Глава 10. Билинейные и квадратичные функции и формы

§ 2. Понятия квадратичной функции и формы

Пусть L – произвольное линейное пространство над полем F. На поле у нас будет ограничение, что $1 + 1 \neq 0$. В частности, поле $\boldsymbol{Z}_2$ нами не рассматривается. Зато в поле F у нас есть элемент $\frac{1}{2}$, которым мы будем активно пользоваться.

Определение 1. Функция g: $L \to F$ называется ***квадратичной***, если существует такая билинейная функция f: $L \times L \to F$, что $g(x) = f(x, x)$.

Понятно, что из выбранной билинейной функции квадратичная функция получается только одна. Но вполне так может быть так, что из разных билинейных функций квадратичная функция получается одна и та же.

Пример. Пусть L – двумерное пространство, билинейная функция f_1 задана матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а билинейная функция f_2 задана матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Эти матрицы даже не конгруэнтны.

! Объясните, почему.

Пусть x – вектор с координатами $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$f_1(x, x) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$f_2(x, x) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

Т.е. $f_1(x, x) = f_2(x, x)$ для любого вектора x и потому квадратичная функция $g(x)$ из них получается одна и та же.

Чтобы иметь взаимно однозначное соответствие между билинейными и квадратичными функциями, введем следующее понятие.

Определение 2. Билинейная функция f: $L \times L \to F$ называется ***симметричной***, если $\forall\ x, y \in L\ f(x, y) = f(y, x)$.

! Проверьте, что симметричные билинейные функции образуют линейное подпространство в пространстве всех билинейных функций. Какова его размерность?

Легко понять, что билинейная функция симметрична тогда и только тогда, когда симметрична её матрица.

! Объясните, почему.

Теорема 1. Для любой квадратичной функции существует и при том только одна симметричная билинейная функция, которая порождает данную квадратичную функцию.

Доказательство. Пусть $g(x)$ – квадратичная функция на пространстве L, $f(x, y)$ – порождающая её билинейная функция. Ясно, что $f(y, x)$ – это тоже билинейная функция.

? Как связаны матрицы функций $f(x, y)$ и $f(y, x)$?

Рассмотрим билинейную функцию $h(x, y) = \frac{1}{2}(f(x, y) + f(y, x))$. Ясно, что функция $h(x, y)$ симметрична. Кроме того, $h(x, x) = \frac{1}{2}(f(x, x) + f(x, x)) = f(x, x) = g(x)$.

Пусть теперь $f(x, y)$ – симметрическая билинейная функция, порождающая квадратичную функцию $g(x)$, т.е. $g(x) = f(x, x)$.

? $g(x)$ – функция одной переменной, а получить мы хотим функцию $f(x, y)$ двух переменных. Как этого добиться?

$g(x + y) = f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = g(x) + 2f(x, y) + g(y)$. Значит,

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(g(x + y) - g(x) - g(y)),$$

т.е. функция $f(x, y)$ однозначно восстанавливается по функции $g(x)$. □

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторый базис пространства L.

Определение 2. ***Матрицей*** квадратичной функции g в базисе $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется матрица порождающей её симметрической билинейной функции.

Матрицу квадратичной функции будем обозначать $[g]$,

Как мы знаем, ранг матрицы не зависит от выбора базиса, поэтому его называют ***рангом квадратичной функции***.

Смена базиса приводит к замене исходной матрицы на ей конгруэнтную:

$[g]_{\text{С}} = (T_{\text{СН}})^t\, [g]_{\text{Н}}\, T_{\text{СН}}$.

Ясно, что матрицы T_{CH} и S_{CH} совпадают.

Определение 3. Квадратные матрицы A и B одинакового размера называются ***конгруэнтными***, если существует такая обратимая матрица T, для которой $A = T^{t}BT$.

! Докажите, что определённое таким образом отношение конгруэнтности квадратных матриц тоже является отношением эквивалентности.

Ясно, что билинейная форма f, из которой получается квадратичная функция g при отождествлении векторов, становится многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. При этом, разумеется, могут появиться слагаемые с квадратами переменных. Учитывая, что $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, получающийся многочлен записывают так:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} \alpha_{ij}\, x_i x_j\ .$$

Многочлен такого вида называют ***квадратичной формой***. ***Матрицей квадратичной формы*** называется матрица соответствующей квадратичной функции.

Определение 4. Квадратичные формы называются ***конгруэнтными***, если конгруэнтны их матрицы.

Как и в случае билинейных форм, конгруэнтность квадратичных форм означает, что одна из них может быть получена невырожденной линейной заменой переменных.

Естественно интересоваться, нельзя ли подобрать такую невырожденную линейную замену переменных, чтобы получилась форма наиболее простого вида. Разумеется, надо договориться, какой вид считать наиболее простым.

? Какие на этот счёт есть мнения?

Теорема 2. Любая квадратичная форма конгруэнтна квадратичной форме в каноническом виде.

Замену квадратичной формы конгруэнтной ей квадратичной формой в каноническом виде называют ***приведением исходной формы к каноническому виду***. Поэтому эту теорему называют «Теоремой о приведении квадратичной формы к каноническому виду».

Доказательство проведём индукцией по количеству переменных n в квадратичной форме $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij}\, x_i x_j$.

База индукции: $n = 1$. В этом случае $g(x_1) = \alpha_{11} x_1^2$, так что ничего предпринимать не требуется.

Шаг индукции. Пусть утверждение справедливо, если переменных меньше n. Рассмотрим форму с n переменными. Возможны два случая.

1) В записи формы присутствует квадрат хотя бы одной переменной.

Перенумерация переменных является, очевидно, невырожденной линейной заменой. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\alpha_{nn} \neq 0$. Форму g запишем так:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n} \alpha_{ij}\, x_i x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ii} x_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n-1} \alpha_{ij}\, x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}\, x_i x_n + \alpha_{nn} x_n^2.$$

Выполним следующую замену переменных:

$y_1 = x_1$;

$y_2 = x_2$;

…

$y_{n-1} = x_{n-1}$;

$y_n = x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{nn}} x_i$.

Заметим, что

$$y_n^2 = x_n^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{nn}} x_i x_n + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{nn}} x_i\right)^2 = x_n^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{nn}} x_i x_n + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{nn}} y_i\right)^2.$$

Имеем:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ii} x_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n-1} \alpha_{ij}\, x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}\, x_i x_n + \alpha_{nn} x_n^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ii} y_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n-1} \alpha_{ij}\, y_i y_j + \alpha_{nn} y_n^2 - \alpha_{nn}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{nn}} y_i\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ii} y_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n-1} \alpha_{ij}\, y_i y_j - \alpha_{nn}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{nn}} y_i\right)^2\right) + \alpha_{nn} y_n^2.$$

То, что написано в скобках, является квадратичной формой от $n - 1$ переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. По предположению индукции существует невырожденная линейная замена переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ на $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, приводящая эту форму к каноническому виду. Беря $z_n = y_n$, мы получим форму от переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$ в каноническом виде.

2) В записи формы $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отсутствуют квадраты переменных.

Тогда в ней есть слагаемое $\alpha_{ij}x_ix_j$ с $\alpha_{ij} \neq 0$. Выполним следующую замену переменных:

$x_1 = y_1$;

…

$x_i = y_i$;

…

$x_j = y_j + y_i$;

…

$x_n = y_n$.

Ясно, что это невырожденная линейная замена переменных.

Слагаемое $\alpha_{ij}x_ix_j$ превратится в $\alpha_{ij}y_iy_j + \alpha_{ij}y_i^2$ и квадратов других переменных в форме не появится. Следовательно, квадратичная форма от переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ удовлетворяет требованиям пункта 1) и может быть приведена к каноническому виду. □

В каноническом виде квадратичная форма выглядит как $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}x_i^2$. При этом некоторые из коэффициентов α_{ii} могут оказаться равными 0. Разумеется, мы такие слагаемые писать не будем.

Пример. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = y_1^2$ после замены $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2$.

Теорема 3. Количество ненулевых слагаемых в форме, полученной приведением квадратичной формы g к каноническому виду, равно рангу формы g и, следовательно, не зависит от выбора замены переменных при приведении к каноническому виду.

Доказательство. Матрица квадратичной формы в каноническом виде диагональна. Поэтому её ранг равен числу ненулевых элементов на диагонали. А у конгруэнтных квадратичных форм ранги равны. □

Сами коэффициенты, как правило, зависят от того, как вы приводили форму к каноническому виду. Ведь даже в изложенном алгоритме (который называют «методом Лагранжа» или «методом выделения полного квадрата») можно начинать с любой переменной, при квадрате которой коэффициент не равен 0.

Попробуем сделать ещё более простым канонический вид квадратичной формы. Например, если $F = \boldsymbol{C}$ (и вообще, если в поле F из любого элемента можно извлечь квадратный корень, например, если F алгебраически замкнуто), то в форме $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2$ можно сделать замену $y_i = \sqrt{\alpha_{ii}} x_i$, после чего форма примет вид суммы квадратов переменных.

Определение 5. Говорят, что квадратичная форма над алгебраически замкнутым полем имеет ***нормальный вид***, если она равна сумме квадратов нескольких переменных.

Теорема 4. Над алгебраически замкнутым полем любая квадратичная форма конгруэнтна квадратичной форме в нормальном виде. Количество слагаемых в нормальном виде не зависит от выбора замены переменных при приведении к нормальному виду.

Доказательство фактически уже приведено.

Если же не из каждого элемента поля извлекается квадратный корень, под нормальным видом понимают алгебраическую сумму квадратов переменных. Слово «алгебраическая» означает, что перед квадратом переменной может стоять как знак «+», так и знак «–».

Теорема 5. Пусть $F = \boldsymbol{R}$ или $F = \mathbf{Z}_p$, где p – простое число вида $4k - 1$. Тогда любая квадратичная форма конгруэнтна квадратичной форме в нормальном виде. Количество слагаемых в нормальном виде не зависит от выбора замены переменных при приведении к нормальному виду.

Доказательство. Для $F = \boldsymbol{R}$ утверждение практически сразу следует из теоремы 3. Для $F = \mathbf{Z}_p$ часть о приводимости к нормальному виду принимаем без доказательства. □

Как мы видим, общее число слагаемых в нормальной форме не зависит от выбора замены переменных, но возникает вопрос, зависит ли количество слагаемых со знаком «+» от того, как мы будем приводить форму к нормальному виду. Для поля $\boldsymbol{R}$ ответом на этот вопрос мы займёмся в следующем параграфе.