Глава 12. Линейные преобразования линейных пространств

С одной стороны, мы уже рассматривали линейные отображения одного линейного пространства в другое. С другой стороны, напомню, что преобразованием множества называется отображение этого множества в себя.

? Что такое линейное преобразование пространства?

Достаточно часто линейное преобразование называют ***линейным оператором***.

Итак, пусть L – конечномерное линейное пространство над полем F, f – его линейное преобразование. В пространстве L мы будем фиксировать некоторый базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и рассматривать матрицу преобразования f в этом базисе.

? Какие размеры имеет матрица линейного преобразования f ?

Естественная цель всей главы – научиться так выбрать базис, чтобы матрица в этом базисе имела как можно более простой вид.

К сожалению, идеал, когда матрица линейного преобразования в некотором базисе диагональна, не всегда достижим. По разным причинам. Скажем так, объективным и субъективным: некоторые связаны со свойствами поля F, а некоторые исключительно со свойствами самого преобразования (например, когда поле алгебраически замкнуто), и начнём мы с изучения тех условий, когда идеал всё-таки достижим.

§ 1. Линейные преобразования простой структуры

Определение 1. Линейное преобразование f линейного пространства L над полем F называется ***преобразованием простой структуры***, если в L существует базис, в котором матрица преобразования f диагональна.

! Приведите примеры линейных преобразований простой структуры.

Теорема 1. Линейное преобразование f является преобразованием простой структуры тогда и только тогда, когда в пространстве L есть базис, состоящий из собственных векторов преобразования f.

? Что такое собственный вектор линейного преобразования?

? Что такое собственное число линейного преобразования?

Докажите теорему самостоятельно.

? Что стоит на диагонали матрицы линейного преобразования простой структуры?

Ясно, что стоят собственные числа соответствующих базисных векторов.

? Как находить собственные числа?

Если линейное преобразование является преобразованием простой структуры, то его характеристический многочлен разлагается в произведение линейных множителей. Здесь-то и возникает первая «объективная» трудность: характеристический многочлен может не разлагаться на линейные множители над полем F. Конечно, если поле F алгебраически замкнуто, то такой неприятности произойти не может.

Но пусть у нас линейное преобразование и поле F не «конфликтуют», т.е. характеристический многочлен разлагается на линейные множители. Тогда, конечно, найдутся и собственные векторы для каждого из корней характеристического многочлена. Но всегда ли из них можно собрать базис пространства L? Некоторую помощь в этом оказывает следующая

Теорема 2. Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам линейного преобразования f, линейно независимы.

Доказательство. Занумеруем различные собственные числа в произвольном порядке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и докажем утверждение индукцией по m.

Б.И. $m = 1$. Собственный вектор ненулевой, так что он линейно независим.

Ш. И. Пусть для $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ уже доказано, что их собственные векторы $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ линейно независимы. Добавим к ним вектор a_m – собственный для числа α_m. Запишем линейную комбинацию этих векторов и приравняем её к 0:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_{m-1} a_{m-1} + \gamma_m a_m = 0.$$

Применим к обеим частям равенства преобразование f:

$$\gamma_1 f(a_1) + \gamma_2 f(a_2) + \ldots + \gamma_{m-1} f(a_{m-1}) + \gamma_m f(a_m) = f(0) = 0.$$

Вспоминая, что $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – собственные векторы, получаем:

$$\gamma_1 \alpha_1 a_1 + \gamma_2 \alpha_2 a_2 + \ldots + \gamma_{m-1} \alpha_{m-1} a_{m-1} + \gamma_m \alpha_m a_m = 0.$$

Умножив первое равенство на α_m, вычтем его из второго. Получается

$$\gamma_1(\alpha_1 - \alpha_m) a_1 + \gamma_2(\alpha_2 - \alpha_m) a_2 + \ldots + \gamma_{m-1} (\alpha_{m-1} - \alpha_m) a_{m-1} = 0.$$

Это линейная комбинация векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$, а они линейно независимы. Значит,

$$\gamma_1(\alpha_1 - \alpha_m) = \gamma_2(\alpha_2 - \alpha_m) = \ldots = \gamma_{m-1}(\alpha_{m-1} - \alpha_m) = 0.$$

Тогда $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{m-1} = 0$. Исходное равенство $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_{m-1} a_{m-1} + \gamma_m a_m = 0$ превращается в равенство $\gamma_m a_m = 0$, откуда следует, что $\gamma_m = 0$. Тем самым, линейная независимость системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ линейно независима. □

Следствие. Если характеристический многочлен линейного преобразования f линейного n-мерного пространства имеет различных корней, то f является преобразованием простой структуры.

Давайте обсудим наши рассмотрения на матричном языке.

? Что означает для матрицы линейного преобразования переход к новому базису?

Для матриц это преобразование подобия.

Значит, вопрос о существовании базиса, в котором матрица преобразования имеет диагональный вид, звучит так: будет ли матрица преобразования, записанная для него в некотором базисе, подобна диагональной матрице?

Пусть для некоторого преобразования матрица в некотором базисе выглядит так: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

? Является ли это преобразование преобразованием простой структуры?

Иными словами: подобна ли эта матрица диагональной?

? А если бы была подобна диагональной, то какой?

Единичной. А единичная матрица подобна только самой себе. Так что данное преобразование не является преобразованием простой структуры, хотя его характеристический многочлен разлагается на линейные множители.

§ 2. Инвариантные подпространства линейного преобразования

Мы будем постепенно приближаться к заветному ответу о матрице наиболее простого вида, создавая нужные инструменты и вводя для них соответствующие понятия. Я хочу на примере познакомить вас с кухней решения проблемы. Первым таким понятием будет понятие инвариантного подпространства.

Определение 1. Пусть f – линейное преобразование линейного пространства L. Подпространство M называется ***инвариантным относительно f***, если $f(x) \in M$ для любого x из M.

У каждого пространства и любого линейного преобразования этого пространства всегда есть, по крайней мере, два инвариантных подпространства: все пространство и нулевое подпространство. Подпространства, отличные от этих двух, называются ***собственными***.

Если у преобразования имеется инвариантное подпространство M, то мы можем рассмотреть на нём преобразование g, которое определяется правилом $g(x) = f(x)$. Ясно, что g является линейным преобразованием пространства M. Оно называется ***ограничением*** преобразования f на подпространство M. Обозначают ограничение на подпространство так: $f|_M$.

Влияние наличия собственного инвариантного подпространства у преобразования f демонстрирует следующая

Теорема 1. Линейное преобразование имеет собственное инвариантное подпространство тогда и только тогда, когда его матрица в некотором базисе является полураспавшейся.

? Какая матрица называется полураспавшейся?

Матрица полураспавшаяся, если её можно разбить на четыре клетки следующим образом: $\left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline 0 & C \end{array}\right)$, где A и C – квадратные матрицы.

Доказательство. Пусть M – собственное инвариантное подпространство преобразования f пространства L. Выберем в M базис $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и дополним его, до базиса $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, a_n$ всего пространства L. Запишем матрицу преобразования f в этом базисе. Поскольку $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m)$ принадлежат M, ненулевыми могут быть только первые m координат этих векторов, а остальные координаты равны 0. Поэтому в матрице преобразования f в левом нижнем углу стоит нулевая матрица, а в левом верхнем – квадратная матрица преобразования f, ограниченного на подпространство M.

Обратно. Пусть в некотором базисе $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, a_n$ пространства L матрица преобразования f имеет вид $\left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline 0 & C \end{array}\right)$, где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – та часть базиса пространства L, которая соответствует левой части матрицы. Пусть M – подпространство, порождённое векторами $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

? Что значит «M – подпространство, порождённое векторами $a_1, a_2, \ldots, a_m$»?

Каждый вектор x из M записывается как $\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_{m-1} a_{m-1} + \gamma_m a_m$. Поскольку $f(a_1)$, $f(a_2)$, …, $f(a_m)$ принадлежат M, $f(x)$ также принадлежит M, т.е. M – инвариантное относительно f подпространство. □

Напомним, что матрица называется ***распавшейся***, если она представима в виде $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, где A и B – квадратные матрицы.

Теорема 2. Линейное преобразование f имеет в некотором базисе распавшуюся матрицу тогда и только тогда, когда пространство L является прямой суммой двух собственных инвариантных подпространств.

Доказательство проведите самостоятельно.

Следствие. Линейное преобразование f имеет в некотором базисе квазидиагональную матрицу тогда и только тогда, когда пространство L является прямой суммой нескольких собственных инвариантных подпространств.

Доказательство проведите самостоятельно.

§ 3. Корневые подпространства линейного преобразования

Пусть α – корень характеристического многочлена линейного преобразования f линейного пространства L.

Определение 1. Линейное преобразование $f - \alpha\varepsilon$ называется ***характеристическим*** для преобразования f.

Лемма 1. Подпространство M инвариантно относительно преобразования f тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно характеристического преобразования.

Доказательство. Пусть M инвариантно относительно f и $x \in M$. Тогда $(f - \alpha\varepsilon)(x) = f(x) - \alpha\varepsilon(x) = f(x) - \alpha x \in M$, т.е. M инвариантно относительно $f - \alpha\varepsilon$.

Обратно. Пусть M инвариантно относительно $f - \alpha\varepsilon$ и $x \in M$. Тогда $f(x) = (f - \alpha\varepsilon)(x) + \alpha x \in M$, т.е. M инвариантно относительно f. □

Для натурального числа n обозначим через $L_n(\alpha) = \mathrm{Ker}\,(f - \alpha\varepsilon)^n$. Как и ядро любого линейного отображения, $L_n(\alpha)$ является подпространством пространства L.

Лемма 2. 1) $L_1(\alpha) \neq 0$.

2) $L_1(\alpha) \subseteq L_2(\alpha) \subseteq \ldots \subseteq L_n(\alpha) \subseteq \ldots$.

3) $L_n(\alpha)$ инвариантно относительно $f - \alpha\varepsilon$ при любом натуральном n.

4) $\mathrm{Im}\,(f - \alpha\varepsilon)|_{L_1(\alpha)} = 0$ и $\mathrm{Im}\,(f - \alpha\varepsilon)|_{L_n(\alpha)} \subseteq L_{n-1}(\alpha)$ при $n > 1$.

Доказательство. 1) Пусть a – собственный вектор для числа α. Тогда $f(a) = \alpha a$, откуда $(f - \alpha\varepsilon)(a) = 0$, т.е. $a \in L_1(\alpha)$.

2) Пусть $x \in L_{n-1}(\alpha)$, т.е. $(f - \alpha\varepsilon)^{n-1}(x) = 0$. Тогда

$$(f - \alpha\varepsilon)^n(x) = (f - \alpha\varepsilon)\,((f - \alpha\varepsilon)^{n-1}(x)) = 0$$

т.е. $x \in L_n(\alpha)$.

3) Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$ и $x \in L_n(\alpha)$, а $y = (f - \alpha\varepsilon)(x)$. Тогда $(f - \alpha\varepsilon)^{n-1}(y) = (f - \alpha\varepsilon)^n(x) = 0$, т.е. $y \in L_{n-1}(\alpha) \subseteq L_n(\alpha)$.

4) Утверждение $\mathrm{Im}\,(f - \alpha\varepsilon)|_{L_1(\alpha)} = 0$ следует из доказательства п. 1). Утверждение $\mathrm{Im}\,(f - \alpha\varepsilon)|_{L_n(\alpha)} \subseteq L_{n-1}(\alpha)$ при $n > 1$ следует из доказательства п. 3). □

Следствие. $L_n(\alpha)$ инвариантно относительно f для любого α и при любом натуральном n.

Положим $L(\alpha) = \cup\ \{ L_n(\alpha) \mid n \geq 1\}$.

! Докажите, что $L(\alpha)$ при любом α является подпространством, инвариантным относительно преобразования f.

Определение 2. Подпространство $L(\alpha)$ называется ***α-корневым подпространством*** преобразования f.

Теорема. Сумма корневых подпространств, соответствующих различным корням, является прямой.

Доказательство проведём индукцией по числу слагаемых в сумме. Если слагаемое одно, утверждение очевидно. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – различные собственные числа и уже доказано, что сумма $L(\alpha_1) + L(\alpha_2) + \ldots + L(\alpha_{m-1})$ прямая, т.е.

$$L(\alpha_1) + L(\alpha_2) + \ldots + L(\alpha_{m-1}) = L(\alpha_1) \oplus L(\alpha_2) \oplus \ldots \oplus L(\alpha_{m-1}).$$

Добавим к этой сумме слагаемое $L(\alpha_m)$. Надо проверить, что

$$(L(\alpha_1) \oplus L(\alpha_2) \oplus \ldots \oplus L(\alpha_{m-1})) + L(\alpha_m) = (L(\alpha_1) \oplus L(\alpha_2) \oplus \ldots \oplus L(\alpha_{m-1})) \oplus L(\alpha_m).$$

? Как проверить, что сумма двух подпространств является прямой?

Надо доказать, что их пересечение равно 0.

Пусть $a \in (L(\alpha_1) \oplus L(\alpha_2) \oplus \ldots \oplus L(\alpha_{m-1})) \cap L(\alpha_m)$. С одной стороны, $a \in L(\alpha_m)$, т.е. существует такое натуральное n, для которого $(f - \alpha_m\varepsilon)^n(a) = 0$. С другой стороны, $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1}$, где $a_i \in L(\alpha_i)$. Для каждого a_i есть своё число $n(i)$, для которого $(f - \alpha_i\varepsilon)^{n(i)}(a_i) = 0$. Поэтому

$\prod_{i=1}^{m-1}(f - \alpha_i\varepsilon)^{n(i)}(a) =$

$= \prod_{i=1}^{m-1}(f - \alpha_i\varepsilon)^{n(i)}(a_1) + \prod_{i=1}^{m-1}(f - \alpha_i\varepsilon)^{n(i)}(a_2) + \ldots + \prod_{i=1}^{m-1}(f - \alpha_i\varepsilon)^{n(i)}(a_{m-1}) = 0,$

ибо

$$\prod_{i=1}^{m-1}(f - \alpha_i\varepsilon)^{n(i)}(a_j) = \left(\prod_{i=1}^{j-1}(f - \alpha_i\varepsilon)^{n(i)}\right)(f - \alpha_j\varepsilon)^{n(j)}\left(\prod_{i=1}^{j-1}(f - \alpha_i\varepsilon)^{n(i)}\right)(a_j) = 0.$$

Рассмотрим многочлены $h(x) = (x - \alpha_1)^{n(1)} (x - \alpha_2)^{n(2)} \ldots (x - \alpha_{m-1})^{n(m-1)}$ и $g(x) = (x - \alpha_m)^n$. Эти два многочлена взаимно просты, поэтому существуют такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, для которых $u(x)\,h(x) + v(x)\,g(x) = 1$.

В каждый многочлен подставим вместо переменной x преобразование f.

? Как в этом случае быть с константой?

$h(f) = \prod_{i=1}^{m-1}(f - \alpha_i\varepsilon)^{n(i)};$

$g(f) = (f - \alpha_m\varepsilon)^n;$

тождество $u(x)\,h(x) + v(x)\,g(x) = 1$ превратится в $u(f)\,h(f) + v(f)\,g(f) = \varepsilon$.

Тогда

$a = \varepsilon(a) = (u(f)\,h(f) + v(f)\,g(f))\,(a) = (u(f)\,h(f))\,(a) + (v(f)\,g(f))\,(a) =$

$= u(f)\,(h(f)\,(a)) + v(f)\,(g(f)\,(a)) = 0 + 0 = 0.$

А это и требовалось доказать. □

§ 4. Корневое разложение линейного пространства

Теперь попытаемся построить разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств немного по-другому.

Пусть 0 – собственное число линейного преобразования f. Корневое подпространство $L(0)$ называют ***нилькомпонентой преобразования f***.

Теорема 1 (Лемма Фитинга). Пусть 0 является собственным числом линейного преобразования f линейного пространства L. Тогда существует такое подпространство

V, инвариантное относительно f, для которого $L = L(0) \oplus V$ и ограничение f на V является обратимым преобразованием.

Доказательство. Мы уже обсуждали, что в силу конечномерности пространства L подпространство $L(0) = L_n(0)$ для некоторого натурального n. Будем считать, что n – наименьшее, для которого это случилось.

Рассмотрим другую цепочку подпространств:

$$V_1 = \operatorname{Im} f,\ V_2 = \operatorname{Im} f^2,\ \ldots,\ V_i = \operatorname{Im} f^i,\ \ldots .$$

Ясно, что $V_{i+1} = f(V_i)$, поэтому каждое подпространство V_i инвариантно относительно f и более того $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots \supseteq V_i \supseteq V_{i+1} \supseteq \ldots$. В силу конечномерности L такая цепочка не может строго убывать бесконечно, так что на каком-то шаге подпространства начнут совпадать. По определению $L_i(0) = \operatorname{Ker} f^i$, так что по теореме о ранге и дефекте $\dim L_i(0) + \dim V_i = \dim L$. Поэтому совпадение подпространств V_i начнется ровно для $i = n$.

Положим $V = V_n$. Поскольку $V = V_n = V_{n+1} = f(V_n) = f(V)$, ранг ограничения f на подпространство V совпадает с размерностью V, а значит, f на V обратимое преобразование. А тогда и f^n – обратимое преобразование на V.

Покажем, что сумма $L(0)$ и V прямая. Пусть $x \in L(0) \cap V$. Тогда $f^n(x) = 0$. Но $f^n(x) \in V$ в силу инвариантности V относительно f. А преобразование f^n обратимо на V, так что $x = 0$.

Если бы $L(0) \oplus V \neq L$, то $\dim L > \dim (L(0) \oplus V) = \dim L(0) + \dim V = \dim L$ – противоречие. □

Определение. Подпространство V называется ***1-компонентой Фитинга*** преобразования f.

Вернёмся теперь к корневым подпространствам. Чтобы видеть, для какого именно преобразования мы рассматриваем корневое подпространство, будем символ преобразования тоже писать в обозначении корневого подпространства: $L_f(\alpha)$.

Лемма. $L_f(\alpha) = L_{(f\ -\ \alpha\varepsilon)}(0)$.

Доказательство очевидно.

Теорема 2 (О корневом разложении). Пусть характеристический многочлен линейного преобразования f линейного пространства L разлагается на линейные множители. Тогда пространство L является прямой суммой корневых подпространств преобразования f.

Доказательство. Пусть α_1, α_2, …, α_m – все различные собственные числа преобразования f. Характеристический многочлен $g(x)$ преобразования f тогда имеет вид $(\alpha_1 - x)^{k_1} (\alpha_2 - x)^{k_2} \ldots (\alpha_m - x)^{k_m}$, где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = \dim L$.

По лемме $L_f(\alpha_1) = L_{(f-\alpha_1\varepsilon)}(0)$. По теореме 1 существует подпространство V_1, инвариантное относительно $f - \alpha_1\varepsilon$, а значит и относительно f, причём $L = L_f(\alpha_1) \oplus V_1$. Тогда матрица преобразования f в подходящем базисе будет распавшейся:

$$\begin{pmatrix} [f|_{L_f(\alpha_1)}] & 0 \\ 0 & [f|_{V_1}] \end{pmatrix}.$$

Поэтому характеристический многочлен $g(x)$ преобразования f равен

$$\det([f|_{L_f(\alpha_1)}] - xE) \det([f|_{V_1}] - xE).$$

Заметим, что $\det([f|_{L_f(\alpha_1)}] - xE) = (\alpha_1 - x)^s$, поскольку все собственные векторы ограничения преобразования f на подпространство $L_f(\alpha_1)$ сосредоточены в $L_1(\alpha_1)$. Значит,

$$\det([f|_{V_1}] - xE) = (\alpha_1 - x)^{k_1 - s} (\alpha_2 - x)^{k_2} \ldots (\alpha_m - x)^{k_m}.$$

Если $k_1 - s \neq 0$, то это означает, что ограничение преобразования f на подпространство V_1 имеет α_1-корневое подпространство. Но оно должно было попасть в $L_f(\alpha_1)$, что противоречит $L_f(\alpha_1) \cap V_1 = 0$.

На пространстве V_1 преобразование f имеет характеристический многочлен $g_1(x) = (\alpha_2 - x)^{k_2} \ldots (\alpha_m - x)^{k_m}$, поэтому α_2 – собственное число f на этом подпространстве и, значит, $V_1 = L_f(\alpha_2) \oplus V_2$. Характеристический многочлен преобразования f на подпространстве V_2 равен $(\alpha_3 - x)^{k_3} \ldots (\alpha_m - x)^{k_m}$ и т.д. Последним будет корневое подпространство $L_f(\alpha_m)$. Следовательно, пространство L есть прямая сумм своих корневых подпространств. □

Следствие 1. Размерность α-корневого подпространства равна кратности корня α в характеристическом многочлене преобразования f.

Доказательство. Заметим, что $\dim L_f(\alpha)$ равна размерам клетки в рассмотренном матричном представлении преобразования f, а размер каждой клетки совпадает со степенью характеристического многочлена ограничения f на $L_f(\alpha)$. Он в свою очередь равен $(\alpha - x)^k$, где k – кратность корня α в характеристическом многочлене преобразования f. □

Следствие 2. $L_f(\alpha) = \mathrm{Ker}\,(f - \alpha\varepsilon)^k$, где k – кратность корня α в характеристическом многочлене преобразования f.

Доказательство. В цепочке $L_1(\alpha) \subseteq L_2(\alpha) \subseteq \ldots \subseteq L_n(\alpha)$ различных подпространств не может быть больше, чем $\dim L_f(\alpha)$. □

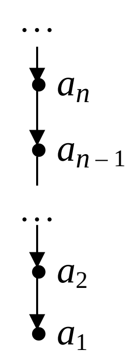
§ 5. Жорданова форма матрицы линейного преобразования

Из теоремы о корневом разложении следует, что теперь надо изучить, как может быть устроена матрица линейного преобразования на корневом подпространстве. Поэтому в первой части этого параграфа будем считать, что $L = L_f(\alpha)$ для некоторого собственного числа α преобразования f.

Лемма 2, п. 4 из § 3 утверждает, что $(f - \alpha\varepsilon)\,(L_n(\alpha)) \subseteq L_{n-1}(\alpha)$. Это наблюдение делает естественным следующее понятие.

Определение 1. Последовательность векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется ***α-серией***, если $a_1 \neq 0$, $(f - \alpha\varepsilon)(a_1) = 0$ и $(f - \alpha\varepsilon)(a_n) = a_{n-1}$ для $n > 1$.

Мы будем изображать α-серию так, как показано справа. Стрелочки показывают нам, куда переходит вектор после применения к нему преобразования $f - \alpha\varepsilon$.



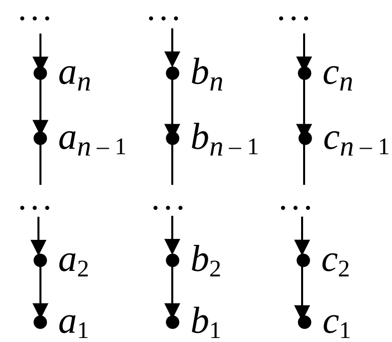
Ясно, $a_1 \in L_1(\alpha)$, $a_2 \in L_2(\alpha)$, …, $a_n \in L_n(\alpha)$, … .

Мы знаем, что a_1 – собственный вектор преобразования f. И, вообще говоря, с каждого собственного вектора начинается некоторая α-серия. Я не буду применять двойную индексацию, а просто писать, что другая серия начинается с b_1, третья – с c_1 и т.д. Впрочем, если мы возьмём произвольный вектор из пространства L и будем последовательно применять преобразование $f - \alpha\varepsilon$, то на каком-то шаге получим 0, а на предыдущем собственный вектор. У нас и в этом случае появится α-серия. Иными словами, каждый вектор пространства L может быть включён в некоторую α-серию.

Определение 2. ***Диаграммой*** называется объединение некоторого набора α-серий, у которых собственные векторы преобразования f линейно независимы.

Диаграмму будем обозначать буквой $\boldsymbol{D}$ и изображать так, как показано справа.

Ясно, что количество α-серий в диаграмме конечно, поскольку конечна размерность пространства L. На самом деле конечна вся диаграмма, что вытекает из следующей теоремы.



Теорема 1. Любая диаграмма является линейно независимой системой векторов.

Доказательство. Положим $D_i = \boldsymbol{D} \cap L_i(\alpha)$. Видно, что $D_1 = \{a_1, b_1, c_1, \ldots\}$, $D_2 = \{a_1, b_1, c_1, \ldots, a_2, b_2, c_2, \ldots\}$ и т.д.

Индукцией по i докажем, что система векторов D_i линейно независима.

Б.И. выполнена по определению диаграммы.

Ш.И. Пусть уже доказано, что D_{i-1} линейно независима. Запишем линейную комбинацию векторов из D_i:

$$\rho_i a_i + \sigma_i b_i + \tau_i c_i + \ldots + \rho_{i-1}a_{i-1} + \sigma_{i-1}b_{i-1} + \tau_{i-1}c_{i-1} + \ldots + \ldots + \rho_1 a_1 + \sigma_1 b_1 + \tau_1 c_1 + \ldots = 0.$$

Применим к обеим частям равенства преобразование $f - \alpha\varepsilon$. Получим

$$\rho_i a_{i-1} + \sigma_i b_{i-1} + \tau_i c_{i-1} + \ldots + \rho_2 a_1 + \sigma_2 b_1 + \tau_2 c_1 + \ldots = 0.$$

Но это линейная комбинация векторов из D_{i-1}. Ввиду линейной независимости имеем $\rho_i = \sigma_i = \tau_i = \ldots = \rho_2 = \sigma_2 = \tau_2 = \ldots = 0$. Тогда исходная линейная комбинация превращается в $\rho_1 a_1 + \sigma_1 b_1 + \tau_1 c_1 + \ldots = 0$, откуда $\rho_1 = \sigma_1 = \tau_1 = \ldots = 0$. □

Следствие. Каждая α-серия конечна и порождает инвариантное относительно f. подпространство.

Доказательство очевидно.

Определение 3. Диаграмма называется **максимальной**, если она содержит наибольшее число элементов.

Теорема 2. Максимальная диаграмма является базисом пространства L.

Пусть $\boldsymbol{D}$ – некоторая максимальная диаграмма. Ввиду теоремы 1 нам требуется доказать лишь то, что $\boldsymbol{D}$ – это система образующих для пространства L. Для доказательства нам потребуется ещё одно рабочее понятие. Поскольку L – α-корневое пространство, для каждого $x \in L$ найдётся натуральное n, для которого $(f - \alpha\varepsilon)^n(x) = 0$. Наименьшее n, для которого это выполняется, будем называть ***высотой вектора*** x и обозначать $h(x)$.

Докажем индукцией по $h(x)$ следующее утверждение: если $h(x) = k$, то $x \vdash D_k$.

Б.И. $k = 1$. Если x не выражается линейно через D_1, добавим его в диаграмму $\boldsymbol{D}$. Это снова будет диаграмма, что противоречит максимальности $\boldsymbol{D}$. Фактически мы показали, что D_1 – базис пространства $L_1(\alpha)$.

Ш.И. Пусть утверждение доказано для всех векторов, высота которых не больше $k - 1$. Пусть $h(x) = k$. Положим $y = (f - \alpha\varepsilon)(x)$. Заметим, что $h(y) = k - 1$. По предположению индукции $y \vdash D_{k-1}$. Запишем его выражение через векторы из D_{k-1}:

$$y = \rho_{k-1}a_{k-1} + \sigma_{k-1}b_{k-1} + \tau_{k-1}c_{k-1} + \ldots + \rho_{k-2}a_{k-2} + \sigma_{k-2}b_{k-2} + \tau_{k-2}c_{k-2} + \ldots .$$

Отметим, что хотя бы один из коэффициентов ρ_{k-1}, σ_{k-1}, τ_{k-1} … отличен от 0, ибо в противном случае $h(y) < k - 1$, а тогда $h(x) < k$. Будем считать, что в записи элемента y присутствуют только ненулевые слагаемые.

Рассмотрим далее два случая.

1) Каждый из векторов a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}, …, p_{k-1}, фигурирующих в записи вектора y, не является последним в своей α-серии. Рассмотрим вектор z, определённый следующим равенством:

$$z = x - (\rho_{k-1}a_k + \sigma_{k-1}b_k + \tau_{k-1}c_k + \ldots + \xi_{k-1}p_k).$$

Тогда

$(f - \alpha\varepsilon)(z) =$

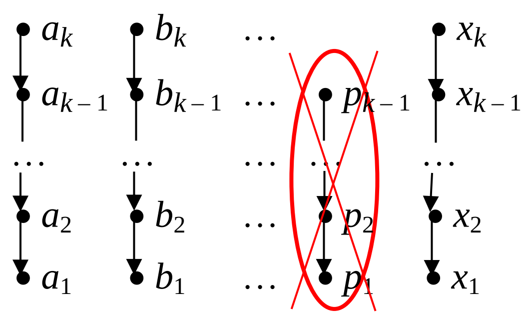
$(f - \alpha\varepsilon)(x) - (f - \alpha\varepsilon)(\rho_{k-1}a_k) - (f - \alpha\varepsilon)(\sigma_{k-1}b_k) - (f - \alpha\varepsilon)(\tau_{k-1}c_k) - \ldots - (f - \alpha\varepsilon)(\xi_{k-1}p_k) =$

$= y - \rho_{k-1}a_{k-1} - \sigma_{k-1}b_{k-1} - \tau_{k-1}c_{k-1} - \ldots. - \xi_{k-1}p_{k-1} =$

$= \rho_{k-2}a_{k-2} + \sigma_{k-2}b_{k-2} + \tau_{k-2}c_{k-2} + \ldots$

Следовательно, $h((f - \alpha\varepsilon)(z)) \le k - 2$. Но тогда $h(z) \le k - 1$. По предположению индукции $z \vdash D_{k-1}$. Поскольку $x = \rho_{k-1}a_k + \sigma_{k-1}b_k + \tau_{k-1}c_k + \ldots + \xi_{k-1}p_k + z$, получаем, что $x \vdash D_k$, ибо $a_k, b_k, c_k, \ldots, p_k \in D_k$.

2) Один из векторов a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}, …, p_{k-1}, фигурирующих в записи вектора y, является последним в своей α-серии. Поскольку нет разницы, в каком порядке располагаются α-серии в изображении диаграммы $\boldsymbol{D}$, будем считать, что это α-серия вектора p_{k-1}. Дальше поступим так.



Пусть $x = x_k$ и положим $x_{k-1} = (f - \alpha\varepsilon)(x_k)$,

$x_{k-2} = (f - \alpha\varepsilon)(x_{k-1}), \ldots, x_1 = (f - \alpha\varepsilon)(x_2)$. Вырежем из диаграммы α-серию p и вклеим вместо неё α-серию x. Докажем, что у нас снова получится диаграмма. Для этого надо проверить, что векторы, расположенные в нижнем ряду линейно независимы. Это множество векторов можно записать так: $(D_1 \setminus \{p_1\}) \cup \{ x_1\}$.

С одной стороны, D_1 – базис $L_1(\alpha)$. Поэтому система $(D_1 \setminus \{p_1\}) \cup \{ x_1\} \vdash D_1$. С другой стороны,

$$y = \rho_{k-1}a_{k-1} + \sigma_{k-1}b_{k-1} + \tau_{k-1}c_{k-1} + \ldots + \xi_{k-1}p_{k-1} + \rho_{k-2}a_{k-2} + \sigma_{k-2}b_{k-2} + \tau_{k-2}c_{k-2} + \ldots,$$

Поэтому $x_1 = (f - \alpha\varepsilon)^{k-2}(y) = \rho_{k-1}a_1 + \sigma_{k-1}b_1 + \tau_{k-1}c_{k1} + \ldots + \xi_{k-1}p_1$. Отсюда

$$p_1 = \frac{1}{\xi_{k-1}}(x_1 - \rho_{k-1}a_1 - \sigma_{k-1}b_1 - \tau_{k-1}c_{k1} - \ldots).$$

Следовательно, $D_1 \vdash (D_1 \setminus \{p_1\}) \cup \{ x_1\}$. Значит, системы D_1 и $(D_1 \setminus \{p_1\}) \cup \{ x_1\}$ эквивалентны, содержат одинаковое число векторов, поэтому $(D_1 \setminus \{p_1\}) \cup \{ x_1\}$ – тоже базис и, значит, линейно независимая система. Но тогда получается диаграмма, содержащая больше элементов, чем в $\boldsymbol{D}$ – противоречие. □

Теперь приступим к конструированию матрицы преобразования f. Благодаря следствию из Теоремы 1 и Теореме 2, α-корневое подпространство является прямой суммой инвариантных подпространств, порождённых всеми α-сериями, образующими максимальную диаграмму. Следовательно, матрица преобразования f будет квазидиагональной, если в качестве базиса взять выписанные последовательно α-серии максимальной диаграммы:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}, \ldots, h_1, h_2, \ldots, h_{n_m}.$$

Осталось записать, как выглядит матрица преобразования f, когда базисом является α-серия. Возьмём для примера α-серию $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$.

$(f - \alpha\varepsilon)(a_1) = 0 \quad \Rightarrow \ f(a_1) = \alpha a_1;$
$(f - \alpha\varepsilon)(a_2) = a_1 \quad \Rightarrow \ f(a_2) = \alpha a_2 + a_1;$
$(f - \alpha\varepsilon)(a_3) = a_2 \quad \Rightarrow \ f(a_3) = \alpha a_3 + a_2;$
…
$(f - \alpha\varepsilon)(a_{n_1}) = a_{n_1-1} \quad \Rightarrow \ f(a_{n_1}) = \alpha a_{n_1} + a_{n_1-1}.$

Значит, матрица преобразования в этом базисе выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Матрица такого вида называется ***жордановой клеткой***.

Вернёмся к общей задаче. Пусть пространство L разложилось в прямую сумму корневых подпространств. Если теперь для каждого корневого подпространства в качестве базиса взять последовательность соответствующих корневых серий из максимальной диаграммы и всё вместе рассмотрим как базис всего L, то матрица преобразования f в этом базисе будет квазидиагональной и на её диагонали стоят жордановы клетки. Матрица такого вида называется ***жордановой формой*** матрицы преобразования f. Фактически доказана следующая

Теорема 3 (существования жордановой формы). Если характеристический многочлен линейного преобразования f линейного пространства L разлагается на линейные множители, то существует такой базис пространства L, в котором матрица преобразования f имеет жорданову форму.

Сформулируем также матричную версию этой теоремы, вспоминая, что переход к другому базису – это замена матрицы на ей подобную.

Теорема 3′. Если характеристический многочлен квадратной матрицы разлагается на линейные множители, то она подобна матрице в жордановой форме.

Из этой теоремы мы получим одно удивительное следствие. Напомним, что для любой квадратной матрицы с элементами из некоторого ассоциативно-коммутативного кольца (необязательно даже поля!) и произвольного многочлена над этим кольцом можно вычислить значение многочлена от этой матрицы.

Теорема 4 (Гамильтона – Кэли). Каждая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что если для некоторого многочлена $g(x)$ и некоторой матрицы A выполнено равенство $g(A) = 0$, то и для любой матрицы B, подобной матрице A, выполняется равенство $g(B) = 0$. Действительно, поскольку $B = T^{-1}AT$ для некоторой обратимой матрицы T, $g(B) = g(T^{-1}AT) = T^{-1}g(A)T = 0$.

Пусть теперь A – произвольная квадратная матрица размеров $n \times n$, $g(x)$ – её характеристический многочлен. Рассмотрим сначала случай, когда $g(x)$ разлагается на линейные множители:

$$g(x) = (-1)^n(x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_m)^{k_m},$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Вместо матрицы A мы можем подставить в $g(x)$ её жорданову форму, получаемую благодаря теореме 3′. Обозначим её B. Её общий вид таков:

$$
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \end{array} & & & & \\
\hline
 & \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_1 \end{array} & & & \\
\hline
 & & \dots & & \\
\hline
 & & & \begin{array}{ccccc} \alpha_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_2 \end{array} & \\
\hline
 & & & & \dots
\end{array}\right).
$$

? Каковы размеры матрицы, записанной в левом верхнем углу и ограниченной красными линиями (т.е. до начала клеток с числами α_2 на диагонали матрицы)?

Согласно следствию 1 к теореме о корневом разложении её размеры $k_1 \times k_1$.

Вычислим значение $(x - \alpha_1)^{k_1}$ после подстановки вместо x матрицы B:

$$
\left(\begin{array}{c|c}
\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} & \\ & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \\ & \dots \end{array} & \\
\hline
 & \begin{array}{ccccc} \alpha_2 - \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_2 - \alpha_1 \\ & & & & \dots \end{array}
\end{array}\right)^{k_1}
$$

? Как возвести квазидиагональную матрицу в степень?

Надо возвести в степень каждую диагональную клетку.

! Проверьте, что при возведении матрицы $\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \ldots 0\,0 \\ 0\,0\,1 \ldots 0\,0 \\ 0\,0\,0 \ldots 0\,0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\,0\,0 \ldots\ 0\,1 \\ 0\,0\,0 \ldots 0\,0 \end{pmatrix}$ в степень, не меньшую, чем размер этой матрицы, получается нулевая матрица.

Значит, после возведения матрицы $B - \alpha_1 E$ в степень k_1 в верхнем левом красном углу получится нулевая матрица.

Аналогично при вычислении $(B - \alpha_2 E)^{k_2}$ возникнет нулевая матрица в том квадрате, где у матрицы B стоит число α_2. И т.д. Чтобы вычислить $g(B)$, надо перемножить все получившиеся квазидиагональные матрицы. Ясно, что получится нулевая матрица.

Чтобы доказать теорему и в том случае, когда характеристический многочлен не разлагается на линейные множители, мы используем однажды уже применявшийся приём. Мы рассмотрим алгебраически замкнутое поле $\bar{F}$, содержащее поле F, и уже над $\bar{F}$ заменим матрицу A на подобную ей матрицу B в жордановой форме. Характеристический многочлен у матриц A и B один и тот же, и, значит, его значение от матрицы A равно 0 по уже доказанному. □

§ 6. Единственность жордановой формы матрицы линейного преобразования

Начнем с простого наблюдения: если матрица преобразования f в некотором базисе является жордановой клеткой с числом α на диагонали, то этот базис представляет собой α-серию. Чтобы в этом убедиться, достаточно переписать уже рассматривавшиеся соотношения:

$f(a_1) = \alpha a_1 \quad \Rightarrow \quad (f - \alpha\varepsilon)(a_1) = 0;$

$f(a_2) = \alpha a_2 + a_1 \quad \Rightarrow \quad (f - \alpha\varepsilon)(a_2) = a_1;$

$f(a_3) = \alpha a_3 + a_2 \quad \Rightarrow \quad (f - \alpha\varepsilon)(a_3) = a_2;$

…

$f(a_{n_1}) = \alpha a_n + a_{n-1} \quad \Rightarrow \quad (f - \alpha\varepsilon)(a_n) = a_{n-1}.$

Записанные в правой части равенства означают, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – это α-серия.

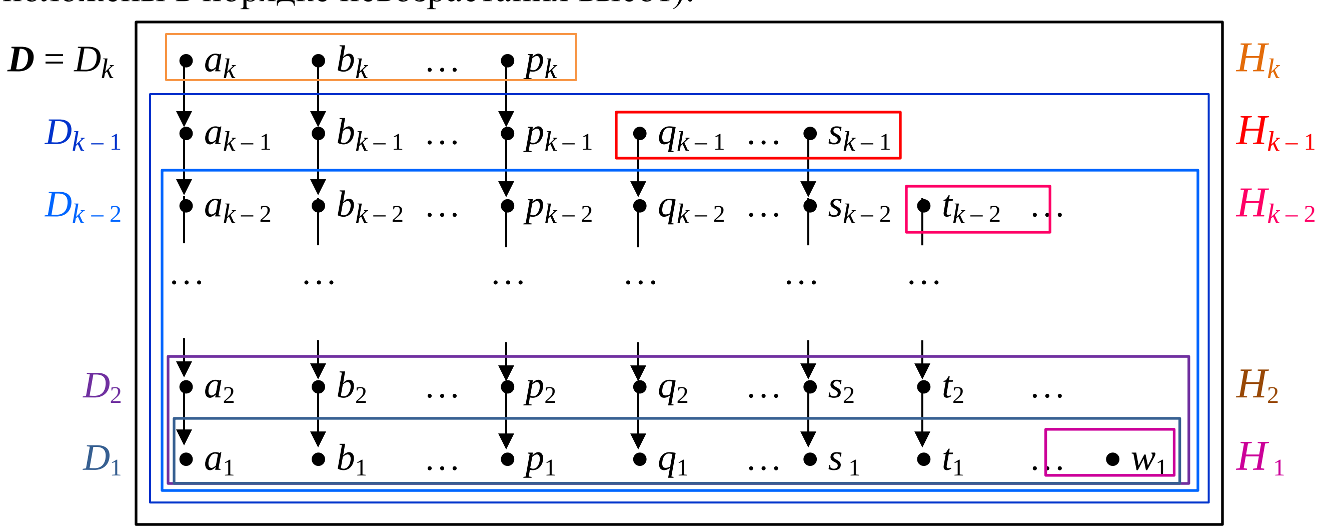
Тем самым, по жордановой форме однозначно восстанавливается максимальная диаграмма для соответствующего корневого подпространства. Сами корневые подпространства определены линейным преобразованием f однозначно – это $\operatorname{Ker}(f - \alpha\varepsilon)^k$, где k – кратность корня α в характеристическом многочлене преобразования f. Поэтому однозначность жордановой формы – это вопрос об однозначном определении максимальной диаграммы для линейного преобразования на каждом корневом подпространстве.

Надо, конечно, понимать, что порядок корневых подпространств в корневом разложении, как и порядок α-серий в диаграмме, может быть произвольным. Значит, и жордановы клетки в жордановой форме матрицы тоже могут располагаться на диагонали в произвольном порядке.

Теорема (о единственности жордановой формы). Жорданова форма матрицы определена однозначно с точностью до расположения жордановых клеток на диагонали.

Доказательство. Как уже было сказано, нам достаточно показать, что однозначно определена максимальная диаграмма для α-корневого подпространства. В ходе доказательства теоремы о максимально диаграмме мы установили, что D_i – базис $L_i(\alpha) = \operatorname{Ker}(f - \alpha\varepsilon)^i$. Пространство $\operatorname{Ker}(f - \alpha\varepsilon)^i$ однозначно определено преобразованием f, значит и количество элементов в D_i однозначно определено преобразованием f. Количество элементов в D_1 – это число α-серий в максимальной диаграмме, а это количество жордановых клеток с числом α на диагонали. Размер клетки – это длина, или высота, α-серии, значит нам надо доказать, что комплект высот тоже зависит только от f.

Пусть некоторая максимальная диаграмма выглядит так (для удобства α-серии расположены в порядке невозрастания высот):



Нам известны числа $|D_k|$, $|D_{k-1}|$, $|D_{k-2}|$, …. $|D_2|$, $|D_1|$ – это количества точек в больших сине-фиолетово-чёрных прямоугольниках. А нам требуется узнать количества элементов в красно-малиново-коричневых диагонально расположенных прямоугольниках $|H_k|$, $|H_{k-1}|$, $|H_{k-2}|$, …. $|H_2|$, $|H_1|$.

$|H_k| = |D_k| - |D_{k-1}|$;

$|H_{k-1}| = (|D_{k-1}| - |D_{k-2}|) - (|D_k| - |D_{k-1}|) = 2|D_{k-1}| - |D_k| - |D_{k-2}|$;

$|H_{k-2}| = (|D_{k-2}| - |D_{k-3}|) - (|D_{k-1}| - |D_{k-2}|) = 2|D_{k-2}| - |D_{k-1}| - |D_{k-3}|$;

…

$|H_2| = (|D_2| - |D_1|) - (|D_3| - |D_2|) = 2|D_2| - |D_3| - |D_1|$;

$|H_1| = |D_1| - (|D_2| - |D_1|) = 2|D_1| - |D_2|$.

Тем самым, числа $|H_k|$, $|H_{k-1}|$, $|H_{k-2}|$, …. $|H_2|$, $|H_1|$ однозначно определены самим преобразованием f и не зависят от способа построения максимальной диаграммы. □

Следствие. Квадратные матрицы одного размера подобны тогда и только тогда, когда у них совпадают жордановы формы.

Доказательство очевидно.

§ 7. Нормальные линейные преобразования линейного пространства со скалярным произведением

В пространствах со скалярным произведением мы рассмотрим достаточно широкий и важный класс линейных преобразований, который содержит в себе изометрические и самосопряжённые преобразования. В его определении фигурирует понятие сопряженного преобразования.

! Вспомните определение сопряжённого отображения.

Определение. Линейное преобразование пространства со скалярным произведением называется ***нормальным***, если оно перестановочно со своим сопряжённым преобразованием.

Иными словами выполняется равенство $f \circ f^* = f^* \circ f$.

Из определения сразу ясно, что изометрические и самосопряженные преобразования нормальны.

! Объясните почему.

Но прежде чем начинать изучение нормальных преобразований, докажем полезное утверждение о связи инвариантных подпространств преобразований f и f^*.

Лемма 1. Если M – инвариантное подпространство преобразования f, то $M^\perp$ – инвариантное подпространство преобразования f^*.

Доказательство. Пусть $y \in M^\perp$. Тогда

$$\forall \in M\ (x, f^*(y)) = (f(x), y) = 0,$$

т.к. $f(x) \in M$, а $M \perp M^\perp$. □

Лемма 2. Если f – нормальное преобразование, то для любых чисел α и β преобразования $f - \alpha\varepsilon$ и $f^* - \beta\varepsilon$ перестановочны.

Доказательство.

$$(f - \alpha\varepsilon) \circ (f^* - \beta\varepsilon) = f \circ f^* - \alpha\varepsilon \circ f^* - f \circ \beta\varepsilon + \alpha\varepsilon \circ \beta\varepsilon = f^* \circ f - f^* \circ \alpha\varepsilon - \beta\varepsilon \circ f + \beta\varepsilon \circ \alpha\varepsilon =$$

$$= (f^* - \beta\varepsilon) \circ (f - \alpha\varepsilon).$$ □

Теорема 1. Пусть a – собственный вектор нормального преобразования f, соответствующий собственному числу α. Тогда a является собственным вектором преобразования f^*, соответствующим собственному числу $\bar{\alpha}$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $(f^* - \bar{\alpha}\varepsilon)(a) = 0$. Запишем следующую цепочку равенств:

$$((f^* - \bar{\alpha}\varepsilon)(a), (f^* - \bar{\alpha}\varepsilon)(a)) = (a, (f^* - \bar{\alpha}\varepsilon)^*((f^* - \bar{\alpha}\varepsilon)(a))) = (a, (f - \alpha\varepsilon)((f^* - \bar{\alpha}\varepsilon)(a))) =$$

$$= (a, ((f^* - \bar{\alpha}\varepsilon) \circ (f - \alpha\varepsilon))(a)) = (a, ((f - \alpha\varepsilon) \circ (f^* - \bar{\alpha}\varepsilon))(a)) = (a, (f^* - \bar{\alpha}\varepsilon)((f - \alpha\varepsilon)(a))) =$$

$$= ((f^* - \bar{\alpha}\varepsilon)^*(a), (f - \alpha\varepsilon)(a)) = ((f^{**} - \bar{\bar{\alpha}}\varepsilon)(a), (f - \alpha\varepsilon)(a)) = ((f - \alpha\varepsilon)(a), (f - \alpha\varepsilon)(a)) = 0.$$

Это означает, что $(f^* - \bar{\alpha}\varepsilon)(a) = 0$. □

Следствие 1. Собственные векторы нормального преобразования, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

Доказательство. Пусть a и b – собственные векторы нормального преобразования f с собственными числами α и β соответственно. Тогда

$$\alpha(a, b) = (f(a), b) = (a, f^*(b)) = (a, \bar{\beta}b) = \beta(a, b),$$

откуда $(\alpha - \beta)(a, b) = 0$, следовательно, $(a, b) = 0$. □

Теорема 2. Пусть характеристический многочлен преобразования f разлагается на линейные множители. Преобразование f нормально тогда и только тогда, когда в пространстве L существует ортонормированный базис из собственных векторов.

Доказательство из условия нормальности в существование базиса проведём индукцией по размерности пространства L.

Б.И. $\dim L = 1$. В пространстве L берём базисный вектор единичной длины, он-то и годится.

Ш.И. Пусть утверждение доказано, если $\dim L < n$. Рассмотрим, когда $\dim L = n$. Пусть a – собственный вектор преобразования f. Нормировав его, мы получим собственный вектор e_1. Это первый вектор будущего базиса.

Одномерное подпространство $< e_1 >$ инвариантно относительно f. По теореме 1 оно инвариантно относительно f^*. По лемме 1 подпространство $M = < e_1 >^{\perp}$ инвариантно как относительно f^*, так и относительно $f^{**} = f$. Значит, можно рассматривать ограничения преобразований f и f^* на подпространство M.

На подпространстве у нас имеется то же самое скалярное произведение, что и на пространстве L. Легко проверить, что $(f_{|M})^* = f^*{}_{|M}$.

! Проверьте самостоятельно.

Тогда нетрудно установить, что $f_{|M}$ нормальное преобразование пространства M – ведь $f \circ f^*$ и $f^* \circ f$ имеют одно и то же значение на любом векторе из L, а значит, и на любом векторе из M.

По теореме об ортогональном разложении $L = < e_1 > \oplus M$. Значит, $\dim M = n - 1$. По предположении индукции в M существует ортонормированный базис $e_2, e_3, \ldots, e_n$, состоящий из собственных векторов преобразования $f_{|M}$. Но, конечно, это и собственные векторы самого преобразования f. А тогда $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – это ортонормированный базис пространства L, состоящий из собственных векторов преобразования f.

Обратно. Возьмем ортонормированный базис пространства L, состоящий из собственных векторов преобразования f, и запишем в нём матрицу этого преобразования. Она на диагональна и на диагонали стоят…

? Что стоит на диагонали?

$$[f] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Поскольку $[f^*] = \overline{[f]^t}$,

$$[f^*] = \begin{pmatrix} \bar\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar\alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Тогда $[f \circ f^*] = [f^*]\,[f] = \begin{pmatrix} \bar\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar\alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar\alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar\alpha_1\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar\alpha_2\alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar\alpha_n \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \alpha_1\bar\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2\bar\alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n\bar\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar\alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar\alpha_n \end{pmatrix} = [f]\;[f^*] = [f^* \circ f]$,
следовательно, $f \circ f^* = f^* \circ f$. □

Следствие 2. Линейное преобразование линейного пространства со скалярным произведением самосопряженное тогда и только тогда, когда оно нормальное и все корни характеристического многочлена действительные.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно в силу определений нормального и самосопряженного преобразований и теоремы 3 из § 3 Главы 9. В обратную сторону утверждение легко получается применением доказанной теоремы и теоремы 4 из § 3 Главы 9.

§ 8. Нормальные линейные преобразования евклидова пространства

Нетрудно понять, что проблемы с построением структурной теории линейных преобразований над полем действительных чисел возникают из-за того, что не каждый многочлен разлагается на линейные множители. Мы с такой проблемой уже встречались и тогда привлекали в помощь пространство над полем ***C***.

Теорема 1. Для любого линейного преобразования f линейного пространства L над полем ***R*** существует не более чем двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Если характеристический многочлен линейного преобразования f имеет действительный корень, то в пространстве L существует собственный вектор для f и, следовательно, есть одномерное инвариантное подпространство относительно f.

Пусть теперь у характеристического многочлена линейного преобразования f нет действительного корня. Тогда этот многочлен разлагается в произведение неприводимых многочленов второй степени. Возьмём один из них: $x^2 + px + q$. Пусть

α – один из его комплексных корней. Второй из них $\bar{\alpha}$. Запишем $\alpha = \sigma + \tau i = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; тогда $\bar{\alpha} = \sigma - \tau i$.

Зафиксируем некоторый базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ пространства L и запишем в нём матрицу преобразования f. Возьмем теперь линейное пространство U над $\boldsymbol{C}$ такой же размерности, как и у пространства L, тоже зафиксируем в нём базис и определим на L линейное преобразование с матрицей $[f]$. Обозначим его g. (В литературе вы можете встретить для него название «***комплексификация преобразования*** *f*» и обозначение f_C.)

Характеристические многочлены преобразований f и g совпадают, так что α и $\bar{\alpha}$ – собственные числа преобразования g. Пусть z – собственный вектор преобразования , соответствующий числу α. Вектор $z \in U$, так что $[z] = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 i \\ \alpha_2 + \beta_2 i \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n + \beta_n i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ – действительные числа. Поэтому в пространстве L можно рассмотреть векторы $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$ и $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_n a_n$.

С одной стороны,

$$[g(z)] = [g]\,[z] = [g]\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}\right) = [g] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + i\,[g] \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix} =$$

$$= [f] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + i\,[f] \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix} = [f]\,[a] + i\,[f]\,[b] = [f(a)] + i\,[f(b)].$$

С другой стороны,

$$[g(z)] = \alpha[z] = (\sigma + \tau i)\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sigma\alpha_1 - \tau\beta_1 \\ \sigma\alpha_2 - \tau\beta_2 \\ \ldots \\ \sigma\alpha_n - \tau\beta_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \tau\alpha_1 + \sigma\beta_1 \\ \tau\alpha_2 + \sigma\beta_2 \\ \ldots \\ \tau\alpha_n + \sigma\beta_n \end{pmatrix} =$$

$$= [\sigma a - \tau b] + i\,[\tau a + \sigma b],$$

откуда $[f(a)] = [\sigma a - \tau b]$ и $[f(b)] = [\tau a + \sigma b]$. Следовательно, в пространстве L

$$f(a) = \sigma a - \tau b \text{ и } f(b) = \tau a + \sigma b,$$

т.е. подпространство $V = < a, b >$ инвариантно относительно преобразования f, причём $f|_V$ в базисе a, b имеет матрицу $\begin{pmatrix} \sigma & \tau \\ -\tau & \sigma \end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. □

! Докажите, что вектор $[\bar{z}] = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 i \\ \alpha_2 - \beta_2 i \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_n - \beta_n i \end{pmatrix}$ собственный для преобразования g с собственным числом $\bar{\alpha}$.

Лемма. Пусть f – нормальное преобразование двумерного евклидова пространства V и характеристический многочлен преобразования f неприводим над полем $\boldsymbol{R}$. Тогда существует такой ортонормированный базис пространства V, в котором матрица преобразования f имеет вид $\rho\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Доказательство. В пространстве V зафиксируем ортонормированный базис a_1, a_2 и запишем в этом базисе матрицу преобразования f. Рассмотрим двумерное унитарное пространство U, зафиксируем в нем некоторый ортонормированный базис и определим линейное преобразование g пространства U, задав его матрицей $[f]$ в этом ортонормированном базисе.

Пусть векторы a и b построены так, как в доказательстве теоремы 1. Векторы z и $\bar{z}$, из которых получены векторы a и b, ортогональны, поскольку принадлежат разным собственным числам.

? Как вычисляется скалярное произведение векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе?

Получаем:

$$0 = (z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k + \beta_k i)\overline{(\alpha_k - \beta_k i)} = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k + \beta_k i)^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 - \beta_k^2) + 2i\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k.$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 - \beta_k^2) = 0$ и $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k = 0$, так что $|a|^2 = |b|^2$ и $(a, b) = 0$. Заменяя a и b на $e_1 = \frac{a}{|a|}$ и $e_2 = \frac{b}{|b|}$, получаем ортонормированный базис пространства V. Матрица преобразования f в базисе e_1, e_2 та же, что и в базисе a, b.

! Проверьте самостоятельно последнее утверждение о матрице. □

Теорема. Линейное преобразование f евклидова пространства L нормально тогда и только тогда, когда в пространстве L существует ортонормированный базис в котором матрица преобразования f квазидиагональна, каждая диагональная клетка которой либо размера 1, либо размера 2 и имеет вид $\rho\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Доказательство существования базиса проводится по той же схеме, что и для случая, когда характеристический многочлен разлагается на линейные множители – индукцией по размерности пространства L.

Б.И. $\dim L = 1$. В пространстве L берём базисный вектор единичной длины, он-то и годится.

$\dim L = 2$. Тогда применяем лемму.

Ш.И. Пусть утверждение доказано, если $\dim L < n$. Рассмотрим, когда $\dim L = n$. По теореме 1 существует подпространство U, инвариантное относительно f, размерность которого не больше 2. В подпространстве U существует нужный ортонормированный базис.

Пусть $M = U^{\perp}$. Как и в доказательстве теоремы 2 из § 7, подпространство M инвариантно относительно как f, так и f^*, причём $(f|_M)^* = f^*|_M$ и $f|_M$ – нормальное преобразование. По предположению индукции в подпространстве M существует ортонормированный базис с нужными свойствами. Дополнив его векторами из построенного базиса подпространства U, получаем нужный базис пространства L.

Обратно. Пусть в пространстве L существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования f имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 &&&&&&& \\ & \alpha_2 &&&&&& \\ && \ldots &&&&& \\ &&& \alpha_k &&&& \\ &&&& \rho_1\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} &&& \\ &&&&& \rho_2\begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} && \\ &&&&&& \ldots & \\ &&&&&&& \rho_m\begin{pmatrix} \cos\varphi_m & \sin\varphi_m \\ -\sin\varphi_m & \cos\varphi_m \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

! Проверьте, что $[f \circ f^*]$ и $[f^* \circ f]$ в этом базисе имеют одну и ту же матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^2 &&&&&&&&&& \\ & \alpha_2^2 &&&&&&&&& \\ && \dots &&&&&&&& \\ &&& \alpha_k^2 &&&&&&& \\ &&&& \rho_1^2 &&&&&& \\ &&&&& \rho_1^2 &&&&& \\ &&&&&& \rho_2^2 &&&& \\ &&&&&&& \rho_2^2 &&& \\ &&&&&&&& \dots && \\ &&&&&&&&& \rho_m^2 & \\ &&&&&&&&&& \rho_m^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $f \circ f^* = f^* \circ f$. □

Следствие. Линейное преобразование f евклидова пространства L изометрично тогда и только тогда, когда в пространстве L существует ортонормированный базис в котором матрица преобразования f квазидиагональна, каждая диагональная клетка которой либо размера 1 с числом 1 или –1, либо размера 2 и имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Доказательство. Если преобразование изометрично, то $f \circ f^* = \varepsilon$, поэтому в матрице для $f \circ f^*$ имеем $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \dots = \alpha_k^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 = \dots = \rho_m^2 = 1$. Следовательно, $\alpha_i = \pm 1$ и $\rho_j = 1$ для всех i и j.

Обратно.

! Проверьте, что преобразование, заданное в ортонормированном базисе матрицей такого вида переводит этот базис в ортонормированный.

А это означает, что преобразование f изометрично. □

Эта следствие показывает, что матрица изометрического преобразования, отличного от тождественного, – это произведение квазидиагональных матриц, у которых на диагонали либо есть одна клетка размера 1 с –1, либо клетка размера 2 с матрицей поворота. Тем самым, каждое изометрическое преобразование есть последовательное применение нескольких преобразований симметрии и нескольких поворотов.

Конец главы.