Глава 11. Линии и поверхности второго порядка

§ 5. Классификация линий, задаваемых уравнениями второго порядка

Определение 1. Уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов a_{ij} отличен от 0, называется ***уравнением второго порядка***.

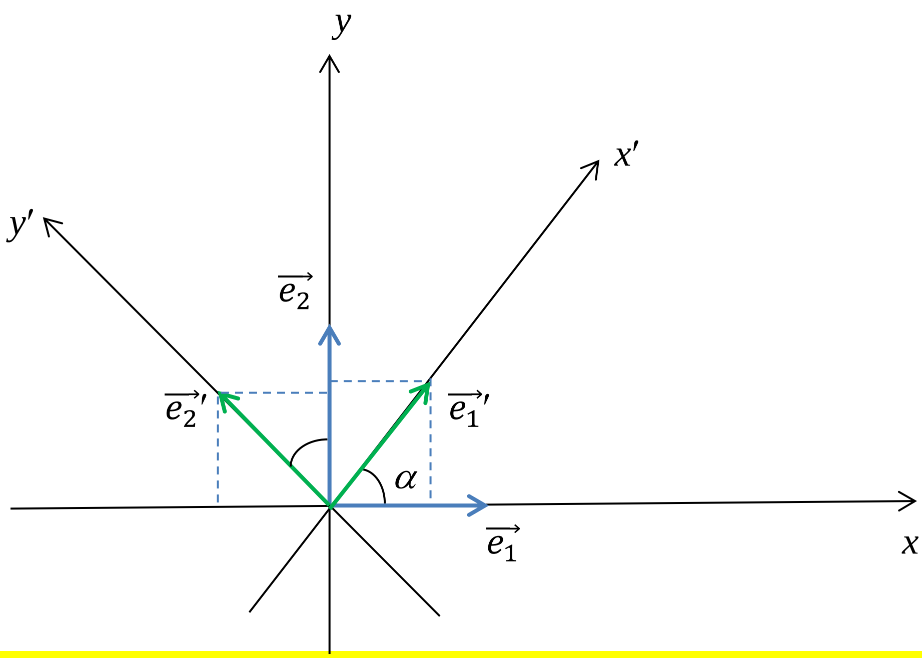
Нас будет интересовать, какие линии задаёт это уравнение, если рассматривать его в какой-либо прямоугольной декартовой системе координат. Более изыскано это формулируют так: каков геометрический образ данного уравнения?

Целый ряд случаев мы уже наблюдали.

? Какие именно?

А ещё что-нибудь есть?

Понятно, что для ответа на этот вопрос надо поменять систему координат так, чтобы уравнение стало проще. И, конечно, мы хотим, чтобы новая система координат тоже была прямоугольной декартовой. Если мы не меняем начало координат, то такое преобразование касается только базисных векторов и для них оно будет ортогональным.



? А есть ещё какие-нибудь характеристики системы координат, кроме ортогональности и декартовости?

Система может быть правой, а может быть левой.

? Какая система называется правой?

Мы будем считать, что исходная система правая, и новую систему мы тоже хотим видеть правой, хотя это не принципиально.

? Каковы координаты векторов $\overrightarrow{e_1}'$ и $\overrightarrow{e_2}'$ в базисе $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$?

$[\overrightarrow{e_1}'] = \begin{cases}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{cases}$, $[\overrightarrow{e_2}'] = \begin{cases}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{cases}$.

Значит, матрица $T_{\text{НС}} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$. Тем самым,

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ или $\begin{cases}x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha\,;\\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\end{cases}$.

Мы хотим подобрать такой угол α, чтобы исчезло слагаемое $2a_{12}xy$. Подставим выражения для x и y в $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$.

! Подставьте, раскройте скобки и найдите коэффициенты при $(x')^2$, $x'y'$ и $(y')^2$.

Нас интересует коэффициент при $x'y'$. Если вы правильно посчитали, он равен $\frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\sin 2\alpha + a_{12}\cos 2\alpha$. Опять-таки, проблема у нас только в том случае, если $a_{12} \neq 0$. Приравнивая получившийся коэффициент к 0, получаем $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$. Значит, такой угол α существует, и мы можем провести нужную нам замену переменных. Замечу только, что сам угол α не нужен. Нужен его синус и косинус. Поэтому вам предстоит вспомнить, как по котангенсу двойного угла находить его синус и косинус.

После подстановки у нас исчезнет произведение переменных, а остальные коэффициенты, кроме c, изменятся. Не выписывая для них формулы, обозначим их «штрихованными» буквами:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0.$$

Это уравнение нашей линии в системе координат x', y'.

1) $a'_{11} \neq 0$, $a'_{22} \neq 0$.

Тогда перепишем уравнение так:

$$a'_{11}\left(x' + \frac{b'_1}{a'_{11}}\right)^2 + a'_{22}\left(y' + \frac{b'_2}{a'_{22}}\right)^2 + c - \left(\frac{b'_1}{a'_{11}}\right)^2 - \left(\frac{b'_2}{a'_{22}}\right)^2 = 0.$$

Сделаем ещё одну замену:

$x'' = x' + \frac{b_1'}{a_{11}'}$;

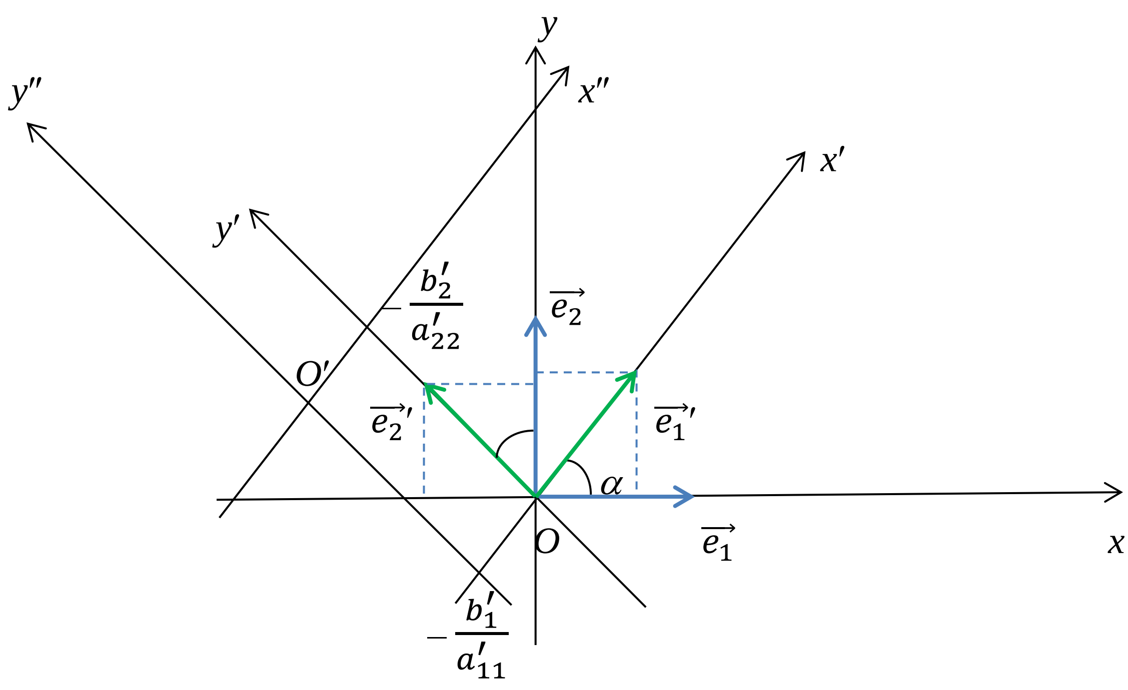
$y'' = y' + \frac{b_2'}{a_{22}'}$;

$c' = (\frac{b_1'}{a_{11}'})^2 + (\frac{b_2'}{a_{22}'})^2 - c$.

Она позволяет записать уравнение в виде

$$a_{11}'(x'')^2 + a_{22}'(y'')^2 = c'.$$

А что означает такая замена переменных геометрически? Это перенос начала координат в другую точку. Ведь начало координат с осями x'', y'' характеризуется нулевыми координатами, т.е. $x'' = 0$ и $y'' = 0$. А в системе x', y' это точка с координатами $-\frac{b_1'}{a_{11}'}, -\frac{b_2'}{a_{22}'}$.



1а) $c' \neq 0$.

Тогда перепишем уравнение так:

$$\frac{(x'')^2}{\frac{c'}{a_{11}'}} + \frac{(y'')^2}{\frac{c'}{a_{22}'}} = 1.$$

Если оба коэффициента $\frac{c'}{a'_{11}}$ и $\frac{c'}{a'_{22}}$ положительны, то это эллипс.

Если оба коэффициента $\frac{c'}{a'_{11}}$ и $\frac{c'}{a'_{22}}$ отрицательны, то множество точек пустое. Его называют **мнимым эллипсом**.

Если коэффициенты разных знаков, то это гипербола.

1б) $c' = 0$.

Тогда уравнение имеет вид $a'_{11}(x'')^2 + a'_{22}(y'')^2 = 0$.

Если коэффициенты a'_{11} и a'_{22} одного знака, то есть только одна точка с координатами (0; 0). В этом геометрический образ уравнения – одна точка.

Если коэффициенты a'_{11} и a'_{22} разных знаков, то уравнение распадается в совокупность двух уравнений: $y'' = \pm\sqrt{-\frac{a'_{11}}{a'_{22}}}\,x''$, т.е. мы получаем две пересекающиеся прямые.

2) Один из коэффициентов a'_{11} или a'_{22} равен 0. Пусть для определённости $a'_{22} = 0$. Тогда уравнение примет вид

$$a'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0.$$

2а) $b'_2 \neq 0$.

Тогда $y' = -\frac{a'_{11}}{2b'_2}\,x'^2 - \frac{b'_1}{b'_2}\,x' - \frac{c}{2b'_2}$. Это, разумеется, парабола в системе координат x', y'.

2б) $b'_2 = 0$.

Уравнение имеет вид $a'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + c = 0$.

Если дискриминант этого уравнения положителен, то мы имеем совокупность двух уравнений: $x' = x_0$ и $x' = x_1$. Эти уравнения в системе координат x', y' задают две параллельные прямые.

Если дискриминант этого уравнения нулевой, то мы имеем совокупность одно уравнение $x' = x_0$. Оно определяет в системе координат x', y' одну прямую, но, как мы уже обсуждали, в этом случае говорят, что здесь две совпадающие прямые.

Если дискриминант этого уравнения отрицательный, то множество точек, заданных этим уравнением снова пусто, но в этом случае говорят, что оно является двумя мнимыми прямыми.

Этим исчерпываются все возможности для исходного уравнения второго порядка.