Глава 11. Линии и поверхности второго порядка

§ 3. Директориальное свойство эллипса и гиперболы

Пусть F_1 и F_2 – фокусы эллипса или гиперболы, расположенные на оси абсцисс симметрично относительно начала координат.

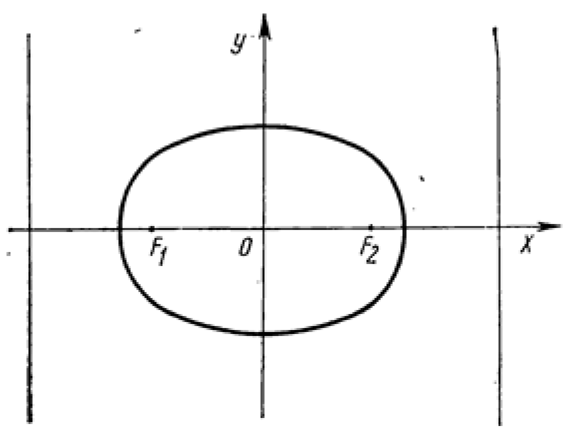
Определение. Директрисой, соответствующей фокусу F_i, называется прямая, заданная уравнением $x = (-1)^i \dfrac{a}{\varepsilon}$.

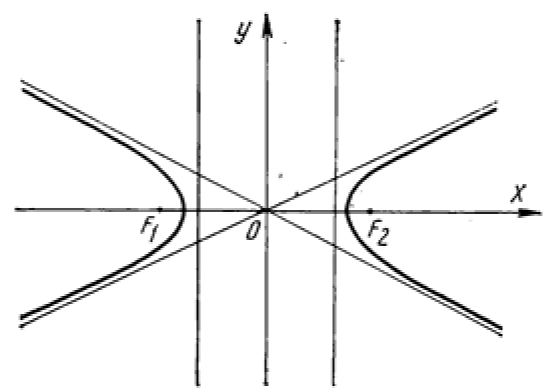
Таким образом, и у эллипса, и у гиперболы по две директрисы. Ясно, что они для эллипса параллельны малой полуоси, а для гиперболы параллельны мнимой оси.

? Пересекают ли они эти линии?

Нет. Для эллипса эксцентриситет меньше 1 и потому директриса отстоит от начала координат дальше, чем ближайшая вершина эллипса. Для гиперболы наоборот, эксцентриситет больше 1 и потому директриса расположена к началу координат ближе, чем ближайшая вершина эллипса, но в той же полуплоскости.

Оказывается, что директрисы обладают важным геометрическим свойством.





Теорема 1 (Директориальное свойство). Отношение расстояния от любой точки эллипса (гиперболы) до фокуса к расстоянию от этой же точки до соответствующей данному фокусу директрисы равно эксцентриситету.

Доказательство (для фокуса F_1). Пусть точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу или гиперболе. Уравнение директрисы, соответствующей фокусу F_1, имеет вид $x + \dfrac{a}{\varepsilon} = 0$.

? Чему равно расстояние от точки M до этой линии?

Оно равно $|x_0 + \frac{a}{\varepsilon}|$.

? А чему равно расстояние от точки M до фокуса F_1?

Длине фокального радиус-вектора $\overrightarrow{F_1M}$. Эта длина не зависимо от того, идет речь об эллипсе или гиперболе, равна $|a + \varepsilon x_0|$.

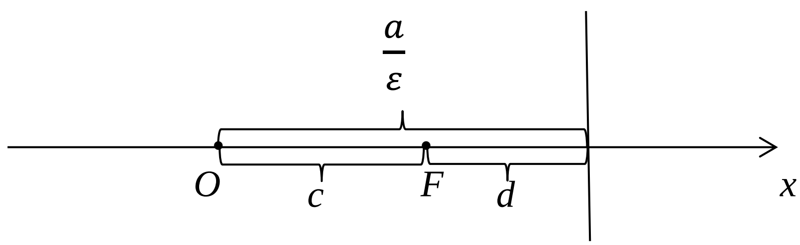
Тогда интересующее нас отношение равно $\dfrac{|a + \varepsilon x_0|}{|x_0 + \frac{a}{\varepsilon}|} = \varepsilon$. □

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 2. Пусть на плоскости задана прямая и точка, не лежащая на этой прямой. Множество точек, отношение расстояния от которых до данной точки к расстоянию до данной прямой, есть величина постоянная, является эллипсом, если эта постоянная меньше 1, и гиперболой, если эта постоянная больше 1.

Доказательство. Понятно, что доказательство основывается на выводе уравнения, задающего указанное множество. Понятно также, что наша прямая должна стать директрисой, а точка соответствующим фокусом; поэтому обозначим её F. Вопрос в выборе системы координат. Конечно, ось абсцисс должна проходить через данную точку и быть перпендикулярной данной прямой. А где выбрать начало координат?

Отношение обозначим буквой ε, а расстояние от точки до прямой – буквой d.



Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a} = \varepsilon; \\ \dfrac{a}{\varepsilon} - c = d. \end{cases}$$

Решив её, получаем $a = \dfrac{\varepsilon d}{1-\varepsilon^2}$, $c = \dfrac{\varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2}$. Теперь понятно, где надо отметить на оси абсцисс начало координат.

Приступим к выводу уравнения. Пусть точка с $A(x, y)$ принадлежит нашему множеству. Тогда $|FA| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, а расстояние от точки A до заданной прямой равно $|x - \frac{a}{\varepsilon}|$. Значит, $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \varepsilon\,|x - \frac{a}{\varepsilon}|$. Возведём обе части этого равенства в квадрат и раскроем скобки:

$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 - 2a\varepsilon x + a^2$.

Учитывая, что $c = \varepsilon a$, получаем

$x^2 - 2x\varepsilon a + (\varepsilon a)^2 + y^2 = \varepsilon^2 x^2 - 2a\varepsilon x + a^2$.

$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = (1 - \varepsilon^2)a^2$.

Поскольку $\varepsilon \neq 1$ и $a \neq 0$, это уравнение можно переписать так:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1$$

При $\varepsilon < 1$ это уравнение эллипса, а при $\varepsilon > 1$ это уравнение гиперболы. Более того, при $\varepsilon < 1$ в стандартных обозначениях для эллипса $(1 - \varepsilon^2)a^2 = b^2$, а при $\varepsilon > 1$ в стандартных обозначениях для гиперболы $(\varepsilon^2 - 1)a^2 = b^2$.

! Проверьте.

О том, что каждая точка получившегося эллипса или гиперболы обладает нужным свойством, нам говорит теорема 1. □

§ 4. Парабола

Теоремы 1 и 2 оставляют открытым вопрос, каким будет множество точек, если отношение расстояний равно 1.

Определение. Множество точек, равноудалённых от фиксированной прямой и фиксированной точки, не лежащей на этой прямой, называется ***параболой***. Фиксированная точка называется ***фокусом*** параболы, а фиксированная прямая ***директрисой*** параболы.

Расстояние от точки до прямой называется ***фокальным параметром параболы*** и обычно обозначается буквой p.

Составим уравнение параболы. Систему прямоугольных координат выберем следующим образом (рис. 69). Проведем ось Ox через фокус F перпендикулярно директрисе Δ в направлении от директрисы к фокусу; начало координат возьмем в середине отрезка между фокусом F и точкой K пересечения оси Ox с директрисой Δ. Если обозначить буквой p расстояние фокуса от директрисы, то $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ и уравнение директрисы будет иметь вид

$$x = -\frac{p}{2}.$$

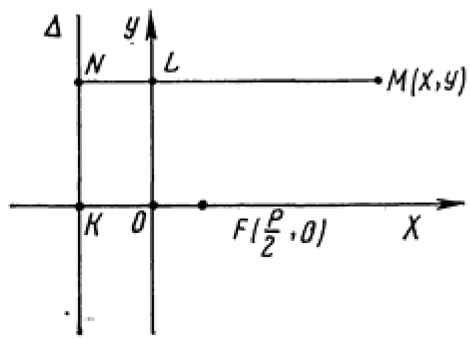
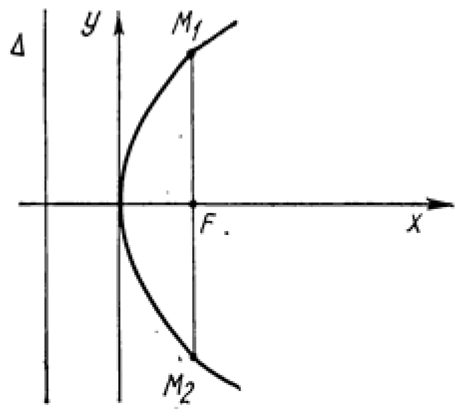


Рис. 69

Тогда $|FM| = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$, а $|MN| = |x + \frac{p}{2}|$. Значит, $(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$y^2 = 2px.$$

Ясно, что все выполненные действия можно обратить, поэтому любая точка с координатами, удовлетворяющая полученному уравнению, лежит на параболе. Следовательно, это и есть уравнение параболы. Оно показывает, что парабола целиком лежит в правой полуплоскости и ось абсцисс служит осью симметрии. Пересечение параболы со своей осью симметрии называется вершиной параболы.



Ясно, что уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ тоже определяют параболы, только первая из них лежит в правой полуплоскости, а для двух следующих осью симметрии является ось ординат.

С параболой, заданной уравнением $y = ax^2$ (если a положительно, то $a = \frac{1}{2p}$), вы знакомы со школы, так что обсуждать её форму мы не будем.