Лекция 9.

§ 4. Теории 1-го порядка с равенством

Рассмотрим теорию 1-го порядка, в которой в качестве системы дополнительных аксиом Γ рассматривается следующее бесконечное множество формул:

$P_1^1x_1x_1$

$P_1^1x_1x_2 \to (F(x_1) \to F(x_2))$,

где F – произвольная формула, содержащая x_1 в качестве свободного предметного символа.

Вторая запись – это схема аксиом, поэтому мы и говорим, что Γ содержит бесконечное число аксиом.

Теорема 1. $\vdash P_1^1x_1x_2 \to P_1^1x_2x_1$.

Доказательство. Пусть F – формула $P_1^1x_1x_3$. Получаем аксиому

$P_1^1x_1x_2 \to (P_1^1x_1x_3 \to P_1^1x_2x_3)$

Сделаем подстановку, заменяя x_3 на x_1:

$P_1^1x_1x_2 \to (P_1^1x_1x_1 \to P_1^1x_2x_1)$

Вспомним пару формальных теорем:

$(p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to r)$ и $(p \wedge q \to r) \to (q \to (p \to r))$.

Поэтому получаем

$P_1^1x_1x_1 \to (P_1^1x_1x_2 \to P_1^1x_2x_1)$

Применяя первую аксиому, получаем $P_1^1x_1x_2 \to P_1^1x_2x_1$.

Теорема 2. Для любой формулы F, содержащей x_2 в качестве свободного предметного символа, $\vdash P_1^1x_1x_2 \to (F(x_2) \to F(x_1))$.

Доказательство. Переименовав переменные, из схемы аксиомы получаем

$P_1^1x_2x_1 \to (F(x_2) \to F(x_1))$

Формальную теорему $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ перепишем как $(P_1^1x_1x_2 \to P_1^1x_2x_1) \to ((P_1^1x_2x_1 \to (F(x_2) \to F(x_1))) \to (P_1^1x_1x_2 \to (F(x_2) \to F(x_1))))$

Учитывая $P_1^1x_1x_2 \to P_1^1x_2x_1$ и $P_1^1x_2x_1 \to (F(x_2) \to F(x_1))$, получаем $P_1^1x_1x_2 \to (F(x_2) \to F(x_1))$.

Теорема 3. $\vdash P_1^1x_1x_2 \to (P_1^1x_2x_3 \to P_1^1x_1x_3)$.

Доказательство. В теореме 2 вместо $F(x_2)$ подставим $P_1^1x_2x_3$, а вместо $F(x_1)$ получим соответственно $P_1^1x_1x_3$.

Вопрос. Какие свойства отношения, полученного интерпретацией символа P_1^1, описаны теоремами 1 и 3? Как называется отношение с этими свойствами?

Пусть f_n^m – произвольный функциональный символ.

Из схемы второй аксиомы имеем

$P_1^1x_1x_{n+1} \to (P_1^1f_n^mx_{n+2}x_2\ldots x_nf_n^mx_1x_2\ldots, x_n \to P_1^1f_n^mx_{n+2}x_2\ldots x_nf_n^mx_{n+1}x_2\ldots x_n)$

Произведём замену x_{n+2} на x_1:

$P_1^1x_1x_{n+1} \to (P_1^1f_n^mx_1x_2\ldots x_nf_n^mx_1x_2\ldots x_n \to P_1^1f_n^mx_1x_2\ldots x_nf_n^mx_{n+1}x_2\ldots x_n)$

Снова применяя формальные теоремы $(p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to r)$ и $(p \wedge q \to r) \to (q \to (p \to r))$, получаем $P_1^1f_n^mx_1x_2\ldots x_nf_n^mx_1x_2\ldots x_n \to (P_1^1x_1x_{n+1} \to P_1^1f_n^mx_1x_2\ldots x_nf_n^mx_{n+1}x_2\ldots x_n)$. Учитывая первую аксиому, имеем $P_1^1x_1x_{n+1} \to P_1^1f_n^mx_1x_2\ldots x_nf_n^mx_{n+1}x_2\ldots x_n$. – формальная теорема.

Вопрос. Какое свойство отношения, полученного интерпретацией символа P_1^1, описано этой формальной теоремой?

А.Чёрч назвал эту теорию Ё-теорией, но более принято кратко называть её Е-теорией, хотя это не вполне удобно из некоторых соображений.

Если при интерпретации P_1^1 оказывается отношением совпадения, то рассматриваемая модель называется **нормальной**.

Теорема 4. Если существует модель для некоторой Е-теории, то существует и нормальная модель этой теории.

Однако в математической логике такой предикатный символ называют равенством и соответствующую теорию называют теорией первого порядка с равенством. Более того, в алфавит добавляют двуместный предикатный символ = и пишут естественно не $=x_1x_2$, а $x_1=x_2$.

Нетрудно обобщить вторую аксиому:

$x_1=x_{n+1} \wedge x_2=x_{n+2} \wedge \ldots \wedge x_n=x_{2n} \rightarrow (F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow F(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}))$,

где F – произвольная формула, содержащая x_1, x_2, …, x_n в качестве свободных предметных символов.

Для упрощения жизни именно эту схему нередко и принимают в качестве исходной.

§ 5. Формальный натуральный ряд

Во-первых, заметим, что логики и программисты, в отличие от математиков и особенно алгебраистов, предпочитают начинать натуральный ряд не с 1, а с 0.

Во-вторых, аксиоматическое описание натурального числового ряда в 1981 году предложил итальянский математики Ж. Пеано в журнале «Rivista di matematice», однако В.Б. Репницкий и А.Я. Овсянников («Основы математической логики») считают, что это сделал Р. Дедекинд в 1901 году. Я не готов вползать в эти приоритетные споры, а просто воспроизведу аксиоматику, которую принято называть «аксиомы Пеано». Но хотя к 1901 году математическая логика уже начала принимать современный облик, аксиоматика, конечно, описывалась ещё на уровне модели, а не формального исчисления.

Множество **N** называется множеством натуральных чисел, если

1) на **N** существует одноместная функция, которую мы будем обозначать $'$. Элемент x',будем называть следующим за элементом x.

2) существует элемент, который не является следующим ни для какого элемента. Этот элемент будем обозначать 0.

3) для каждого элемента существует только один следующий (правда, это можно считать подразумевающимся в п. 1 в силу нашего понимания, что такое функция).

4) любой элемент следует не более за одним элементом.

5) (Аксиома индукции) если для некоторого подмножества М выполнены условия

а) $0 \in$ М;

б) из $x \in$ М следует, что $x' \in$ М,

то М совпадает с **N**.

Запишем это на языке 1-го порядка с равенством. Т.е. к аксиомам языка 1-го порядка надо ещё добавить аксиомы.

Ясно, что никакого множества у нас нет. А есть одноместный функциональный символ f_1^1. При интерпретации он превратится в $'$. Есть нулярный функциональный символ f_1^0, который играет роль 0 в аксиомах Пеано. Значит, 1) и 3) нам не нужны, а 2) запишется как

$\forall x_1(\neg f_1^0=f_1^1x_1)$.

Для 4) пишем

$\forall x_1 \forall x_2 (f_1^1 x_1 = f_1^1 x_2 \to x_1 = x_2)$.

А как быть с 5)?

Давайте вспомним, что задать подмножество – это значит определить предикат, который принимает значение Истина только на элементах этого подмножества. Семантически говорят, что подмножество мы задаём некоторым свойством. Поэтому Аксиому индукции мы опишем как схему, т.е. бесконечным набором аксиом:

$F(f_1^0) \wedge \forall x_1 (F(x_1) \to F(f_1^1 x_1)) \to \forall x_2\, F(x_2)$.

где $F(x_1)$ –произвольная формула, содержащая x_1 в качестве свободной переменной. Понятно, что при интерпретации мы формулой F описываем некоторое свойство элементов.

В принципе моделей, удовлетворяющих данной аксиоматике можно привести много. Это и обычный ряд натуральных чисел, и ряд чётных натуральных чисел, и ряд отрицательных целых чисел, если положить $x' = x - 1$. И даже такой ряд: 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, …, $\frac{n}{n+1}$, … . Но все они изоморфны как алгебраические системы. Верно ли, что все модели, удовлетворяющие данной аксиоматике, изоморфны? Хочется верить, что ответ положительный, поскольку в противном случае каждый раз, говоря о натуральных числах, пришлось бы рассматривать все неизоморфные модели. Попробуем доказать изоморфность всех моделей.

Лемма. Пусть A – некоторая модель для данной аксиоматики, M – её носитель, a – интерпретация символа f_1^0. Если элемент из M отличен от a, то он является следующим для некоторого элемента из M.

Доказательство. Построим множество $N = \{a, a', (a')', \dots \}$. Ясно, что в множестве N каждый элемент, отличный от a, является следующим для записанного перед ним элемента. Покажем, что $N = M$. Допустим, что это не так. Тогда проинтерпретируем предикатный символ P_1^1 на M следующим образом: $P(x_i)$ = И, если x_i интерпретируется элементом из N, и $P(x_i)$ = Л, если x_i интерпретируется элементом из $M \setminus N$. Ясно, что тогда соответствующая аксиома из набора Аксиомы индукции выполняется, поэтому предикат P истинен на всех элементах из M. Значит, $M \setminus N = \varnothing$.

Теорема. Любые две модели данной аксиоматики изоморфны.

По существу в доказательстве Леммы мы показали, что любая модель изоморфна $N = \{a, a', (a')', \dots \}$.

§ 5. Формальная арифметика

Арифметика начинается тогда, когда над натуральными числами можно производить операции сложения и умножения. Значит, нам нужны два бинарных функциональных символа, скажем, f_1^2 и f_2^2, и какие-то аксиомы.

$\forall x_1 f_1^2 x_1 f_1^0 = x_1$ – свойство правого нуля по сложению)

$\forall x_1 \forall x_2 f_1^2 x_1 f_1^1 x_2 = f_1^1 f_1^2 x_1 x_2$– рекурсивный переход)

$\forall x_1 f_2^2 x_1 f_1^0 = f_1^0$– свойство правого нуля по умножению)

$\forall x_1 \forall x_2 f_2^2 x_1 f_1^1 x_2 = f_1^1 f_2^2 x_1 x_2 x_1$– рекурсивный переход)

Мы уже согрешили, разрешив себе писать =, согрешим ещё раз и будем писать $x_1 + x_2$ вместо $f_1^2 x_1 x_2$, x_1' вместо $f_1^1 x_1$ и 0 вместо f_1^0. Докажем для примера теорему о том, что правый нуль является левым.

Теорема 1. $\vdash x_1 + 0 = 0 + x_1$.

Доказательство. Подстановка в первую аксиому равенства даёт

Рассмотрим формулу $F(x_1) := x_1 + 0 = 0 + x_1$ (мы теперь используем знак :=, поскольку знак = у нас занят под предикатный символ равенства).

Тогда по аксиоме равенства имеем

$\vdash F(0)$

Покажем $\vdash F(x_1) \to F(x_1')$.

$x_1 + 0 = x_1$ аксиома правого нуля

$x_1 + 0 = x_1 \to (x_1 + 0)' = x_1'$ – подстановка в теорему $x_1{=}x_2 \to f_1^1 x_1 = f_1^1 x_2$

$(x_1 + 0)' = x_1'$ по МР

$(x_1 + 0)' = x_1' \to x_1' = (x_1 + 0)'$ – подстановка в теорему $x_1{=}x_2 \to x_2{=}x_1$

$x_1' = (x_1 + 0)'$ по МР

$x_1' + 0 = x_1'$ – подстановка в аксиому правого нуля

$(x_1' + 0 = x_1') \to (x_1' = (x_1 + 0)' \to x_1' + 0 = (x_1 + 0)')$ – подстановка в теорему $x_1{=}x_2 \to (x_2{=}x_3 \to x_2{=}x_3)$

$x_1' + 0 = (x_1 + 0)'$ дважды по МР

$x_1' + 0 = (x_1 + 0)' \to (x_1 + 0)' = x_1' + 0$ – подстановка в теорему $x_1{=}x_2 \to x_2{=}x_1$

$(x_1 + 0)' = x_1' + 0$ по МР

$0 + x_1' = (0 + x_1)'$ – подстановка в рекурсивную аксиому сложения

$0 + x_1' = (0 + x_1)' \to ((0 + x_1)' = (x_1 + 0)' \to 0 + x_1' = (x_1 + 0)'$ – подстановка в теорему $x_1{=}x_2 \to (x_2{=}x_3 \to x_2{=}x_3)$

$(0 + x_1)' = (x_1 + 0)' \to 0 + x_1' = (x_1 + 0)'$ по МР

$0 + x_1' = (x_1 + 0)' \to ((x_1 + 0)' = x_1' + 0 \to 0 + x_1' = x_1' + 0)$ – подстановка в теорему $x_1{=}x_2 \to (x_2{=}x_3 \to x_2{=}x_3)$

$(x_1 + 0)' = x_1' + 0 \to (0 + x_1' = (x_1 + 0)') \to 0 + x_1' = x_1' + 0)$ – перемена местами посылок

$0 + x_1' = (x_1 + 0)' \to 0 + x_1' = x_1' + 0$ по МР

$F(x_1) \to (0 + x_1)' = (x_1 + 0)'$

$(0 + x_1)' = (x_1 + 0)' \to 0 + x_1' = (x_1 + 0)'$

$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ – формальная теорема

$F(x_1) \to 0 + x_1' = (x_1 + 0)'$ по МР

$0 + x_1' = (x_1 + 0)' \to 0 + x_1' = x_1' + 0$

$F(x_1) \to 0 + x_1' = x_1' + 0$, т.е. $F(x_1) \to F(x_1')$ по МР

$\forall x_1(F(x_1) \to F(x_1'))$

$F(0) \wedge \forall x_1(F(x_1) \to F(f_1^1 x_1)) \to \forall x_2 F(x_2)$ аксиома индукции

Её можно переписать

$F(0) \to (\forall x_1(F(x_1) \to F(f_1^1 x_1)) \to \forall x_2 F(x_2))$

Двойное применение МР даёт $\forall x_2 F(x_2)$, т.е. $\vdash x_1 + 0 = 0 + x_1$.

Видно, что формальное построение арифметики сопряжено с огромной трудоёмкостью. Остаётся только верить, что проводимые нами полуформальные доказательства не слишком грешат формально-логическими ошибками. Хотя в жизни всякое бывает…