Глава 10. Билинейные и квадратичные функции и формы

§ 4. Знако определённые вещественные квадратичные формы

Как и в предыдущем, в этом параграфе все функции и формы рассматриваются над полем F, содержащемся в поле действительных чисел, что далее не оговаривается в формулировках определений и теорем.

Определение 1. Квадратичная функция $g(x)$, заданная на пространстве L, называется ***положительно определённой***, если $g(x) > 0$ для любого $x \neq 0$.

Определение 2. Квадратичная функция $g(x)$, заданная на пространстве L, называется ***отрицательно определённой***, если $g(x) < 0$ для любого $x \neq 0$.

Теорема 1. Квадратичная функция $g(x)$, заданная на пространстве L, положительно определённа тогда и только тогда, когда её положительный индекс инерции равен $\dim L$.

Доказательство. Как было доказано, в пространстве L можно так выбрать базис, чтобы форма, соответствующая функции $g(x)$, имела канонический вид. По условию эта форма запишется как $\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$, где все $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ положительны, а $n = \dim L$. Значит, как только $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$, $g(x) > 0$.

Обратно. Пусть $g(x)$ положительно определена. В пространстве L выберем базис, в котором соответствующая форма запишется в каноническом виде:

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_k x_k^2 - \alpha_{k+1} x_{k+1}^2 - \ldots - \alpha_r x_r^2.$$

Если $r \neq \dim L$, то возьмем $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$. Тогда $g(x) = 0$ в противоречии с условием. Следовательно, форма имеет вид

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_k x_k^2 - \alpha_{k+1} x_{k+1}^2 - \ldots - \alpha_n x_n^2,$$

где $n = \dim L$.

Если $k \neq \dim L$, то снова возьмем $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$. Тогда $g(x) = -\alpha_n < 0$ в противоречии с условием. □

Определение 3. Квадратичная форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***положительно определённой***, если $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$, как только $x_i \neq 0$ хотя бы для одного i.

Определение 4. Квадратичная форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***отрицательно определённой***, если $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$, как только $x_i \neq 0$ хотя бы для одного i.

Следствие 1. Квадратичная форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ положительно определена тогда и только тогда, когда её положительный индекс инерции равен числу переменных.

Доказательство очевидно.

Ясно, что если форма рассматривается над полем F, то её можно рассматривать и над полем $\boldsymbol{R}$.

Следствие 2. Квадратичная форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над полем F положительно определена тогда и только тогда, когда она положительно определена над $\boldsymbol{R}$.

Доказательство. Поскольку канонический вид формы над F автоматически является каноническим видом той же формы над $\boldsymbol{R}$, утверждение вытекает из закона инерции квадратичных форм и следствия 1 этого параграфа.

Для отрицательно определённых квадратичных функций и форм имеют место аналогичные утверждения.

Теорема 1′. Квадратичная функция $g(x)$, заданная на пространстве L, отрицательно определённа тогда и только тогда, когда её отрицательный индекс инерции равен $\dim L$.

Следствие 1′. Квадратичная форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда её отрицательный индекс инерции равен числу переменных.

Следствие 2′. Квадратичная форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над полем F отрицательно определена тогда и только тогда, когда она отрицательно определена над $\boldsymbol{R}$.

Определение 5. Квадратичная функция $g(x)$, заданная на пространстве L, называется ***неотрицательно определённой***, если $g(x) \geq 0$ для любого x из L.

Определение 6. Квадратичная функция $g(x)$, заданная на пространстве L, называется ***неположительно определённой***, если $g(x) \leq 0$ для любого x из L.

Теорема 2. Квадратичная функция $g(x)$, заданная на пространстве L, неотрицательно определённа тогда и только тогда, когда её отрицательный индекс инерции равен 0.

Следствие 3. Квадратичная форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неотрицательно определена тогда и только тогда, когда её отрицательный индекс инерции равен 0.

Следствие 4. Квадратичная форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над полем F неотрицательно определена тогда и только тогда, когда она неотрицательно определена над $\boldsymbol{R}$.

Теорема 2′. Квадратичная функция $g(x)$, заданная на пространстве L, неположительно определённа тогда и только тогда, когда её положительный индекс инерции равен 0.

Следствие 3′. Квадратичная форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неположительно определена тогда и только тогда, когда её положительный индекс инерции равен 0.

Следствие 4′. Квадратичная форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над полем F неположительно определена тогда и только тогда, когда она неположительно определена над $\boldsymbol{R}$.

! Докажите эти утверждения самостоятельно.

Конечно, совсем не хочется каждый раз, чтобы узнать является ли функция или форма знако определённой приводить её к каноническому виду. Хочется иметь некоторый критерий, позволяющий определять, обладает ли форма интересующим нас свойством. Такой критерий есть.

Определение 7. ***Угловым минором k-го порядка*** матрицы называется минор. стоящий в первых k строках и первых k столбцах этой матрицы.

Теорема 3 (Критерий Сильвестра). Квадратичная форма над полем F положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы этой формы положительны.

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по числу переменных n.

База индукции. $n = 1$. Форма в этом случае имеет вид $\alpha_{11}x_1^2$. Ясно, что для положительной определённости этой форма необходимо и достаточно, чтобы коэффициент α_{11} был положительным. А это и есть угловой минор (единственный в данном случае) матрицы этой формы.

Шаг индукции. Пусть утверждение доказано, если число переменных меньше n. Докажем его для формы от n переменных.

Пусть $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – положительно определенная форма над полем F. Запишем эту форму так, как мы уже делали:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij}\, x_i x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ii} x_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n-1} \alpha_{ij}\, x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}\, x_i x_n + \alpha_{nn} x_n^2.$$

Рассмотрим форму $h(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ii} x_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n-1} \alpha_{ij}\, x_i x_j$. Эта форма положительно определена, потому что в противном случае найдётся вектор $x = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$, для которого $g(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, 0) = h(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \le 0$. В свою очередь $[h]$ – это часть матрицы $[g]$, полученная вычёркиванием последней строки и последнего столбца. По предположению индукции все угловые миноры матрицы $[h]$ положительны, а это первые $n - 1$ угловых миноров матрицы $[g]$. Осталось показать, что положителен самый большой угловой минор, т.е. определитель самой матрицы $[g]$.

Приведём форму $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к каноническому виду. По теореме 1 это будет $\alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$, причём все $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ положительны. Матрица этой формы имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$ и она конгруэнтна матрице $[g]$.

? Как связаны между собой конгруэнтные матрицы?

Именно это нам и было нужно. Шаг индукции доказан.

Обратно. Пусть теперь все угловые миноры матрицы $[g]$ положительны. Покажем, что в этом случае форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ положительно определена не только над F, но и над $\boldsymbol{R}$.

Снова запишем форму $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ так, как мы уже делали:

$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} \alpha_{ij}\, x_i x_j =$

$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n-1} \alpha_{ij}\, x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}\, x_i x_n + \alpha_{nn}x_n^2,$

и выделим $h(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n-1} \alpha_{ij}\, x_i x_j$. У матрицы формы $h(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ все угловые миноры положительны, по предположению индукции форма $h(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ положительно определена. Приведём форму $h(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ невырожденной линейной заменой переменных к нормальному виду.

? Каким будет нормальный вид этой формы?

Выполним ту же замену в форме $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, положив дополнительно $y_n = x_n$. Получим форму $g_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \beta_{in}\, y_i y_n + \alpha_{nn}y_n^2$. Матрица этой формы выглядит так: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$, и она конгруэнтна $[g]$. Значит, существует обратимая матрица T такая, что $[g] = T^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} T$. Тогда

$\det\,[g] = \det\left(T^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} T\right) = \det T^t \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \det T =$

$= (\det T)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$

Поскольку $\det [g] > 0$ как угловой минор матрицы $[g]$ и $(\det T)^2 > 0$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} > 0$. Вычислим этот определитель.

? Чему равен этот определитель?

А теперь перепишем форму $g_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ следующим образом:

$$g_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \beta_{in}\, y_i y_n + \alpha_{nn} y_n^2 =$$

$$= (y_1 + \beta_{1n} y_n)^2 + (y_2 + \beta_{2n} y_n)^2 + \ldots + (y_{n-1} + \beta_{n-1\,n} y_n)^2 + \left(\alpha_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{in}^2\right) y_n^2.$$

Ясно, что эта форма всегда неотрицательна и принимает значение 0 только в том случае, если $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$. Следовательно, она положительно определена. А тогда положительно определена и конгруэнтная ей форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. □

? Как, по вашему мнению, звучит критерий Сильвестра для отрицательно определённых форм?

Легко понять, что если квадратичная функция или форма g отрицательно определена, то квадратичная функция или форма $-g$ будет уже положительно определённой.

? Как связаны значения угловых миноров $[g]$ и $[-g]$?

§ 5. Приведение вещественной квадратичной формы к главным осям

Пусть пространство L, в котором рассматривается квадратичная функция, евклидово. Естественно тогда выбирать базис для построения соответствующей квадратичной формы ортонормированным. Естественно также при переходе к другому базису считать его тоже ортонормированным. Возникает вопрос: можно ли при таких ограничениях выбрать ортонормированный базис так, чтобы форма, соответствующая квадратичной функции, имела канонический вид? Ответ на этот вопрос положителен.

Теорема. Для любой квадратичной функции на евклидовом пространстве существует ортонормированный базис этого пространства, в котором квадратичная форма, соответствующая данной квадратичной функции, имеет канонический вид. Этот вид определен однозначно с точностью до переименования переменных.

Доказательство. Пусть квадратичная функция $g(x)$ в некотором ортонормированном базисе a_1, a_2, …, a_n пространства L записывается как квадратичная форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Матрица $[g]$ этой формы симметрическая и, следовательно, является в этом базисе матрицей некоторого самосопряженного преобразования f пространства L. Ясно $[f]$ и $[g]$ совпадают.

По теореме о самосопряженном преобразовании в пространстве L существует ортонормированный базис b_1, b_2, …, b_n из собственных векторов преобразования f. В этом базисе матрица преобразования f диагональна. Пусть эта матрица выглядит так:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\ 0 \ldots 0 \ldots\ 0 \\ 0\ \alpha_2 \ldots 0 \ldots\ 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0\ 0 \ldots\ \alpha_r \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0\ 0 \ldots 0 \ldots\ 0 \end{pmatrix}.$$

? Что такое α_i? Что такое r ?

Обозначим через $T_{\text{СН}}$ матрицу перехода от базиса a_1, a_2, …, a_n к базису b_1, b_2, …, b_n. Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\ 0 \ldots 0 \ldots\ 0 \\ 0\ \alpha_2 \ldots 0 \ldots\ 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0\ 0 \ldots\ \alpha_r \ldots 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0\ 0 \ldots 0 \ldots\ 0 \end{pmatrix} = T_{\text{СН}}\,[f]\,T_{\text{СН}}^{-1} = T_{\text{СН}}\,[g]\,T_{\text{СН}}^{-1}.$$

В то же время, матрица $T_{\text{СН}}$, как матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому, ортогональна и потому $T_{\text{СН}}^{-1} = T_{\text{СН}}^{t}$. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = T_{\text{СН}}\,[g]\,T_{\text{СН}}^{\;t}.$$

Это означает, что матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha_r & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ и $[g]$ конгруэнтны, а, следовательно, конгруэнтны и формы $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_r y_r^2$, т.е. форма $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ приводима к каноническому виду некоторой ортогональной заменой переменных. Однозначность канонического вида следует из того, что собственные числа самосопряжённого преобразования не зависят от выбора базиса. □

Конец главы.