Глава 11. Линии и поверхности второго порядка

§ 8. Поверхности вращения

Определение. Пусть задана некоторая линия l и прямая s, не совпадающая с линией. ***Поверхностью вращения*** называется множество точек, получающихся вращением линии l вокруг прямой s. Прямая s называется ***осью вращения***, а линия l – ***образующей*** данной поверхности вращения.

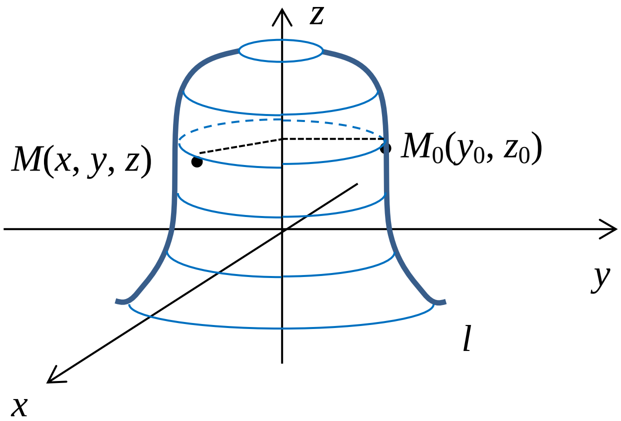
Каждая точка на линии при вращении относительно оси описывает окружность. Фактически поверхность состоит из точек, лежащих на всех таких окружностях.

? Какой будет поверхность вращения, если l – прямая, параллельная оси вращения?

? Какой будет поверхность вращения, если l – прямая, пересекающая ось вращения?

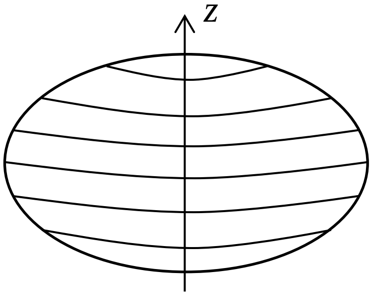
?! Какой будет поверхность вращения, если l – прямая, скрещивающаяся с осью вращения?

Написать уравнение поверхности для произвольной линии l – задача весьма не простая. Но если мы поверхность вращения пересечём плоскостью, содержащей ось вращения, то получим плоскую линию, вращение которое вокруг данной оси даёт ту же поверхность. Поэтому давайте будем считать, что мы вращаем линию, лежащую в плоскости yOz вокруг оси аппликат. Линию мы будем считать заданной уравнением $f(y, z) = 0$.



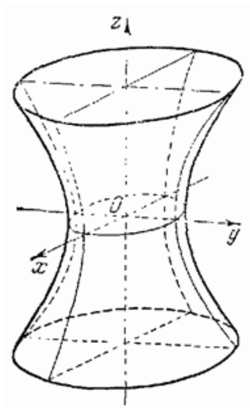
Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$, принадлежащую конической поверхности. Возьмём точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, которая лежит на той же окружности, что и точка $M(x, y, z)$, и является точкой пересечения окружности с линией l. Ясно, что $z = z_0$. А $|y_0| = \sqrt{x^2+y^2}$, т.е. $y_0 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$. Поэтому уравнением поверхности вращения будет $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$.

Давайте возьмем в плоскости yOz эллипс и начнём вращать его вокруг оси аппликат. Уравнение эллипса $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Подставляем $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ вместо y и получаем уравнение $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Полученная поверхность называется ***эллипсоидом вращения***, а это его уравнение.



! Напишите уравнение эллипсоида, подученного вращением эллипса $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ относительно оси абсцисс.

А теперь повращаем гиперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

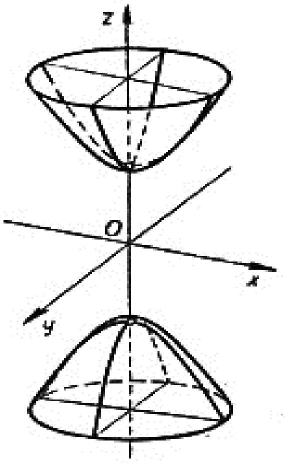


Получим уравнение $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Эта поверхность называется ***однополостным гиперболоидом вращения***.

Давайте повращаем другую гиперболу: $-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

? Чем она отличается от предыдущей гиперболы?

Получим уравнение $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$. Эта поверхность называется ***двуполостным гиперболоидом вращения***.

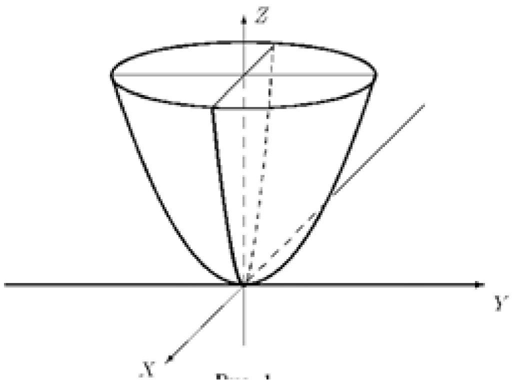


? Какая получится поверхность, если вращать асимптоты этих гипербол?

Мы это уже обсуждали, получится коническая поверхность. Она называется ***асимптотическим конусом***.

! Напишите уравнение асимптотического конуса?

Наконец, найдём уравнение поверхности вращения параболы относительно её оси симметрии. Это значит, что в плоскости yOz уравнение параболы запишется $2pz = y^2$. Тогда уравнение поверхности выглядит так: $2pz = x^2 + y^2$. Обычно его записывают $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p}$. Эта поверхность называется ***параболоидом вращения***.



Все эти поверхности определяются уравнениями второго порядка, но видно, что фигурирующим в них параметрам не хватает свободы.

§ 9. Эллипсоид

Определение. ***Эллипсоидом*** называется геометрический образ уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Ясно, что эллипсоид вращения, независимо от того, вокруг какой оси мы вращаем эллипс, является эллипсоидом.

Для изучения поверхностей применяют так называемый метод параллельных сечений. Он состоит в том, что рассматриваются сечения поверхности множеством параллельных плоскостей и в каждой из них рассматривается получающаяся линия пересечения. Плоскости обычно выбираются параллельными координатным плоскостям.

Начнём с сечений плоскостями, параллельными координатной плоскости xOy. Каждая такая плоскость задаётся уравнением $z = h$.

? Как располагается такая плоскость?

? Как задаётся сечение поверхности плоскостью?

Оно задаётся системой уравнений. В нашем случае это система

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \\ z = h \end{cases}$$

Преобразуем её в равносильную, подставив в первое уравнение h вместо z:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}. \\ z = h \end{cases}$$

Раз системы равносильны, то они имеют один и тот же геометрический образ.

Определим, какой геометрический образ в пространстве задаёт нам первое уравнение системы.

Если $|h| > c$, то правая часть этого уравнения отрицательна и, следовательно, геометрический образ – пустое множество.

Если $|h| = c$, то правая часть этого уравнения равна 0 и, следовательно, геометрический образ этого уравнения – ...

? Каков геометрический образ уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ в пространстве?

Наконец, если $|h| < c$, то правая часть этого уравнения положительна, и мы можем переписать уравнение в виде

$$\frac{x^2}{a^2(1-\frac{h^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1-\frac{h^2}{c^2})}=1.$$

? Каков геометрический образ этого уравнения в пространстве?

Мы пересекаем эту поверхность плоскостью $z = h$, которая параллельна плоскости xOy, и потому в сечении получаем такой же эллипс, как и направляющий этой цилиндрической поверхности. Его полуоси равны $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$. Самый большой эллипс получается, если $h = 0$, его полу оси равны и ; все остальные сечения являются подобными ему эллипсами с коэффициентом подобия $\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$. Легко видеть, что у всех этих эллипсов один и тот же эксцентриситет.

Легко понять, что если рассматривать сечения, параллельные другим координатным плоскостям, то тоже будут получаться семейства подобных эллипсов.

Эллипсоид, очевидно, имеет центр симметрии – если он задан данным уравнением, то это начало координат. Центр симметрии называют ***центром эллипсоида***. Координатные плоскости выступают плоскостями симметрии, а координатные оси – осями симметрии. Оси симметрии называют ***осями эллипсоида***. Точки пересечения эллипсоида с осями называются его ***вершинами***, Отрезки, соединяющие центр эллипсоида с вершинами, а также их длины a, b и c называют ***полуосями*** эллипсоида.

Исследуя эллипсоид методом параллельных сечений, мы видим, что эта поверхность содержится в прямоугольном параллелепипеде с ребрами длиной $2a$, $2b$ и $2c$, параллельными осям эллипсоида и центром, совпадающим с центром эллипсоида. Т.е. эллипсоид – это ограниченная поверхность и обычно эллипсоидом называют не только поверхность, но тело, ограниченное этой поверхностью. Легко понять, что точки эллипсоида как тела определяются неравенством $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.