Теорема (о полноте метода резолюций). Множество дизъюнктов противоречиво тогда и только тогда, когда из него выводим пустой дизъюнкт.

Доказательство. Если множество дизъюнктов непротиворечиво, значит, существует интерпретация, в которой они все истинны. Но тогда истинной является и формула, полученная по правилу резолюций. А тогда не может быть выведен пустой дизъюнкт.

Обратно. Доказательство проведём индукцией по количеству различных предметных символов, фигурирующих в записях всех дизъюнктов. Обозначим это количество n. Без ограничения общности можно считать, что используемые предметные символы – это x_1, x_2, …, x_n.

Б.И. $n = 1$, т.е. все дизъюнкты состоят из одного литерала, каждый из которых x_1 или $\neg x_1$. Тогда противоречивость означает, что оба таких литерала присутствуют. Из этой пары выводим пустой дизъюнкт.

Ш.И. Пусть для противоречивых множеств дизъюнктов с числом предметных символов, меньшим n, уже доказано. Рассмотрим противоречивое множество M с n предметными символами. Через M_+ обозначим множество тех дизъюнктов из M, которые не содержат $\neg x_n$, а через M_- – множество тех дизъюнктов из M, которые не содержат x_n. (Вообще говоря, множество $M_+ \cap M_-$ может быть непустым). Через $\widehat{M}_+$ обозначим множество дизъюнктов, получаемых из дизъюнктов множества M_+ вычёркиванием символа x_n, а через $\widehat{M}_-$ – множество дизъюнктов, получаемых из дизъюнктов множества M_- вычёркиванием литерала $\neg x_n$. Покажем, что каждое их этих множеств противоречиво.

Допустим, что $\widehat{M}_+$ непротиворечиво. Значит, существует такая интерпретация φ символов x_1, x_2, …, x_{n-1}, при которой каждый дизъюнкт из $\widehat{M}_+$ имеет значение 1. Тогда построим интерпретацию φ^* множества M по правилу $\varphi^*(x_i) = \varphi(x_i)$ при $1 \le i \le n - 1$ и $\varphi^*(x_n) = 0$. Ясно, при интерпретации φ^* все дизъюнкты из M_- тоже получат значение 1. Поскольку $M = M_+ \cup M_-$, φ^* – интерпретация, при которой все формулы из M получают значение 1. Но M противоречиво!

Аналогично доказывается, что $\widehat{M}_-$ тоже противоречиво.

По предположению индукции из $\widehat{M}_+$ выводится пустой дизъюнкт. Это значит, что из M_+ по правилу резолюций выводится либо пустой дизъюнкт (и тогда всё доказано), либо x_n. Аналогично, из M_- выводится либо пустой дизъюнкт (и тогда всё доказано), либо $\neg x_n$. Но тогда во вторых случаях из $M = M_+ \cup M_-$ выводится $\{x_n, \neg x_n\}$, откуда выводится пустой дизъюнкт.