Глава 11. Линии и поверхности второго порядка

Мы переходим к аналитической геометрии в трёхмерном пространстве.

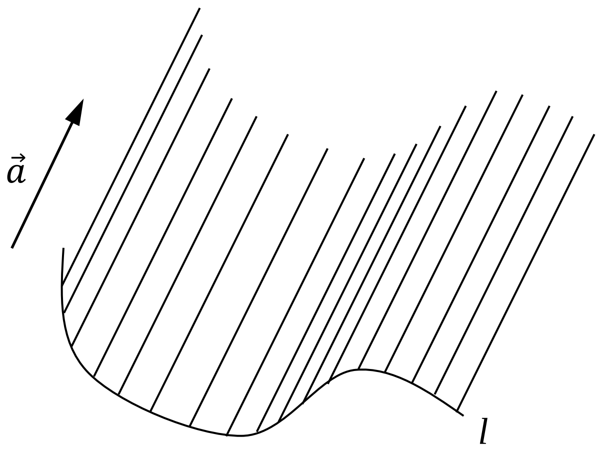
Определение. Уравнение $f(x, y, z) = 0$, где $f(x, y, z)$ – некоторая функция двух переменных, называется ***уравнением поверхности*** ω, если координаты любой точки этой поверхности удовлетворяют данному уравнению и, наоборот, любая точка, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, принадлежит поверхности ω.

Линии в пространстве задаются как линия пересечения двух поверхностей, т.е. аналитически они описываются системой двух уравнений с тремя переменными. Разумеется, линия может задаваться параметрически. Но мы с вами изучать линии в пространстве практически не будем.

Мы начнем с изучения уравнений поверхностей не только второго порядка, но заданных некоторыми специальными способами.

§ 6. Цилиндрические поверхности

Определение. Пусть задана некоторая линия l и вектор $\vec{a}$. ***Цилиндрической поверхностью*** называется множество точек, лежащих на всех прямых, пересекающих данную линию l и параллельных вектору $\vec{a}$.



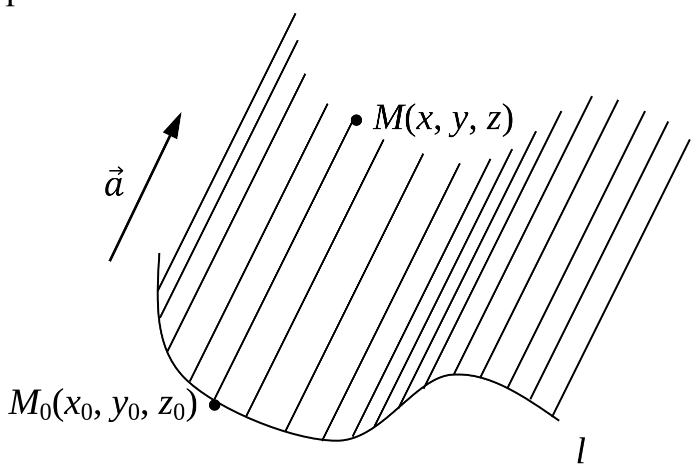
Линия l называется ***направляющей*** цилиндрической поверхности, а прямые – ***образующими*** цилиндрической поверхности.

Если у вас есть какая-то цилиндрическая поверхность, то всегда можно взять сечение её плоскостью, перпендикулярной вектору $\vec{a}$. Линию пересечения можно взять за направляющую. Обычно в качестве направляющей и берут плоскую линию (т.е. линию, лежащую в плоскости), «перпендикулярную» (в понятном смысле) образующим.

Мы иногда для краткости цилиндрическую поверхность будем называть цилиндром, хотя ***цилиндром*** на самом деле называют тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя параллельными друг другу плоскостями. В качестве направляющей берут линию пересечения цилиндрической поверхности с одной из плоскостей. Замкнутость означает, что эта направляющая является замкнутой линией. Если образующие цилиндрической поверхности перпендикулярны плоскости основания цилиндра, то цилиндр называется ***прямым***.

Научимся выводить уравнение цилиндрической поверхности.

Пусть линия l задана системой $\begin{cases} f(x,y,z) = 0; \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$, а вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$, принадлежащую цилиндрической поверхности.



Возьмём точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, которая лежит на той же образующей, что и точка $M(x, y, z)$, и является точкой пересечения этой образующей с линией l. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, поэтому имеет место система $\begin{cases} x - x_0 = pt; \\ y - y_0 = qt; \\ z - z_0 = rt \end{cases}$ для некоторого t, выступающего в роли параметра. Поскольку точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на линии l, её координаты удовлетворяют системе уравнений, определяющих линию l. Значит, $\begin{cases} f(x-pt, y-qt, z-rt) = 0; \\ g(x-pt, y-qt, z-rt) = 0 \end{cases}$. Выразим параметр t из одного уравнения как функцию $h(x, y, z)$ и подставим в другое. Мы получим равенство $F(x, y, z) = 0$ и координаты любой точки цилиндрической поверхности этому равенству удовлетворяют. Конечно, нам надо было бы доказать и обратное утверждение, мы этого сделать в общем случае не можем, т.к. для этого нам требуется знание свойств функций f и g, которые позволяют утверждать, что они действительно определяют функцию F. Вы этот вопрос будете изучать в курсе математического анализа, а применительно к нашим рассмотрениям в курсе дифференциальной геометрии.

Пример. Пусть линия l задана системой $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1; \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

? Что представляет собой линия l? Как расположен вектор $\vec{a}$ относительно плоскости $x + y + z = 1$?

Пишем систему, связывающую координаты точек M и M_0:

$$\begin{cases} x - x_0 = t; \\ y - y_0 = t; \\ z - z_0 = t \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - t = x_0; \\ y - t = y_0; \\ z - t = z_0 \end{cases}.$$

Подставляем x_0, y_0, z_0 в уравнения для l:

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2 = 1; \\ (x-t) + (y-t) + (z-t) = 1 \end{cases}.$$

? Из какого уравнения будем выражать t?

$t = \frac{1}{3}(x + y + z - 1)$.

Подставляем t в первое уравнение:

$$(x - \frac{1}{3}(x + y + z - 1))^2 + (y - \frac{1}{3}(x + y + z - 1))^2 + (z - \frac{1}{3}(x + y + z - 1))^2 = 1.$$

! Раскройте скобки и приведите подобные члены.

Получится

$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 1$.

Это уравнение нашей цилиндрической поверхности. Мы пока не умеем доказывать обратное утверждение, но для уравнений второго порядка мы скоро этому научимся.

Рассмотрим важный частный случай. Пусть направляющая лежит в координатной плоскости, а вектор $\vec{a}$ перпендикулярен этой плоскости. Пусть для определённости это координатная плоскость xOy.

? Как запишется уравнение, определяющее линию l?

Можно также считать, что вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Система, связывающая точки M и M_0 в этом случае выглядит так:

$$\begin{cases} x - x_0 = 0; \\ y - y_0 = 0; \\ z - z_0 = t \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = x_0; \\ y = y_0; \\ z - t = z_0. \end{cases}$$

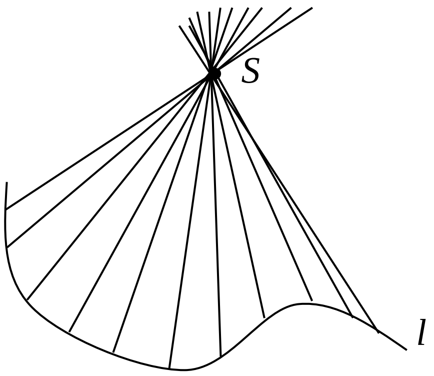
Но в уравнение $f(x, y) = 0$ подставлять z_0 некуда, а подстановка x_0 и y_0 даёт то же самое уравнение. Значит, уравнение $f(x, y) = 0$ и есть искомое уравнение заданной цилиндрической поверхности.

А теперь вопрос.

? Каков геометрический образ уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

§ 7. Конические поверхности

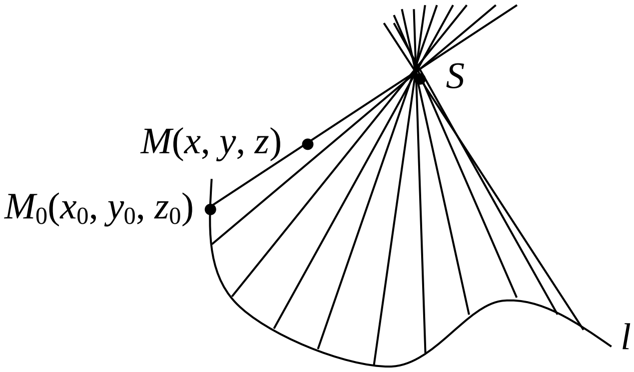
Определение. Пусть задана некоторая линия l и точка S, не лежащая на той линии. ***Конической поверхностью*** называется множество точек, лежащих на всех прямых, пересекающих данную линию l и проходящих через точку S.



Линия l называется ***направляющей*** конической поверхности, а прямые – ***образующими*** конической поверхности.

Научимся выводить уравнение конической поверхности.

Пусть линия l задана системой $\begin{cases} f(x, y, z) = 0; \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$, а точка S имеет координаты (a, b, c). Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$, принадлежащую конической поверхности.



Возьмём точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, которая лежит на той же образующей, что и точка $M(x, y, z)$, и является точкой пересечения этой образующей с линией l. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_0S}$, поэтому имеет место система $\begin{cases} x - x_0 = (a - x_0)t; \\ y - y_0 = (b - y_0)t; \\ z - z_0 = (c - z_0)t \end{cases}$ для некоторого t, выступающего в роли параметра. Поскольку точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на линии l, её координаты удовлетворяют системе уравнений, определяющих линию l. Значит, $\begin{cases} f\left(\frac{x-at}{1-t}, \frac{y-bt}{1-t}, \frac{z-ct}{1-t}\right) = 0; \\ g\left(\frac{x-at}{1-t}, \frac{y-bt}{1-t}, \frac{z-ct}{1-t}\right) = 0 \end{cases}$. Выразим параметр t из одного уравнения как функцию $h(x, y, z)$ и подставим в другое. Мы получим равенство $F(x, y, z) = 0$ и координаты любой точки конической поверхности этому равенству удовлетворяют. Конечно, нам надо было бы доказать и обратное утверждение, мы этого сделать в общем случае не можем по тем же причинам, что и для цилиндрической поверхности.

Пример. Пусть линия l задана системой $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1; \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, $S(0; 0; 0)$.

Пишем систему, связывающую координаты точек M и M_0:

$$\begin{cases} x - x_0 = -x_0 t; \\ y - y_0 = -y_0 t; \\ z - z_0 = -z_0 t \end{cases} \text{или} \begin{cases} \frac{x}{1-t} = x_0; \\ \frac{y}{1-t} = y_0; \\ \frac{z}{1-t} = z_0 \end{cases}.$$

Подставляем x_0, y_0, z_0 в уравнения для l:

$$\begin{cases} \left(x - \frac{x}{1-t}\right)^2 + \left(y - \frac{y}{1-t}\right)^2 + \left(z - \frac{z}{1-t}\right)^2 = 1; \\ \left(x - \frac{x}{1-t}\right) + \left(y - \frac{y}{1-t}\right) + \left(z - \frac{z}{1-t}\right) = 1 \end{cases}.$$

? Из какого уравнения будем выражать t?

Легко видеть, что на самом деле нам нужно не t, а $1 - \frac{1}{1-t}$.

$1 - \frac{1}{1-t} = \frac{1}{x + y + z}$.

Подставляем t в первое уравнение:

$$\left(\frac{x}{x + y + z}\right)^2 + \left(\frac{y}{x + y + z}\right)^2 + \left(\frac{z}{x + y + z}\right)^2 = 1$$

или

$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2$.

! Раскройте скобки и приведите подобные члены.

Получится

$xy + xz + yz = 0$.

Это уравнение нашей конической поверхности. Мы пока не умеем доказывать обратное утверждение, но для уравнений второго порядка мы скоро этому научимся.

Рассмотрим ещё один частный случай. Пусть направляющая задана системой $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \\ z = c \end{cases}$, S – начало координат.

? Что задаёт первое уравнение системы?

? Какая линия является направляющей?

Пишем систему, связывающую координаты точек M и M_0:

$$\begin{cases} x - x_0 = -x_0 t; \\ y - y_0 = -y_0 t; \\ z - z_0 = -z_0 t \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{x}{1-t} = x_0; \\ \frac{y}{1-t} = y_0; \\ \frac{z}{1-t} = z_0 \end{cases}.$$

Подставляем x_0, y_0, z_0 в уравнения для l:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2(1-t)^2} + \frac{y^2}{b^2(1-t)^2} = 1; \\ \frac{z}{1-t} = c \end{cases}.$$

Значит, $1 - t = \frac{z}{c}$ и $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = (1 - t)^2$. Получаем уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Это уравнение называется ***каноническим уравнением эллиптического конуса***.