Глава 12. Линейные преобразования линейных пространств

§ 4. Корневое разложение линейного пространства

Теперь попытаемся построить разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств немного по-другому.

Пусть 0 – собственное число линейного преобразования f. Корневое подпространство $L(0)$ называют ***нилькомпонентой преобразования f***.

Теорема 1 (Лемма Фитинга). Пусть 0 является собственным числом линейного преобразования f линейного пространства L. Тогда существует такое подпространство V, инвариантное относительно f, для которого $L = L(0) \oplus V$ и ограничение f на V является обратимым преобразованием.

Доказательство. Мы уже обсуждали, что в силу конечномерности пространства L подпространство $L(0) = L_n(0)$ для некоторого натурального n. Будем считать, что n – наименьшее, для которого это случилось.

Рассмотрим другую цепочку подпространств:

$$V_1 = \operatorname{Im} f,\ V_2 = \operatorname{Im} f^2,\ \ldots,\ V_i = \operatorname{Im} f^i,\ \ldots .$$

Ясно, что $V_{i+1} = f(V_i)$, поэтому каждое подпространство V_i инвариантно относительно f и $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \ldots \supseteq V_i \supseteq V_{i+1} \supseteq \ldots$. В силу конечномерности L такая цепочка не может строго убывать бесконечно, так что на каком-то шаге подпространства начнут совпадать. По определению $L_i(0) = \operatorname{Ker} f^i$, так что по теореме о ранге и дефекте $\dim L_i(0) + \dim V_i = \dim L$. Поэтому совпадение подпространств V_i начнется ровно для $i = n$.

Положим $V = V_n$. Поскольку $V = V_n = V_{n+1} = f(V_n) = f(V)$, ранг ограничения f на подпространство V совпадает с размерностью V, а значит, f на V обратимое преобразование. А тогда и f^n – обратимое преобразование на V.

Покажем, что сумма $L(0)$ и V прямая. Пусть $x \in L(0) \cap V$. Тогда $f^n(x) = 0$. Но $f^n(x) \in V$ в силу инвариантности V относительно f. А преобразование f^n обратимо на V, так что $x = 0$.

Если бы $L(0) \oplus V \neq L$, то $\dim L > \dim (L(0) \oplus V) = \dim L(0) + \dim V = \dim L$ – противоречие. □

Определение. Подпространство V называется ***1-компонентой Фитинга*** преобразования f.

Вернёмся теперь к корневым подпространствам. Чтобы видеть, для какого именно преобразования мы рассматриваем корневое подпространство, будем символ преобразования тоже писать в обозначении корневого подпространства: $L_f(\alpha)$.

Лемма. $L_f(\alpha) = L_{(f\ -\ \alpha\varepsilon)}(0)$.

Доказательство очевидно.

Теорема 2 (О корневом разложении). Пусть характеристический многочлен линейного преобразования f линейного пространства L разлагается на линейные множители. Тогда пространство L является прямой суммой корневых подпространств преобразования f.

Доказательство. Пусть α_1, α_2, …, α_m – все различные собственные числа преобразования f. Характеристический многочлен $g(x)$ преобразования f тогда имеет вид $(\alpha_1 - x)^{k_1} (\alpha_2 - x)^{k_2} \ldots (\alpha_m - x)^{k_m}$, где $k_1 + k_1 + \ldots + k_m = \dim L$.

По лемме $L_f(\alpha_1) = L_{(f-\alpha_1\varepsilon)}(0)$. По теореме 1 существует подпространство V_1, инвариантное относительно $f - \alpha_1\varepsilon$, а значит и относительно f, причём $L = L_f(\alpha_1) \oplus V_1$. Тогда матрица преобразования f в подходящем базисе будет распавшейся:

$$\begin{pmatrix} [f|_{L_f(\alpha_1)}] & 0 \\ 0 & [f|_{V_1}] \end{pmatrix}.$$

Поэтому характеристический многочлен $g(x)$ преобразования f равен $\det([f|_{L_f(\alpha_1)}] - x) \det([f|_{V_1}] - x)$. Заметим, что $\det([f|_{L_f(\alpha_1)}] - x) = (\alpha_1 - x)^s$, поскольку все собственные векторы ограничения преобразования f на подпространство $L_f(\alpha_1)$ сосредоточены в $L_1(\alpha_1)$. Значит, $\det([f|_{V_1}] - x) = (\alpha_1 - x)^{k_1 - s} (\alpha_2 - x)^{k_2} \ldots (\alpha_m - x)^{k_m}$. Если $k_1 - s \neq 0$, то это означает, что ограничение преобразования f на подпространство V_1 имеет α_1-корневое подпространство. Но оно должно было попасть в $L_f(\alpha_1)$, что противоречит $L_f(\alpha_1) \cap V_1 = 0$.

На пространстве V_1 преобразование f имеет характеристический многочлен $g_1(x) = (\alpha_2 - x)^{k_2} \ldots (\alpha_m - x)^{k_m}$, поэтому α_2 – собственное число f на этом подпространстве и, значит, $V_1 = L_f(\alpha_2) \oplus V_2$. Характеристический многочлен преобразования f на подпространстве V_2 равен $(\alpha_3 - x)^{k_3} \ldots (\alpha_m - x)^{k_m}$ и т.д. Последним будет корневое подпространство $L_f(\alpha_m)$. Следовательно, пространство L есть прямая сумм своих корневых подпространств. □