Глава 9. Линейные отображения пространств со скалярным произведением

§ 3. Самосопряжённые линейные преобразования

Пусть L_1 и L_2 – пространства со скалярным произведением, f – линейное отображение L_1 в L_2. Для отображения $f \circ f^*$ выполняется следующее свойство: $(f \circ f^*)^* = f^{**} \circ f^* = f \circ f^*$, т.е. $f \circ f^*$ – это отображение L_1 в L_1, которое совпадает со своим сопряжённым. Напомним, что линейные отображения пространства в себя мы называли линейными преобразованиями этого пространства.

Определение 1. Линейное преобразование пространства со скалярным произведением называется ***самосопряженным***, если оно совпадает со своим сопряженным преобразованием.

Чтобы изучить свойства самосопряженных преобразований, нам потребуется понятие собственного вектора линейного преобразования.

Определение 2. Пусть f – произвольное линейное преобразование произвольного линейного пространства L над произвольным полем F. Ненулевой элемент a из L называется ***собственным вектором*** преобразования f, если существует $\alpha \in F$ такой, что $f(a) = \alpha a$. Число α называют ***собственным числом*** преобразования f.

Как разыскивать собственные числа и собственные векторы? В общем случае это не просто, давайте научимся этому в случае конечномерного пространства. Помогут нам, как обычно, матрицы.

Выберем произвольный базис пространства L, тогда равенство $f(a) = \alpha a$ можно записать $[f][a] = \alpha[a]$. Пусть $[f] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \dots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \dots \alpha_{2n} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \dots \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, $[a] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

? Почему матрица квадратная? Что такое n?

Тогда получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\, x_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \cdots + \alpha_{1n}\, x_n = \alpha x_1 \\ \alpha_{21}\, x_1 + \alpha_{22}\, x_2 + \cdots + \alpha_{1n}\, x_n = \alpha x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}\, x_1 + \alpha_{n2}\, x_2 + \cdots + \alpha_{nn}\, x_n = \alpha x_n \end{cases}.$$

Перепишем её следующим образом:

$$\begin{cases} (\alpha_{11} - \alpha) x_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \cdots + \alpha_{1n}\, x_n = 0 \\ \alpha_{21}\, x_1 + (\alpha_{22} - \alpha) x_2 + \cdots + \alpha_{1n}\, x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}\, x_1 + \alpha_{n2}\, x_2 + \cdots + (\alpha_{nn} - \alpha) x_n = 0 \end{cases}.$$

У нас получилась однородная система линейных уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Определение 3. Матрица $\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\alpha & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\alpha & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}-\alpha \end{pmatrix}$ называется ***характеристической матрицей*** матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$.

Нам нужно, чтобы эта система имела ненулевое решение, потому что вектор a ненулевой. Значит, определитель матрицы системы должен быть равен 0, иначе система была бы крамеровой и имела бы единственное, т.е. только нулевое, решение. Определитель характеристической матрицы – это многочлен относительно переменной α над полем .

? Какова степень этого многочлена? Какой у него старший коэффициент?

Определение 4. Определитель характеристической матрицы называется ***характеристическим многочленом***.

Теорема 1. Собственные числа линейного преобразования f являются корнями характеристического многочлена. И наоборот, каждый корень характеристического многочлена – собственное число линейного преобразования f.

Доказательство первого утверждения уже проведено. Пусть теперь некоторый элемент поля F – корень характеристического многочлена. Это означает, что ранг r характеристической матрицы (она же матрица однородной системы линейных уравнений) меньше числа переменных. Тогда размерность пространства решений равна $n - r > 0$ и, следовательно, в этом пространстве есть ненулевой вектор. Каждый такой вектор и будет собственным для f при заданном собственном числе. □

Кратко характеристический многочлен можно записать как $\det([f] - \alpha E)$.

Конечно, возникает следующий вопрос. Построение характеристического многочлена «привязано» к выбору базиса. Если взять другой базис, характеристический многочлен изменится? И корни, т.е. собственные числа f, будут уже другие?

! Вспомните, как меняется матрица линейного преобразования при переходе к другому базису.

Теорема 2. Характеристический многочлен линейного преобразования f не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть T_{HC} – матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда $= T_{HC}^{-1}[f]_C T_{HC}$. Для матрицы $[f]_H$ характеристический многочлен равен $\det([f]_H - \alpha E) = \det(T_{HC}^{-1}[f]_C T_{HC} - \alpha E) = \det(T_{HC}^{-1}[f]_C T_{HC} - \alpha T_{HC}^{-1} E T_{HC}) = \det T_{HC}^{-1}([f]_C - \alpha E) T_{HC} = (\det T_{HC}^{-1}) \det ([f]_C - \alpha E) (\det T_{HC}) = \det ([f]_C - \alpha E) (\det T_{HC}^{-1}) (\det T_{HC}) = \det ([f]_C - \alpha E)$.

Для пространств над $\boldsymbol{C}$ собственные числа, а значит, и собственные векторы есть у любого линейного преобразования.

! Объясните, почему.

Над $\boldsymbol{R}$ и уж тем более над $\boldsymbol{Q}$ или $\boldsymbol{Z_p}$ это, увы, не так.

! Приведите пример линейного преобразования какого-либо пространства над $\boldsymbol{R}$, не имеющего собственных чисел.

Вернёмся к рассмотрению пространств со скалярным произведением и пусть f – самосопряженное преобразование такого пространства. Для него ситуация намного лучше.

Теорема 3. Все корни характеристического многочлена самосопряженного линейного преобразования действительны.

Доказательство. Пусть сначала пространство унитарно. Тогда у рассматриваемого нами линейного преобразования f есть собственное число α и собственный вектор a, т.е. $f(a) = \alpha a$. Запишем цепочку равенств:

$$\alpha(a, a) = (\alpha a, a) = (f(a), a) = (a, f^*(a)) = (a, f(a)) = (a, \alpha a) = \bar{\alpha}(a, a).$$

Поскольку $(a, a) \neq 0$, $\alpha = \bar{\alpha}$, а это означает, что α действительное число. Поскольку над $\boldsymbol{C}$ характеристический многочлен разлагается на множители первой степени, все корни у него действительные.

Пусть теперь пространство евклидово. Выберем в нём ортонормированный базис и запишем в нём матрицу линейного преобразования f. Обозначим эту матрицу A. Ясно, что все элементы матрицы A действительные числа и, поскольку это матрица самосопряженного преобразования, $A = A^t$. А теперь возьмём унитарное пространство той же размерности, и зафиксируем в нём ортонормированный базис. Определим с помощью матрицы A на этом пространстве линейное преобразование. Назовем его g. Разумеется, $[g] = A$. Тогда $[g^*] = \bar{A}^t = A^t = A = [g]$. Но тогда $g^* = g$, т.е. g – самосопряженное преобразование. Характеристический многочлен для преобразования g такой же, как и для f – ведь у них одна и та же матрица. А все корни характеристического многочлена преобразования g действительные, значит, такие же они и для характеристического многочлена преобразования f. □

Теорема 4. Линейное преобразование конечномерного пространства со скалярным произведением самосопряжённое тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис из собственных векторов, собственные числа которых действительны.

Доказательство прямого утверждения проведём индукцией по размерности пространства L. Пусть f – самосопряжённое линейное преобразование этого пространства.

Б.И. $\dim L = 1$. Пусть a – базисный вектор этого пространства. Тогда $f(a) = \alpha a$ для некоторого числа α. Поскольку $a \neq 0$, $|\, a \,| \neq 0$. Вектор $u = \frac{1}{|a|}\, a$ имеет единичную длину. Кроме того, $f(u) = \frac{1}{|a|}\, f(a) = \frac{1}{|a|}\, (\alpha a) = \alpha(\frac{1}{|a|}\, a) = \alpha u$, так что u – это собственный вектор, который можно считать ортонормированным базисом, а α – собственное число, которое действительно по теореме 3.

Ш.И. Пусть утверждение справедливо, когда $\dim L = n - 1$. Докажем для пространства L размерности n. Поскольку все корни характеристического многочлена преобразования f действительны, то не зависимо евклидово пространство или унитарное для f имеется собственное число и собственный вектор. Пусть это вектор a с собственным числом α. Разделив этот вектор на его длину, мы получаем собственный вектор u_1 единичной длины с тем же собственным числом α. По теореме об ортогональном разложении $L = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_1 \rangle^{\perp}$.

? Какова размерность $\langle u_1 \rangle^{\perp}$?

Пусть $x \in \langle u_1 \rangle^{\perp}$. Тогда $(f(x), u_1) = (x, f^*(u_1)) = (x, f(u_1)) = (x, \alpha u_1) = \bar{\alpha}(x, u_1) = 0$. Следовательно, $f(x) \in \langle u_1 \rangle^{\perp}$. Это позволяет следующим образом определить преобразование g пространства $\langle u_1 \rangle^{\perp}$: $g(x) = f(x)$. Ясно, что $g(x)$ – линейное преобразование пространства . Кроме того,

$$\forall x, y \in \langle u_1 \rangle^{\perp}\ (g(x), y) = (f(x), y) = (x, f^*(y)) = (x, f(y)) = (x, g(y)),$$

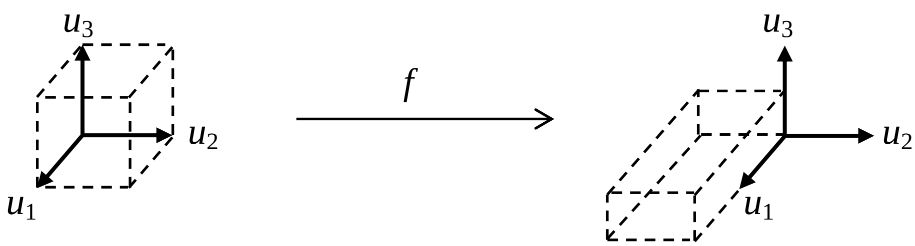
т.е. $g = g^*$. Значит, g – самосопряженное преобразование пространства $\langle u_1 \rangle^{\perp}$. К нему применимо предположение индукции. Следовательно, существует ортонормированный базис $u_2, \ldots, u_n$ пространства $\langle u_1 \rangle^{\perp}$, состоящий из собственных векторов преобразования g. Ясно, что тогда $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – ортонормированный базис пространства L, состоящий из собственных векторов преобразования f.

Обратно. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – ортонормированный базис пространства L, состоящий из собственных векторов преобразования f и для каждого u_i собственное число α_i действительно. Запишем матрицу преобразования f в этом базисе:

$$[f] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Поскольку $[f^*] = \overline{[f]^t}$ и все числа α_i действительны, $[f^*] = [f]$. Это означает, что $f^* = f$, т.е. f – самосопряжённое преобразование. □

Какова геометрическая сущность самосопряжённого преобразования? Пусть $\dim L_1 = 3$, u_1, u_2, u_3 – ортонормированный базис L, состоящий из собственных векторов преобразования f с собственными числами $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 0{,}5$.



Как мы видим, f деформирует единичный куб в прямоугольный параллелепипед. Т.е. геометрический смысл самосопряженного преобразования довольно прост – это растяжение или сжатие вдоль осей, возможно в сочетании с отражением.