Лекция. Определитель квадратной матрицы

Пусть A – квадратная матрица $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & & \dots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$. *Определителем* матрицы A (обозначается как $\det A$) будем называть число, вычисляемое в соответствии со следующим правилом:

1) если $n = 1$, то $\det A = \alpha_{11}$;
2) если $n > 1$, то

$$\det A = \alpha_{11}M_{11}(A) - \alpha_{12}M_{12}(A) + \dots + (-1)^{j+1}\alpha_{1j}M_{1j}(A) + \dots + (-1)^{n+1}\alpha_{1n}M_{1n}(A),$$

где $M_{ij}(A)$ – определитель матрицы, получаемой из матрицы A вычёркиванием i-й строки и j-го столбца.

Число $M_{ij}(A)$ называется *минором* $n - 1$-го порядка матрицы A.

Нетрудно проверить, что для матриц 2-го и 3-го порядка их определители те же, что были определены ранее непосредственно.

Ясно, что отображение $A \to \det A$ является всюду определённой функцией на множестве всех квадратных матриц.

Некоторые важные свойства этого отображения приведены в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть A – квадратная матрица $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2i} & \dots & \alpha_{2n} \\ & & & \dots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{ni} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$.

1) Если $B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \beta\alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \beta\alpha_{2i} & \dots & \alpha_{2n} \\ & & & \dots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \beta\alpha_{ni} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, то $\det B = \beta \det A$.
2) Если $C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \beta_{1i} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \beta_{2i} & \dots & \alpha_{2n} \\ & & & \dots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \beta_{ni} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, а $D = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1i} + \beta_{1i} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2i} + \beta_{2i} & \dots & \alpha_{2n} \\ & & & \dots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{ni} + \beta_{ni} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, то $\det D = \det A + \det C$.

Доказательство проведём индукцией по n.

Б.И. Для $n = 1$ оба пункта теоремы очевидны.

Ш.И. Пусть теорема справедлива для квадратных матриц размера $n - 1$. Докажем её для матриц размера n.

Запишем по определению $\det B =$

$$\alpha_{11}M_{11}(B) - \alpha_{12}M_{12}(B) + \dots + (-1)^{i+1}\beta\alpha_{1i}M_{1i}(B) + \dots + (-1)^{j+1}\alpha_{1j}M_{1j}(B) + \dots + (-1)^{n+1}\alpha_{1n}M_{1n}(B).$$

Заметим теперь, что при $j \neq i$ минор $M_{1j}(B) = \beta M_{1j}(A)$ по предположению индукции, а минор $M_{1i}(B) = M_{1i}(A)$. Поэтому $\det B =$

$\beta(\alpha_{11}M_{11}(A) - \alpha_{12}M_{12}(A) + \ldots + (-1)^{i+1}\beta\alpha_{1i}M_{1i}(A) + \ldots + (-1)^{j+1}\alpha_{1j}M_{1j}(A) + \ldots + (-1)^{n+1}\alpha_{1n}M_{1n}(A)) = \beta\det A$.

Запишем по определению $\det D =$

$= \alpha_{11}M_{11}(D) - \alpha_{12}M_{12}(D) + \ldots + (-1)^{j+1}(\alpha_{1i} + \beta_{1i})M_{1i}(D) + (-1)^{j+1}\alpha_{1j}M_{1j}(D) + \ldots + (-1)^{n+1}\alpha_{1n}M_{1n}(D)$.

Заметим теперь, что при $j \neq i$ минор $M_{1j}(D) = M_{1j}(A) + M_{1j}(C)$ по предположению индукции, а минор $M_{1i}(D) = M_{1i}(A) = M_{1i}(C)$. Поэтому $\det D =$

$(\alpha_{11}M_{11}(A) - \alpha_{12}M_{12}(A) + \ldots + (-1)^{i+1}\alpha_{1i}M_{1i}(A) + \ldots + (-1)^{j+1}\alpha_{1j}M_{1j}(A) + \ldots + (-1)^{n+1}\alpha_{1n}M_{1n}(A))$
$+ (\alpha_{11}M_{11}(C) - \alpha_{12}M_{12}(C) + \ldots + (-1)^{i+1}\beta_{1i}M_{1i}(C) + \ldots (-1)^{j+1}\alpha_{1j}M_{1j}(C) + \ldots + (-1)^{n+1}\alpha_{1n}M_{1n}(C))$
$= \det A + \det C$.

Тем самым, теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть A – квадратная матрица.

1) Если в матрице A два столбца поменять местами, то знак определителя сменится на противоположный.
2) Если в матрице A есть два одинаковых столбца, то $\det A = 0$.
3) Если в матрице A к одному столбцу прибавить другой столбец, то определитель не изменится.

Доказательство пункта 1) проведём индукцией по размеру матрицы n.

Б.И. $n = 2$. Проверяется непосредственно.

Ш.И. Пусть теорема справедлива для квадратных матриц размера $n - 1$. Докажем её для матриц размера n.

Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1i} & \ldots & \alpha_{1j} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2i} & \ldots & \alpha_{2j} & \ldots & \alpha_{2n} \\ & & & \ldots & & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{ni} & \ldots & \alpha_{nj} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1j} & \ldots & \alpha_{1i} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2j} & \ldots & \alpha_{2i} & \ldots & \alpha_{2n} \\ & & & \ldots & & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nj} & \ldots & \alpha_{ni} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$. Рассмотрим сначала случай, когда $j = i + 1$. Запишем $\det B =$

$\alpha_{11}M_{11}(B) - \alpha_{12}M_{12}(B) + \ldots + (-1)^{i+1}\alpha_{1i+1}M_{1i}(B) - (-1)^{i+1}\alpha_{1i}M_{1i+1}(B) + \ldots + (-1)^{n+1}\alpha_{1n}M_{1n}(B)$.

Заметим, что при $k \neq i$ и $k \neq i + 1$минор $M_{1k}(B) = -M_{1k}(A)$ по предположению индукции, а $M_{1i}(B) = M_{1i+1}(A)$ и $M_{1i+1}(B) = M_{1i}(A)$. Поэтому $\det B = -\det A$.

Если же столбцы не соседние, то мы можем поменять их местами, переставляя сначала i-ый столбец с соседними, пока не переместим его за j-ый столбец, а затем j-ый столбец (который теперь будет стоять на $j - 1$-м месте) аналогично переместим на место i-го столбца. Количество таких перестановок равно $2(j - i) - 1$, поэтому знак определителя сменится на противоположный.

Пункт 2) легко получается из пункта 1).

Пункт 3) вытекает из пункта 2) этой теоремы и пункта 2) теоремы 1.

Из теорем 1 и 2 следует, что $\det A$ является одной из возможных функций $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Т.е. существование функции $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ нами доказано. Верно ли, что это единственная функция с указанными в её определении свойствами?

Теорема 3. Пусть A – квадратная матрица $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1i} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2i} & \ldots & \alpha_{2n} \\ & & & \ldots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{ni} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – векторы-столбцы матрицы A. Тогда $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \det A$.

Доказательство. Приведём матрицу A методом Гаусса к верхнетреугольному виду. Для получившейся матрицы значения $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\det A$ совпадают. Значит, они равны и для матрицы A.

Теорема 4. Пусть A – квадратная матрица $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1i} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2i} & \ldots & \alpha_{2n} \\ & & & \ldots & & \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{ki} & \ldots & \alpha_{kn} \\ & & & \ldots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{ni} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$. Тогда

$$\det A = (-1)^{k+1}\alpha_{k1}M_{k1}(A) + (-1)^{k+2}\alpha_{k2}M_{k2}(A) + \ldots + (-1)^{k+i}\alpha_{ki}M_{ki}(A) + \ldots + (-1)^{k+n}\alpha_{kn}M_{kn}(A) =$$
$$= (-1)^{1+i}\alpha_{1i}M_{1i}(A) + (-1)^{2+i}\alpha_{2i}M_{2i}(A) + \ldots + (-1)^{k+i}\alpha_{ki}M_{ki}(A) + \ldots + (-1)^{n+i}\alpha_{ni}M_{n\,i}(A).$$

Доказательство. Первое равенство вытекает из определения, если k-ю строку переместить на первое место последовательными обменами со строками, стоящими выше её. Второе равенство вытекает из первого и того факта, что определитель транспонированной матрицы совпадает с определителем исходной матрицы.

Первое равенство называется *разложением определителя матрицы по* k-ой *строке*, а второе – *разложением матрицы по* i-му *столбцу*.