Лемма. Элементарное преобразование, выполненное над столбцами матрицы, сохраняет линейную зависимость её строк.

Доказательство. Пусть в матрице $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \dots \alpha_{2n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} \dots \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ линейно зависимы строки с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$, т.е. найдутся такие числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, не все равные 0, что для любого j сумма $\gamma_1\alpha_{i_1 j} + \gamma_2\alpha_{i_2 j} + \dots + \gamma_k\alpha_{i_k j} = 0$.

Пусть теперь столбец с номером s умножен на коэффициент β. Для всех $j \neq s$ равенство

$$\gamma_1\alpha_{i_1 j} + \gamma_2\alpha_{i_2 j} + \dots + \gamma_k\alpha_{i_k j} = 0$$

останется прежним, а для столбца с номером s левая часть примет вид:

$$\gamma_1\beta\alpha_{i_1 s} + \gamma_2\beta\alpha_{i_2 s} + \dots + \gamma_k\beta\alpha_{i_k s} = \beta(\gamma_1\alpha_{i_1 s} + \gamma_2\alpha_{i_2 s} + \dots + \gamma_k\alpha_{i_k s}) = 0,$$

т.е. строки останутся по-прежнему линейно зависимы.

Пусть теперь к столбцу с номером s прибавлен столбец с номером t. Для всех $j \neq s$ равенство

$$\gamma_1\alpha_{i_1 j} + \gamma_2\alpha_{i_2 j} + \dots + \gamma_k\alpha_{i_k j} = 0$$

останется прежним, а для столбца с номером s левая часть примет вид:

$$\gamma_1(\alpha_{i_1 s} + \alpha_{i_1 t}) + \gamma_2(\alpha_{i_2 s} + \alpha_{i_2 t}) + \dots + \gamma_k(\alpha_{i_k s} + \alpha_{i_k t}) =$$

$$(\gamma_1\alpha_{i_1 s} + \gamma_2\alpha_{i_2 s} + \dots + \gamma_k\alpha_{i_k s}) + (\gamma_1\alpha_{i_1 t} + \gamma_2\alpha_{i_2 t} + \dots + \gamma_k\alpha_{i_k t}) = 0 + 0 = 0,$$

т.е. строки останутся по-прежнему линейно зависимы. □

Теорема. Элементарное преобразование, выполненное над столбцами матрицы, не меняет ранга матрицы по строкам.

Доказательство. Пусть в матрице система строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ является максимальной линейно независимой. Выполним какое-либо элементарное преобразование над столбцами. С одной стороны, система строк с теми же номерами в преобразованной матрице не может стать линейно зависимой, поскольку при обратном элементарном преобразовании исходные строки стали бы линейно зависимыми. С другой стороны, любая система строк, содержащая строки с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$, линейно зависима Значит и после элементарного преобразования она останется линейно зависимой. Тем самым, система строк с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ является максимальной линейно независимой в преобразованной матрице. □