Лекция 3

§3. Непротиворечивость, полнота и разрешимость исчисления логики высказываний

Пусть p – некоторая формула, содержащая в своей записи предметные символы $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть задана некоторая интерпретация предметных символов. Рассмотрим формулы $q_1, q_2, \ldots, q_n$, определённые следующим правилом:

$$q_i = \begin{cases} x_i, \text{если } x_i \text{ интерпретируется как } 1 \\ (\neg x_i), \text{если } x_i \text{ интерпретируется как } 0 \end{cases}.$$

Определим формулу p' по правилу:

$$p' = \begin{cases} p, \text{если при данной интерпретации предметных символов } p \text{ принимает значение } 1 \\ (\neg p), \text{если при данной интерпретации предметных символов } p \text{ принимает значение } 0 \end{cases}.$$

Лемма 1. $\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} \vdash p'$.

Доказательство по числу связок в записи формулы p. Пусть в p имеется k связок.

Б.И. $k = 0$. Тогда $p = x_i$.

Если x_i интерпретировано как 1, то $p' = p = x_i = q_i$. Поэтому $q_i \vdash p'$ по определению.

Если x_i интерпретировано как 0, то $p' = (\neg p) = (\neg x_i) = q_i$. Поэтому $q_i \vdash p'$ по определению.

Ш.И. Если для формул, содержащих меньше чем k связок, считаем утверждение доказанным. Рассматриваем последнюю связку в формуле p.

1) $p = (\neg s)$ и запись s содержит $k - 1$ связок. Зафиксируем некоторую интерпретацию предметных переменных. Тогда $\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} \vdash s'$ по предположению индукции.

Если в заданной интерпретации s имеет значение 1, то $s' = s$, p имеет значение 0, так что $p' = (\neg p) = \neg(\neg s)$. Формальная теорема $s \to \neg (\neg s)$ показывает, что $s' \vdash p'$. Это означает, что $\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} \vdash p'$.

Если в заданной интерпретации s имеет значение 0, то $s' = (\neg s)$, а p имеет значение 1, так что $p' = p = (\neg s) = s'$. Значит, $\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} \vdash p'$.

2) $p = s \to t$. Формулы s и t содержат менее k связок. Зафиксируем некоторую интерпретацию предметных переменных. Тогда $\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} \vdash s'$ и $\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} \vdash t'$ по предположению индукции.

Если в заданной интерпретации s и t имеют значение 1, то $s' = s$, $t' = t$ и p имеет значение 1, так что $p' = p$. Из $\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} \vdash t'$ следует, что $\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} \cup \{ s' \} \vdash t'$. По теореме дедукции имеем $\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} \vdash s' \to t' = s \to t = p = p'$.

Если в заданной интерпретации s имеет значение 1, а t – значение 0, то $s' = s$, $t' = (\neg t)$ и p имеет значение 0, так что $p' = (\neg p)$. Нам достаточно $\{ s', t' \} \vdash p'$. Для этого хорошо бы иметь формальную теорему $s' \to (t' \to p')$. Это, конечно, не теорема, но давайте подставим выражения для p, s и t. Получится $s \to ((\neg t) \to (\neg(s \to t)))$. Теорема дедукции говорит, что нам достаточно $s \vdash ((\neg t) \to (\neg(s \to t))$. Благодаря теореме $((s \to t) \to t) \to ((\neg t) \to (\neg(s \to t))$ (и откуда она только взялась?) и теореме дедукции достаточно $s \vdash ((s \to t) \to t)$, значит, достаточно $\{s, (s \to t)\} \vdash t$, а это очевидно.

Если в заданной интерпретации s имеет значение 0, то $s' = (\neg s)$, а p имеет значение 1, так что $p' = p$. Постараемся получить $s' \vdash p' = p = s \to t$. По теореме дедукции нам достаточно $\{ s', s \} \vdash t$, т.е. $\{ (\neg s), s \} \vdash t$. Пишем формальную теорему: $\neg s \to ((\neg t) \to (\neg s))$. Согласно МР имеем $\{(\neg s), s\} \vdash ((\neg t) \to (\neg s))$. По МР имеем $\{ (\neg s), s \} \vdash (\neg(\neg s) \to \neg (\neg t))$. Но $s \vdash (\neg(\neg s)$, так что $\{ (\neg s), s \} \vdash \neg(\neg t))$. Поскольку $\neg (\neg t)) \to t$ – формальная теорема, $\{ (\neg s), s \} \vdash t$.

3) $p = s \wedge t$. Формулы s и t содержат менее k связок. Зафиксируем некоторую интерпретацию предметных переменных. Тогда $\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} \vdash s'$ и $\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} \vdash t'$ по предположению индукции.

Если в заданной интерпретации s и t имеют значение 1, то $s' = s$, $t' = t$ и p имеет значение 1, так что $p' = p$. Вот формальная теорема $(s \to s) \to ((s \to t) \to (s \to s \wedge t))$. По МР получаем формальную теорему $(s \to t) \to (s \to s \wedge t)$. Значит, $(s \to t) \vdash (s \to s \wedge t)$. Значит, $\{s, (s \to t)\} \vdash s \wedge t$. Поскольку $\{ s, t \} \vdash (s \to t)$, имеем $\{ s, t \} \vdash s \wedge t$, т.е. $\{ s', t'\} \vdash p'$.

Если в заданной интерпретации s имеет значение 0, то $s' = (\neg s)$ и p имеет значение 0, так что $p' = (\neg p)$. Из формальных теорем $s \wedge t \to s$ и $(s \wedge t \to s) \to (\neg s \to \neg(s \wedge t))$ следует $s' \to p'$, что означает $s' \vdash p'$.

Аналогично, если t имеет значение 0.

4) $p = s \vee t$. Формулы s и t содержат менее k связок. Зафиксируем некоторую интерпретацию предметных переменных. Тогда $\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} \vdash s'$ и $\{ q_1, q_2, \ldots, q_n \} \vdash t'$ по предположению индукции.

Если в заданной интерпретации s и t имеют значение 0, то $s' = (\neg s)$, $t' = (\neg t)$ и p имеет значение 0, так что $p' = (\neg p)$. Запишем формальные теоремы $s \to s \vee t$, $t \to s \vee t$ и $(s \to s) \to ((t \to s) \to (s \vee t \to s))$. По МР получаем $((t \to s) \to (s \vee t \to s))$. Далее, $\{ (\neg s), (\neg t) \} \vdash (\neg s) \to (\neg t) \vdash (t \to s) \vdash (s \vee t \to s) \vdash (\neg s) \to \neg(s \vee t)$.

Если в заданной интерпретации s имеет значение 1, то $s' = s$ и p имеет значение 1, так что $p' = p$. Применяем теорему $s \to s \vee t$, которая означает, что $\{ s'\} \vdash p'$.

5) $p = s \leftrightarrow t$. Провести самостоятельно.

Лемма 2. Формула $\neg(x_1 \wedge (\neg x_1))$ – формальная теорема.

Доказательство. Запишем формальную теорему:

$x_1 \to ((x_2 \to x_2)\to x_1)$

Воспользуемся аксиомой из V:

$((x_2 \to x_2)\to x_1) \to ((\neg x_1) \to \neg(x_2 \to x_2))$

Вспомним утверждение 4 а) из классной работы: $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$. Пусть $p = x_1$, $q = ((x_2 \to x_2)\to x_1)$, $r = ((\neg x_1) \to \neg(x_2 \to x_2))$.

По МР имеем $x_1 \to ((\neg x_1) \to \neg(x_2 \to x_2))$

Вспомним утверждение 4 в) из классной работы: $(p \to (q \to r)) \to (p \wedge q \to r)$. Пусть $p = x_1$, $q = (\neg x_1)$, $r = \neg(x_2 \to x_2)$.

По МР имеем $x_1 \wedge (\neg x_1) \to \neg(x_2 \to x_2)$

Аксиома из V и МР дают $\neg(\neg(x_2 \to x_2)) \to \neg(x_1 \wedge (\neg x_1))$. Другая аксиома из V даёт $(x_2 \to x_2) \to \neg(\neg(x_2 \to x_2))$. Поэтому имеем $(x_2 \to x_2) \to \neg(x_1 \wedge (\neg x_1))$. Но $x_2 \to x_2$ выводима, значит, выводима $\neg(x_1 \wedge (\neg x_1))$.

Лемма 3. Формула $(x_1 \vee (\neg x_1))$ – формальная теорема.

Доказательство. Из аксиом имеем

$x_1 \to x_1 \vee (\neg x_1)$

$(x_1 \to x_1 \vee (\neg x_1)) \to(\neg(x_1 \vee (\neg x_1)) \to (\neg x_1))$

По МР получаем

$(\neg(x_1 \vee (\neg x_1)) \to (\neg x_1))$

Из аксиом имеем

$(\neg x_1) \to x_1 \vee (\neg x_1)$

$((\neg x_1) \to x_1 \vee (\neg x_1)) \to(\neg(x_1 \vee (\neg x_1)) \to\neg(\neg x_1))$

По МР получаем

$\neg(x_1 \vee (\neg x_1)) \to\neg(\neg x_1)$

Формула $(x_1 \to\neg(\neg x_2)) \to (x_1 \to x_2)$ – формальная теорема (проверить самостоятельно с помощью теоремы дедукции)

Из этой теоремы и МР получаем $\neg(x_1 \vee (\neg x_1)) \to x_1$

Из аксиомы и МР получаем

$(x_1 \vee (\neg x_1)) \to x_1 \wedge (\neg x_1)$

Из аксиомы и МР получаем

$\neg(x_1 \wedge (\neg x_1)) \to \neg (\neg(x_1 \vee (\neg x_1))$

Мы понимаем, что тогда

$\neg(x_1 \wedge (\neg x_1)) \to x_1 \vee (\neg x_1)$

Поскольку $\neg(x_1 \wedge (\neg x_1))$ – формальная теорема; по МР формула $x_1 \vee (\neg x_1)$ тоже формальная теорема.

Лемма 3. Пусть p и q – некоторые формулы. Если $\Gamma \cup \{ q \} \vdash p$ и $\Gamma \cup \{ \neg q \} \vdash p$, то $\Gamma \vdash p$.

Доказательство. По теореме дедукции то $\Gamma \vdash q \to p$ и $\Gamma \vdash \neg q \to p$. Ввиду формальной теоремы из III имеем $\Gamma \vdash (q \vee (\neg q)) \to p$. По лемме 3 $q \vee (\neg q)$ – формальная теорема. Тем самым, $\Gamma \vdash p$.

Теорема (о полноте). Любая тавтология является формальной теоремой.

Доказательство. Пусть p – формула, являющаяся тавтологией, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – предметные символы, содержащиеся в её записи. Выберем интерпретацию с произвольными значениями предметных символов $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и единичной интерпретацией символа x_n. Обозначим через Γ множество $\{ q_1, q_2, \ldots, q_{n-1} \}$. Поскольку p – тавтология, по лемме 1 $\Gamma \cup \{ x_n \} \vdash p$. Выберем ту же интерпретацию для $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и нулевую для символа x_n. Опять-таки по лемме 1 $\Gamma \cup \{ \neg x_n \} \vdash p$. По лемме 4 $\Gamma \vdash p$. Поскольку интерпретация была любой, то множество Γ можно урезать, удалив x_{n-1}. И т.д. В конце концов, получим $\vdash p$, т.е. p является формальной теоремой.