Глава 9. Линейные отображения пространств со скалярным произведением

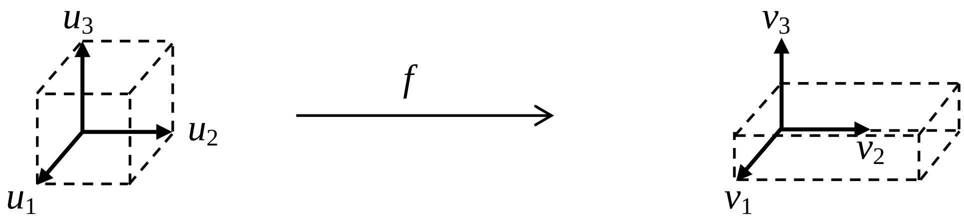
§ 4. Сингулярное представление линейного отображения

Пусть L_1 и L_2 – конечномерные пространства со скалярным произведением. Теорема 3 из §2 в пункте 1) показывает, что изометрические отображения переводят любую ортонормированную систему в ортонормированную. Пункт 2) той же теоремы показывает, что ждать аналогичного от любого линейного отображения не приходится. Но может быть можно для любого линейного отображения f пространства L_1 в пространство L_2 подобрать в L_1 такой базис, который переводится хотя бы в ортогональную систему? Как ни покажется удивительным, ответ положительный. Но ясно, что такой базис на дороге не валяется и подбирать его нужно с умом.

Давайте сначала посмотрим, что нам даёт наличие такого базиса. Пусть $\dim L_1 = \dim L_2 = 3$, u_1, u_2, u_3 – ортонормированный базис L_1 и $b_1 = f(u_1)$, $b_2 = f(u_2)$, $b_3 = f(u_3)$, причём $\{ b_1, b_2, b_3 \}$ – ортогональная система векторов. Пусть среди них нет нулевых векторов. Тогда, поделив каждый вектор на его длину, получим ортонормированный базис пространства L_2. Обозначим этот базис v_1, v_2, v_3. Ясно, что $f(u_1) = \sigma_1 v_1$, $f(u_2) = \sigma_2 v_2$, $f(u_3) = \sigma_3 v_3$, где σ_1, σ_2, σ_3 – длины векторов b_1, b_2, b_3, т.е. действительные положительные числа.

? Какова матрица отображения f в этих базисах?

Геометрическая картина действия f здесь такова ($\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 0{,}5$):



т.е. f деформирует единичный куб в прямоугольный параллелепипед.

Эти рассмотрения подсказывают нам, что произвольное отображение ведёт себя похожим образом на самосопряженное преобразование. Надо только как-то их связать друг с другом.

Лемма. Пусть L_1 и L_2 – конечномерные пространства со скалярным произведением, f – линейное отображение L_1 в L_2. Тогда $\mathrm{Ker}\,(f \circ f^*) = \mathrm{Ker}\,(f)$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Тогда $(f \circ f^*)(x) = f^*(f(x)) = f^*(0) = 0$, т.е. $x \in \mathrm{Ker}\,(f \circ f^*)$.

Обратно. Пусть $x \in \mathrm{Ker}\,(f \circ f^*)$. Тогда

$$(f(x), f(x)) = (x, f^*(f(x))) =(x, (f \circ f^*)(x)) = (x, 0) = 0.$$

Следовательно, $f(x) = 0$.

Следствие 1. $r(f) = r(f \circ f^*)$.

Доказательство. $r(f) = \dim L_1 - \dim \operatorname{Ker}(f) = \dim L_1 - \dim \operatorname{Ker}(f \circ f^*) = r(f \circ f^*)$.

Теорема 1 (о сингулярном представлении). Пусть L_1 и L_2 – конечномерные пространства со скалярным произведением, f – ненулевое линейное отображение L_1 в L_2. Пусть $m = \dim L_1$, $n = \dim L_2$, r – ранг отображения f. Тогда существуют такие ортонормированные базисы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ и $v_1, v_2, \ldots, v_n$ пространств L_1 и L_2 соответственно, что $f(u_i) = \sigma_i v_i$ при $1 \le i \le r$, $f(u_i) = 0$ при $r < i \le m$, все числа σ_i действительны, положительны и определены однозначно, не зависимо от выбора базиса $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $f \circ f^*$ пространства L_1 в себя. Поскольку $f \circ f^*$ – самосопряжённое преобразование, в L_1 существует ортонормированный базис $u_1, u_2, \ldots, u_m$ из собственных векторов преобразования $f \circ f^*$ с собственными числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Согласно следствию из леммы $r(f \circ f^*) = r$, поэтому только r собственных чисел из m отличны от 0. Можно считать, что это $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Положим $a_i = f(u_i)$. Тогда

$$(a_i, a_j) = (f(u_i), f(u_j)) = (u_i, f^*(f(u_j))) = (u_i, (f \circ f^*)(u_j)) = (u_i, \alpha_j u_j) = \alpha_j (u_i, u_j).$$

Значит, при $i \neq j$ векторы a_i и a_j ортогональны. Если же $i = j$, то $(a_i, a_i) = \alpha_i$ и $\alpha_i > 0$ при всех $i \le r$. Положим $\sigma_i = \sqrt{\alpha_i}$ и $v_i = \dfrac{1}{\sigma_i} a_i$ для всех $i \le r$. Тогда $|\, v_i \,| = 1$ и $f(u_i) = \sigma_i v_i$. Дополним ортонормированную систему $v_1, v_2, \ldots, v_r$ до ортонормированного базиса пространства L_2. Построенные базисы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ и $v_1, v_2, \ldots, v_n$ пространств L_1 и L_2 удовлетворяют требованиям теоремы.

Докажем единственность чисел $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$. Пусть для линейного отображения f пространства L_1 в пространство L_2 нашлись такие базисы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ и $v_1, v_2, \ldots, v_n$, а также положительные числа $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$, для которых $f(u_i) = \sigma_i v_i$ при $1 \le i \le r$, $f(u_i) = 0$ при $r < i \le m$. Тогда матрица отображения f в этих базисах выглядит следующим образом:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sigma_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{m \text{ столбцов}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}}\right\} n \text{ строк}$$

а матрица отображения f^* в этих базисах имеет следующий вид:

$$\begin{array}{cl} \left.\begin{pmatrix} \sigma_1\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ 0\ \sigma_2\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 0\ \sigma_3 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0\ 0\ 0 \ldots\ \sigma_r\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \end{pmatrix}\right\} & m \text{ строк} \\ \underbrace{\hphantom{\sigma_1\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0}}_{n \text{ столбцов}} & \end{array}$$

Значит, матрица преобразования $f \circ f^*$ в базисе $u_1, u_2, \ldots, u_m$ имеет вид

$$\begin{array}{cl} \left.\begin{pmatrix} \sigma_1^2\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ 0\ \sigma_2^2\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 0\ \sigma_3^2 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0\ 0\ 0 \ldots\ \sigma_r^2\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \end{pmatrix}\right\} & m \text{ строк} \\ \underbrace{\hphantom{\sigma_1^2\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0}}_{m \text{ столбцов}} & \end{array}$$

Следовательно, числа $\sigma_1^2,\ \sigma_2^2, \sigma_3^2,\ \ldots,\ \sigma_r^2$ являются всеми ненулевыми корнями характеристического многочлена преобразования $f \circ f^*$, который не зависит от выбора базиса. Значит, и числа $\sigma_1^2,\ \sigma_2^2, \sigma_3^2,\ \ldots,\ \sigma_r^2$ не зависят от выбора базиса. По условию числа $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots,\ \sigma_r$ положительны и, следовательно, они тоже не зависят от выбора базиса.

Определение 1. Числа $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots,\ \sigma_r$ называются ***сингулярными числами*** отображения f.

В дальнейшем мы будем считать, что эти числа занумерованы в порядке невозрастания, т.е. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \ldots \geq \sigma_r$. Отметим одно замечательное свойство числа σ_1.

Теорема 2. Пусть L_1 и L_2 – конечномерные пространства со скалярным произведением, f – ненулевое линейное отображение L_1 в L_2, σ – наибольшее сингулярное число отображения f. Тогда для любого вектора $x \in L_1$ выполняется неравенство $|\, f(x)\, | \leq \sigma|x|$.

Доказательство. Пусть $\sigma = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \ldots \geq \sigma_r$ – все сингулярные числа отображения f, u_1, u_2, …, u_m – соответствующий им ортонормированный базис пространства L_1. Пусть $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m$. Тогда

$$f(x) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \ldots + \alpha_m f(u_m) = \alpha_1 \sigma v_1 + \alpha_2 \sigma_2 v_2 + \ldots + \alpha_r \sigma_r v_r,$$

причем система v_1, v_2, …, v_r ортонормирована. Значит,

$$|\, f(x)\,|^2 = |\alpha_1 \sigma|^2 + |\alpha_2\sigma_2|^2 + \ldots + |\alpha_r\sigma_r|^2 = |\alpha_1|^2 \sigma^2 + |\alpha_2|^2\sigma_2{}^2 + \ldots + |\alpha_r|^2\sigma_r{}^2 \leq$$
$$\leq (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_r|^2)\, \sigma^2 \leq (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_r|^2 + \ldots + |\alpha_m|^2)\, \sigma^2 = \sigma^2|x|^2.$$

Следовательно, $|\, f(x)\,| \leq \sigma|x|$.

Следствие 2. Наибольшее сингулярное число отображения f – это $\max_{|x|=1} |\, f(x)\,|$.

Доказательство. Пусть σ – наибольшее сингулярное число отображения f. По теореме 2 $|\, f(x)\,| \leq \sigma$ для любого вектора x единичной длины. Равенство достигается для первого вектора ортонормированного базиса в сингулярном представлении отображения f.

Давайте теперь посмотрим, как полученные нами результаты могут быть интерпретированы на языке матриц. Пусть нам дана произвольная матрица A размером $n \times m$ (т.е. у неё n строк и m столбцов). Рассмотрим пространства L_1 и L_2 со скалярным произведением, $\dim L_1 = m$, $\dim L_2 = n$. Пусть a_1, a_2, …, a_m и b_1, b_2, …, b_n – некоторые ортонормированные базисы этих пространств. Тогда можно считать, что матрица A – это матрица некоторого линейного отображения f пространства L_1 в пространство L_2. По теореме 1 найдутся такие ортонормированные базисы u_1, u_2, …, u_m и v_1, v_2, …, v_n этих пространств, в которых

$$[\, f\,] = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sigma_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{m \text{ столбцов}} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \text{ строк},$$

где σ_1, σ_2, …, σ_r – сингулярные числа отображения f. Обозначим $[\, f\,]$ через S. Матрицы A и S – это матрицы одного и того же отображения, но в разных базисах.

! Вспомните, как строится матрица перехода от одного базиса пространства к другому. Вспомните также, как записывается преобразование координат векторов при переходе от одного базиса к другому.

Пусть $U_{НС}$ – матрица перехода от базиса a_1, a_2, …, a_m к базису u_1, u_2, …, u_m, $V_{НС}$ – матрица перехода от базиса b_1, b_2, …, b_n к базису v_1, v_2, …, v_n.

Пусть x – произвольный вектор пространства L_1. Тогда $[x]_a = U_{\text{НС}}[x]_u$ и $[f(x)]_b = V_{\text{НС}}[f(x)]_v$. В то же время $[f(x)]_v = S[x]_u$ и $[f(x)]_b = A[x]_a$. Соберём из этих равенств цепочку:

$$V_{\text{НС}}S[x]_u = V_{\text{НС}}[f(x)]_v = [f(x)]_b = A[x]_a = AU_{\text{НС}}[x]_u.$$

Следовательно, $V_{\text{НС}}S = AU_{\text{НС}}$ или $A = V_{\text{НС}}SU_{\text{НС}}^{-1}$.

Что представляет из себя матрица $U_{\text{НС}}$? Её i-й столбец – это координаты вектора u_i в базисе $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Можно считать, что $U_{\text{НС}}$ – это матрица некоторого линейного преобразования g пространства L_1, записанная в базисе $a_1, a_2, \ldots, a_m$, т.е. $g(a_i) = u_i$. Значит, преобразование g переводит ортонормированный базис пространства L_1 в ортонормированную систему. По теореме 3 из § 2 преобразование g изометрично. Следствие 2 из того же параграфа показывает, что $g^{-1} = g^*$. Для матрицы $U_{\text{НС}}$ это означает, что $U_{\text{НС}}^{-1} = \overline{U_{\text{НС}}^t}$.Это позволяет легко находить $U_{\text{НС}}^{-1}$, если известна матрица $U_{\text{НС}}$.

Определение 2. Квадратная матрица M с элементами из $\boldsymbol{C}$ (из $\boldsymbol{R}$) называется ***унитарной*** (***ортогональной***), если $\overline{M}^t = M^{-1}$ ($M^t = M^{-1}$).

Таким образом, матрица $U_{\text{НС}}$ является унитарной или ортогональной в зависимости от того, над каким полем рассматривается матрица A. Аналогично унитарной или ортогональной является матрица $V_{\text{НС}}$.

Тем самым, доказана следующая

Теорема 2 (о сингулярном разложении).

1) Пусть A – матрица над $\boldsymbol{C}$. Тогда существуют такие положительные числа $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \ldots \geq \sigma_r$ и такие унитарные матрицы U и V, для которых

$$A = V\begin{pmatrix} \sigma_1\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ 0\ \sigma_2\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 0\ \sigma_3 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0\ 0\ 0 \ldots\ \sigma_r\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0 \ldots 0 \end{pmatrix}\overline{U}^t,$$

где r – ранг матрицы A.

2) Пусть A – матрица над $\boldsymbol{R}$. Тогда существуют такие положительные числа $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \ldots \geq \sigma_r$ и такие ортогональные матрицы U и V, для которых

$$A = V\begin{pmatrix} \sigma_1\ 0\ 0 \dots 0\ 0 \dots 0 \\ 0\ \sigma_2\ 0 \dots 0\ 0 \dots 0 \\ 0\ 0\ \sigma_3 \dots 0\ 0 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0\ 0\ 0 \dots\ \sigma_r\ 0 \dots 0 \\ 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} U^t.$$

где r – ранг матрицы A.

Такое представление матрицы A называется её ***сингулярным разложением*** (в произведение матриц).

Числа σ_1, σ_2, σ_3, …, σ_r, разумеется, определены однозначно. Что касается матриц U и V, то здесь однозначности нет. Но обе они обладают важным свойством: любые два вектора-столбца таких матриц ортогональны, а длина каждого вектора-столбца равна 1. Впрочем, то же самое верно и для строк.

Этим, в частности, объясняется термин «ортогональная» для матриц.

Пример. Найти сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Шаг 1. Вычисляем A^tA:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Вычисляем характеристический многочлен полученной матрицы:

$$\det\begin{pmatrix} 10-\alpha & -4 & 6 \\ -4 & 8-\alpha & 4 \\ 6 & 4 & 10-\alpha \end{pmatrix} = (-\alpha)(12-\alpha)(16-\alpha).$$

Шаг 3. Находим корни характеристического многочлена и сингулярные числа.

Корни: $\alpha_1 = 16$, $\alpha_2 = 12$, $\alpha_3 = 0$.

Сингулярные числа: $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 2\sqrt{3}$.

Шаг 4. Находим собственные векторы для собственных чисел.

$\alpha_1 = 16$:

$$\begin{pmatrix} -6 & -4 & 6 \\ -4 & -8 & 4 \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -4 & 6 \\ -4 & -8 & 4 \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -6 & -4 & 6 \\ -4 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Общее решение: $x_1 = x_3$, $x_2 = 0$.

Базисный вектор: $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\alpha_2 = 12$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -4 & -4 & 4 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -4 & -4 & 4 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -4 & 8 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение: $x_1 = -x_3$, $x_2 = 2x_3$.

Базисный вектор: $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\alpha_3 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & 4 \\ 16 & 0 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение: $x_1 = -x_3$, $x_2 = -x_3$.

Базисный вектор: $a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Шаг 5. Ортогонализация и нормирование. Найденные собственные векторы необходимо превратить в ортонормированный базис. Для этого проводится ортогонализация и нормирование. Поскольку получившиеся векторы ортогональны, достаточно провести нормирование.

Первый вектор ортонормированного базиса: $u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Второй вектор ортонормированного базиса: $u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Третий вектор ортонормированного базиса: $u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Шаг 6. Построение матриц U и U^t:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix};\ U^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Шаг 7. Построение векторов v_1 и v_2:

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} Au_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_2} Au_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Шаг 8. Построение матрицы V:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Шаг 9. Построение сингулярного разложения матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$