничение $\sum_{i=1}^{20} c_i = 1$; это ограничение не исключает некоторые подпространства из рассмотрения: например, если $f_{20} = 0$, то всевозможные комбинации $\sum_{i=1}^{20} c_i f_i$, такие что $\sum_{i=1}^{20} c_i = 1$, в точности образуют подпространство $\langle f_1, \ldots, f_{19}\rangle$.

## 1 Репараметризация многообразия

Решать оптимизационную задачу с ограничением $c_1+c_2+\ldots+c_n = 1$ неудобно. Проще решать задачу, когда на переменные не наложены ограничения.

**Лемма 1.** *Пусть* $L_1 = \{\sum_{i=1}^{N} c_i f_i | \sum_{i=1}^{N} c_i = 1\}$ *— линейное многообразие. Обозначим* $\bar{f} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i$ *и* $\bar{f}_i = f_i - \bar{f}$. *Пусть* $L_2 = \{\bar{f} + \sum_{i=1}^{N-1} d_i \bar{f}_i | d_i \in \mathbb{R}\}$. *Тогда* $L_1 = L_2$.

*Доказательство.* Докажем, что $L_1 \subseteq L_2$. Рассмотрим произвольный $y \in L_1$. Пусть $y = \sum_{i=1}^{N} c_i f_i$ для некоторых $c_1, c_2, \ldots, c_n$, таких что $c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 1$. Тогда

$$y = \sum_{i=1}^{N} c_i f_i = \sum_{i=1}^{N} c_i(\bar{f} + \bar{f}_i) = (\sum_{i=1}^{N} c_i)\bar{f} + \sum_{i=1}^{N} c_i \bar{f}_i = \bar{f} + \sum_{i=1}^{N} c_i \bar{f}_i. \qquad (1)$$

Осталось избавиться от слагаемого $c_N \bar{f}_N$. Из определения $\bar{f} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i$ получаем, что $f_N = N\bar{f} - \sum_{i=1}^{N-1} f_i = N\bar{f} - \sum_{i=1}^{N-1}(\bar{f} + \bar{f}_i) = \bar{f} - \sum_{i=1}^{N-1} \bar{f}_i$. Так как $\bar{f}_N = f_n - \bar{f}$, получаем $\bar{f}_N = -\sum_{i=1}^{N-1} \bar{f}_i$. Подставляем в (1).

$$y = \bar{f} + \sum_{i=1}^{N-1} c_i \bar{f}_i - c_N \left( \sum_{i=1}^{N-1} \bar{f}_i \right) = \bar{f} + \sum_{i=1}^{N-1} (c_i - c_n)\bar{f}_i.$$

Обозначая $d_i = c_i - c_n$, получаем требуемое.

Теперь докажем, что $L_2 \subseteq L_1$. Рассмотрим произвольный $y \in L_2$, пусть $y = \bar{f} + \sum_{i=1}^{N-1} d_i \bar{f}_i$. Тогда

$$\begin{aligned} y = \bar{f} + \sum_{i=1}^{N-1} d_i \bar{f}_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i + \sum_{i=1}^{N-1} d_i (f_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f_j) = \\ = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i + \sum_{i=1}^{N-1} d_i f_i - \frac{\sum_{i=1}^{N-1} d_i}{N} \sum_{i=1}^{N} f_i = \\ = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1 + N d_i - \sum_{j=1}^{N-1} d_j}{N} f_i + \frac{1 + \sum_{j=1}^{N-1} d_j}{N} f_N. \end{aligned}$$

Обозначим

$$c_i = \begin{cases} \dfrac{1 + N d_i - \sum\limits_{j=1}^{N-1} d_j}{N}, & \text{если } i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ \dfrac{1 - \sum\limits_{j=1}^{N-1} d_j}{N}, & \text{если } i = N. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} c_i = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1 + N d_i - \sum\limits_{j=1}^{N-1} d_j}{N} + \frac{1 - \sum\limits_{j=1}^{N-1} d_j}{N} = 1,$$

что и требовалось доказать. $\square$