Глава 2. Логика 1-го порядка

§ 1. Понятие логики 1-го порядка.

Кто помнит, какой фразой начинается роман Л.Н.Толстого «Анна Каренина»? «Все счастливые семьи похожи друг на друга, каждая несчастливая семья несчастлива по-своему». Можно ли записать эту фразу в логике высказываний?

Трудности возникают из-за слов «все» и «каждая». Это другой язык и примитивное представление о нём у вас есть с первых лекций первого курса.

Мы начнём опять с построения формального языка.

Алфавит: { x_1, x_2, …, x_i, …, f_1^0, f_2^0, …, f_n^0, …, f_1^1, f_2^1, …, f_n^1, …, f_n^m, …, P_1^0, P_2^0, …, P_n^0, …, P_1^1, P_2^1, …, P_n^1, …, P_n^m, … и девять особых символов $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, (и). Символы x_1, x_2, …, x_i, …, как и прежде, будем называть предметными, символы f_1^0, f_2^0, …, f_n^0, …, f_1^1, f_2^1, …, f_n^m, … – функциональными, P_1^0, P_2^0, …, P_n^0, …, P_1^1, P_2^1 – предикатными (или пропозициональными), символы $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ – связками, $\forall$, $\exists$ – кванторами.

У функционального и предикатного символа нижний символ – его номер, а верхний называется **арностью** этого символа.

Прежде, чем определить формулы, т.е. слова языка логики 1-го порядка, введем промежуточное понятие – **терм**.

1) Любой предметный символ – терм;
2) Для любых термов t_1, t_2, …, t_m и функционального символа f_n^m слово $f_n^m t_1 t_2 \ldots t_m$ – терм;
3) Других термов нет.

Теперь о формулах.

1) Для любых термов t_1, t_2, …, t_m и предикатного символа $P_n^m t_1 t_2 \ldots t_m$ – формула (такую формулу называют атомарной);
2) Если F и G – формулы, то $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $\forall x_i F$, $\exists x_i F$ – тоже формулы;
3) Других формул нет.

Совокупность функциональных и предикатных символов, используемых в формуле, называют её **сигнатурой**.

А теперь об интерпретации формул.

Пусть M – произвольное множество, F – формула. Тогда символы x_1, x_2, …, x_n, которые присутствуют в записи формулы F, – это переменные, значениями которых являются элементы этого множества, каждый символ f_n^m, имеющийся в сигнатуре формулы, интерпретируется как всюду определённая функция, отображающая M^n в M, каждый символ P_n^m, имеющийся в сигнатуре формулы, интерпретируется как характеристическая функция некоторого подмножества из M^n.

Вопрос 1. Как по-другому называется всюду определённая функция, отображающая M^n в M?

n-арной алгебраической операцией на множестве M.

Вопрос 2. Как по-другому называется подмножество из M^n.

n-арным отношением на множестве M.

Следовательно, чтобы можно было осуществить интерпретацию формулы, на множестве должно быть столько операций и отношений, сколько их есть в сигнатуре формулы.

Вопрос 3. Как называется множество с заданной на нём совокупностью операций?

Универсальной алгеброй.

Определение. Множество, на котором задана совокупность операций и отношений, называется **алгебраической системой**.

Тем самым, интерпретация формул возможна только на подходящей алгебраической системе. Множество, на котором заданы операции и отношения называют **носителем**, а набор операций и отношений – **сигнатурой** данной алгебраической системы.

Вопрос 4. Что такое характеристическая функция подмножества?

Если $A \subseteq B$, то характеристической функцией подмножества A называется функция, всюду определённая на B и принимающая значение 1 на элементах из A и значение 0 на остальных элементах из B. Мы будем считать, что это булевы 0 и 1, т.е. над ними выполнимы булевы операции.

Нулярный функциональный символ интерпретируется нулярная функция, т.е. как константа, т.е. как фиксированный элемент множества M. Нулярный предикатный символ тоже интерпретируется как нулярная функция, т.е. как булева константа – 0 или 1.

При интерпретации терма $f_n^m x_1x_2\dots x_m$ мы естественно будем писать $f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$, а для терма $f_n^m t_1t_2\dots t_m$ будем писать $f_n(t_1, t_2, \dots, t_m)$, подразумевая, что термы $t_1, t_2, \dots, t_m$ уже явно или неявно интерпретированы.

Для бинарных операций f_n^2, например, +, мы будем использовать привычную запись $x_1\ f_n\ x_2$, т.е. $x_1 + x_2$, а не $+\ x_1, x_2$. Между прочим, такую префиксную запись бинарных операций в 1920 году предложил польский математик Ян Лукасевич. Математическим сообществом она была воспринята вяло, но в середине 50-х стала активно использоваться постфиксная запись, которую назвали обратной польской записью.

Вопрос 4. В чём преимущества такой записи операций?

Можно не применять скобки. Собственно этим я воспользовался, давая определение терма.

Для унарных операций разнообразие настолько велико, что уж как привыкли, так и будем писать. Например, для операции возведения в квадрат будем писать ${x_1}^2$ (возвышенная постфиксная запись), а для извлечения корня – $\sqrt{x_1}$ (обычная префиксная, только вместо скобок черта сверху).

Аналогичные соглашения мы принимаем для интерпретации атомарных формул. Логические связки интерпретируются так же, как и в логике высказываний.

Прежде, чем говорить об интерпретации кванторов, введём понятия свободных и связанных символов и переменных.

1) Если в формуле отсутствуют кванторы, то все предметные символы считаются свободными.

2) Если в формуле F есть предметный символ x_i и он свободен, то в формулах $\forall x_i F$ и $\exists x_i F$ этот символ считается связанным, остальные свободные символы формулы F остаются свободными. Если в формуле F есть предметный символ x_i, но он связан или его нет вообще, то в формулах $\forall x_i F$ и $\exists x_i F$ этот символ считается связанным, остальные свободные символы формулы F остаются свободными.

Пример. $(\forall x_2(\forall x_1(P_1^2 x_1x_2 \wedge P_2^2 x_1x_3) \to P_2^2 x_1x_2) \vee \exists\ x_3 P_1^2 x_2x_3)$.

Вопрос. Какие символы свободны в этой формуле?

Вот ответ: $(\forall x_2(\forall x_1(P_1^2 x_1x_2 \wedge P_2^2 x_1\underline{x_3}) \to P_2^2 \underline{x_1}x_2) \vee \exists x_3 P_1^2 \underline{x_2}x_3)$ – свободные символы подчёркнуты.

А теперь о свободных и связанных переменных.

Посмотрите на следующую запись: $\int_0^1 (x-y)^2 dy$. Сколько переменных в этой записи? Две. А функцию скольких переменных даёт эта формула? Одной – переменной x.

Ещё запись: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. Сколько переменных в этой записи? Две. А функцию скольких переменных даёт эта формула? Одной – переменной n.

Ещё запись:

```
function Summa(n: integer): integer;
var k, m: integer;
begin
  m := 0;
  for k := 1 to n do m := m + 2*k +1;
end;
```

Сколько переменных в этой записи? Три. А функцию скольких переменных она даёт? Одной – переменной n.

Вопрос 5. Какую функцию описывает эта программа?

Какую роль играют те переменные, которые в формуле присутствуют, но аргументами функции не являются?

Они пробегают некоторое множество значений. В первом случае это отрезок [0; 1], во втором – отрезок натурального ряда от 1 до n. В третьем случае переменная k тоже пробегает отрезок натурального ряда от 1 до n. Переменная m тоже пробегает некоторое подмножество множества натуральных чисел.

Каждая такая переменная – это некий мавр, который делает своё дело и после этого уходит. Важно, конечно, чтобы он при этом не успел задушить Дездемону.

Теперь давайте посмотрим на формулу $\exists x_1(P_1^2 f_1^1 x_1 x_2 \wedge P_2^2 x_1 f_1^0)$. Свободный символ в ней x_2. Напишем интерпретацию этой формулы на множестве натуральных чисел с такой интерпретацией термов и атомарных формул:

$f_1^1 x_1$ интерпретируем как ${x_1}^2$;

f_1^0 интерпретируем как 1;

$P_1^2 x_1 x_2$ интерпретируем как x_1 является делителем x_2;

$P_2^2 x_1 x_2$ интерпретируем как $x_1 > x_2$.

Тогда получим следующую формулировку:

«Существует натуральное число x_1, большее 1 и квадрат которого делит натуральное число x_2».

Легко понять, что это функция от x_2:

Значение x_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Значение высказывания	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	…

А какую роль играет x_1? Роль переменной, которая пробегает множество натуральных чисел, больших 1, и если в какой-то момент этому «мавру» удаётся «обслужить» x_2, то функция получает значение 1, а «мавр» исчезает. Впрочем, он исчезнет, даже если ему в ходе забега по натуральным числам не удастся обслужить x_2, только значение функции будет равно 0.

Таким образом, результат интерпретации формулы на некоторой алгебраической системе – это функция от переменных, которыми являются свободные символы, областью определения этой функции является носитель алгебраической системы, а её значения – булевы константы 0 и 1.

Здесь, конечно, имеет место полная аналогия с булевой интерпретацией формул в алгебре высказываний. Булеву интерпретацию формулы G из алгебры высказываний мы обозначали как BInt(G), интерпретацию формулы G логики 1-го порядка, в результате которой получается, как мы видим, некоторая функция, будем обозначать FInt(G) – функциональная интерпретация формулы G.

Пусть Σ – некоторое подмножество функциональных и предикатных символов языка логики 1-го порядка. При этом функциональные символы в Σ могут отсутствовать, а хотя бы один предикатный должен быть (иначе мы не сможем писать формулы). Рассмотрим алгебраическую систему A, сигнатура которой такова, что каждый символ из Σ может быть интерпретирован в сигнатуре этой системы. Иными словами, имеется всюду определённое однозначное сюръективное отображение μ множества Σ в сигнатуру алгебраической системы A. Тройка $\{A, \Sigma, \mu\}$ называется **моделью** логики 1-го порядка.

Ясно, что имея функциональную интерпретацию формулы в некоторой модели, мы можем вычислить значение получившейся функции в этой модели для любого набора значений её аргументов. Принято называть вычисление значения функции FInt(G) интерпретацией формулы G в данной модели при данных значениях переменных.

При фиксированной сигнатуре Σ у нас есть достаточно большая свобода в выборе алгебраической системы A и отображения μ. Т.е. моделей заданной сигнатуры не просто бесконечное множество, а огромное разнообразие.

Определение. Модель называется конечной (бесконечной), если конечен (бесконечен) носитель алгебраической системы этой модели.

Определение. Формула G называется **истинной в данной модели**, если в этой модели FInt(G) = 1.

Определение. Формула G называется **общезначимой**, если FInt(G) = 1 в любой модели.

Определение. Формула G называется **противоречием в данной модели**, если в этой модели FInt(G) = 0

Определение. Формула G называется **логическим противоречием**, если FInt(G) = 0 в любой модели.

Определение. Формула G называется **выполнимой в данной модели**, если в этой модели найдется такой набор элементов носителя, для которого FInt(G) = 1.

Определение. Формула G называется **выполнимой**, если она выполнима в некоторой модели.

Определение. Формулы F и G называются **равносильными**, если FInt(F) = FInt(G) в любой модели.

Равносильность формул будем обозначать ≡.

Теорема 1. Формулы F и G равносильны тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow G$ является общезначимой.

Доказательство. Ясно, что FInt($F \leftrightarrow G$) = 1 тогда и только тогда, когда FInt(F) = FInt(G). Выполнение первого равенства в любой модели означает её общезначимость, Выполнение второго равенства в любой модели означает равносильность формул.