Глава 11. Линии и поверхности второго порядка

Мы возвращаемся к аналитической геометрии на обычной плоскости и в привычном нам трёхмерном пространстве. Ключевым понятием является понятие системы координат.

? Что такое система координат на плоскости? А в пространстве?

И на плоскости, и в пространстве каждая точка задаётся своими координатами.

? Что такое координаты точки?

? Какая система координат называется прямоугольной?

? Какая система координат называется декартовой?

Далее мы несколько лекций посвятим аналитической геометрии на плоскости, и все определения и утверждения будут относиться к плоскости без дополнительных оговорок.

Если мы на плоскости имеем линию, это значит, что между точками этой линии есть зависимость. Основная идея Декарта состоит в том, чтобы эту зависимость выражать аналитически, а попросту говоря, некоторой формулой, точнее уравнением.

Определение 1. Уравнение $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ – некоторая функция двух переменных, называется ***уравнением линии*** l, если координаты любой точки этой линии удовлетворяют данному уравнению и, наоборот, любая точка, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, принадлежит линии l.

? Каким уравнением задаётся прямая?

? А может ли прямая задаваться уравнением не первого порядка?

Может. Например, уравнение $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$ равносильно уравнению $x + 2y = 0$ и, значит, тоже задаёт прямую.

Правда, в этом случае говорят, что уравнение $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$ задаёт две совпадающие прямые.

? А что задаёт уравнение $x^2 + 4xy + 4y^2 - 1 = 0$?

Понятно, что оно равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x + 2y = 1; \\ x + 2y = -1. \end{array}\right.$$

По определению это уравнение задаёт две параллельные прямые.

? А что задаёт уравнение $x^2 - 4y^2 = 0$?

Это уравнение равносильно совокупности таких уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x + 2y = 0; \\ x - 2y = 0. \end{array}\right.$$

Значит, оно задаёт две пересекающиеся прямые.

Все рассмотренные уравнения – это уравнения второго порядка, которые мы намерены рассматривать в данной главе. Так что мы понимаем, что некоторые из них задают совокупности прямых. А что кроме этого?

Прежде, чем отвечать на этот вопрос, поговорим ещё об одном способе задания линий.

Физиков предложенный Декартом подход не очень устраивает. Для них линия – это траектория движения точки. Иными словами, линия задаётся системой уравнений $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где t – это параметр (например, время). Такой способ задания линии называется ***параметрическим***.

Переход от задания линии уравнением $f(x, y) = 0$ к параметрическому способу называется ***параметризацией***, обратный переход называется ***исключением параметра***.

Рассмотрим пример.

? Какую линию задаёт уравнение $x^2 + y^2 = 1$?

Окружность.

Но мы уже обсуждали, что в этом случае можно считать $x = \cos t$, $y = \sin t$, т.е. система $\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t \end{cases}$ – параметрическое задание окружности.

Впрочем, система $\begin{cases} x = \cos(2t); \\ y = \sin(2t) \end{cases}$ – это тоже параметрическое задание той же окружности.

? В чём разница с физической точки зрения?

А можно и так параметризовать ту же окружность:

$$\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \cos t. \end{cases}$$

Как мы видим, параметризация может быть осуществлена весьма разнообразно.

? Какую линию, на ваш взгляд, задаёт система

$$\begin{cases} x = \sin(t); \\ y = \cos(2t). \end{cases} ?$$

$y = \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2x^2$.

? Ответ?

§ 1. Эллипс

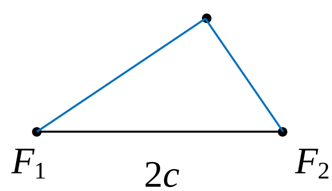
Р.И. Тышкевич, А.С. Феденко. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.

Пусть на плоскости выбраны две точки.

Определение 1. Множество точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости постоянна, называется ***эллипсом***. Фиксированные точки плоскости называются ***фокусами*** эллипса.

Договоримся фокусы эллипса обозначать F_1 и F_2, расстояние между ними $2c$, а сумму расстояний от точек эллипса до фокусов как $2a$. Почему не просто a и c и где «спряталась» буква b, станет ясно чуть позже.

А пока поймем, как соотносятся между собой a и c.



Неравенство треугольника говорит нам, что $a > c$.

? А что будет, если точки F_1 и F_2 совпадают?

Понятно, что в этом случае получится окружность радиуса a, а $c = 0$. Так что окружность – это частный случай эллипса. Число a всегда положительно, а c неотрицательно.

Из определения эллипса вытекает следующий способ его построения: если концы нерастяжимой нити длины $2a$ закрепить в точках F_1 и F_2 и натянуть нить острием карандаша, то при движении острия будет вычерчиваться эллипс с фокусами F_1, F_2 и с суммой расстояний произвольной точки эллипса от фокусов, равной $2a$ (рис. 56).

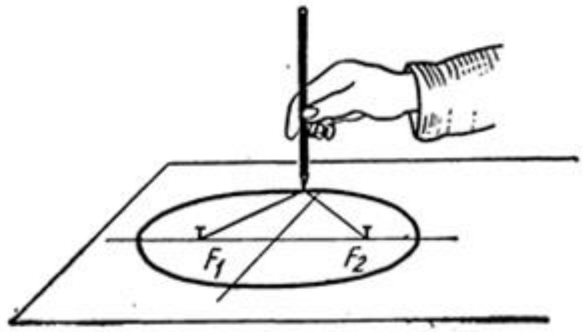


Рис. 56

Составим уравнение эллипса. Для этого выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокусы F_1 и F_2 и имела положительное направление от F_1 к F_2, начало координат возьмем в середине отрезка F_1F_2. Тогда $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Тогда

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (2)$$

По определению эллипса

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a. \qquad (3)$$

Подставляя сюда значения $|F_1M|$ и $|F_2M|$ из формул (2), получаем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \qquad (4)$$

Преобразуем уравнение (4). Перенесем второй радикал левой части уравнения в правую часть и возведем обе части полученного уравнения в квадрат; после приведения подобных членов получим

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и приводя подобные члены, найдем:

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1. \qquad (5)$$

Введем в рассмотрение новую величину

$$b = \sqrt{a^2-c^2};$$

В силу неравенства $a > c$ она вещественна. Тогда

$$b^2=a^2-c^2, \tag{6}$$

и уравнение (5) примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{7}$$

Преобразуем уравнение (4). Перенесем второй радикал левой части уравнения в правую часть и возведем обе части полученного уравнения в квадрат; после приведения подобных членов получим

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и приводя подобные члены, найдем:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение новую величину

$$b=\sqrt{a^2-c^2};$$

в силу неравенства (1) она вещественна. Тогда

$$b^2=a^2-c^2, \tag{6}$$

и уравнение (5) примет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{7}$$

Мы показали, что любая точка эллипса удовлетворяет уравнению (7). Покажем теперь обратное: любая точка $M(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (7), принадлежит эллипсу, т. е. удовлетворяет соотношению (3). Из уравнения (7) получаем

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Используя это соотношение и равенство (6), находим

$$|F_1M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-x^2\frac{b^2}{a^2}}=$$

$$=\sqrt{x^2\frac{c^2}{a^2}+2cx+a^2}=\sqrt{\left(x\frac{c}{a}+a\right)^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right|..$$

Так как в силу равенства (7) $|x|\leqslant a$ и, кроме того, $a>c$, то

$$|F_1M|=a+\frac{c}{a}x. \tag{8}$$

Аналогично можно получить формулу

$$|F_2M|=a-\frac{c}{a}x. \tag{9}$$

Складывая последние два равенства, получаем равенство (3).

Итак, *соотношение (7) является уравнением эллипса.* Оно называется *каноническим уравнением эллипса.*

Векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ называются ***фокальными радиус-векторами*** точки M.

Исходя из уравнения (7), исследуем форму эллипса. Координаты точек эллипса ограничены неравенствами $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant b$. Это означает, что эллипс есть ограниченная фигура, не выходящая за пределы прямоугольника, изображенного на рис. 57.

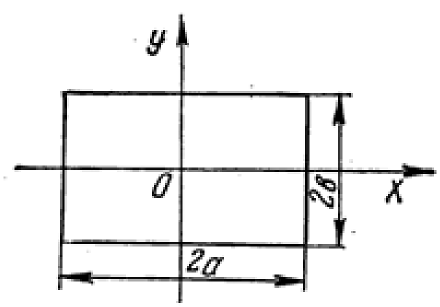


Рис. 57

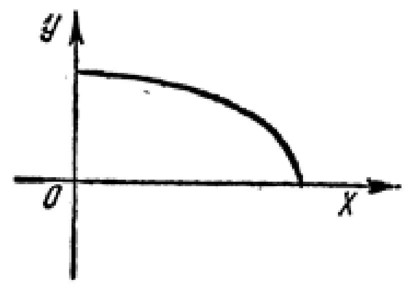


Рис. 58

Далее заметим, что в уравнение (7) входят только четные степени координат. Поэтому эллипс наряду с каждой точкой (x, y) содержит также точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$. А это означает, что эллипс есть фигура, симметричная относительно осей Ox и Oy и начала координат. Поэтому для исследования формы эллипса достаточно рассмотреть его в первой координатной четверти, в остальных четвертях его строение определяется по симметрии. Для первой четверти из уравнения (7) получаем

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{10}$$

При увеличении аргумента x от 0 до a функция y монотонно убывает от b до 0. График функции (10) изображён на рис. 58. Достроив остальные три четверти эллипса по симметрии, получим весь эллипс (рис. 59.).

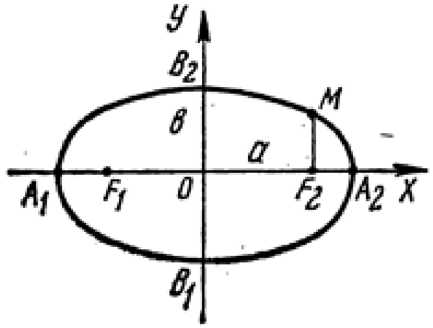


Рис. 59

Оси симметрии эллипса (оси Ox и Oy) называют просто его *осями*, а центр его симметрии (точку O) — *центром эллипса.*

Точки A_1, A_2, B_1 и B_2 пересечения эллипса с его осями называют *вершинами эллипса. Полуосями* эллипса называют отрезки OA_1 и OB_1, а также их длины a и b. При наших предположениях, когда фокусы эллипса расположены на оси Ox, из соотношения (6) следует $a > b$. В этом случае a называется *большой полуосью,*

а b — *малой.* Однако уравнение (7) можно рассматривать и при условии $a < b$, это будет уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Oy и большая полуось равна b. Наконец, рассмотрим уравнение (7) при $a = b$. Тогда его можно переписать в виде

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Это уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат. Впредь мы будем рассматривать окружность как эллипс с равными полуосями, фокусы в этом случае совпадают с центром окружности.

Эксцентриситетом эллипса называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{11}$$

Так как $c < a$, то $\varepsilon < 1$. У окружности оба фокуса совпадают, поэтому $c = 0$ и $\varepsilon = 0$.

Перепишем равенство (11) в виде

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Отсюда видно, что эксцентриситет ε характеризует форму эллипса: чем ближе ε к нулю, тем больше эллипс похож на окружность; при увеличении ε эллипс становится более вытянутым. На рис. 60 изображены эллипсы с различными значениями ε.

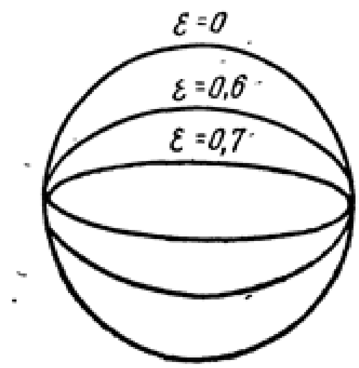


Рис. 60

Посмотрим ещё раз на формулы длин фокальных радиус векторов:

$$|F_1M| = a + \frac{c}{a}x \text{ и } |F_2M| = a - \frac{c}{a}x.$$

Теперь их можно переписать так:

$$|F_1M| = a + \varepsilon x \text{ и } |F_2M| = a - \varepsilon x.$$

Построим ещё параметрическое задание эллипса. Ясно, что точка, имеющая координаты `$x = a\cos t$, $y = b\sin t$, удовлетворяет уравнению эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Обратно, если точка с координатами (x, y) удовлетворяет уравнению, то $\frac{x}{a} = \cos t$, а $\frac{y}{b} = \sin t$. Значит, эллипс параметрически может быть задан системой $\begin{cases} x = a\cos t\,; \\ y = b\sin t. \end{cases}$

Наконец, вычислим ещё площадь эллипса.

? Чему равен $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$?

Геометрически это площадь четверти круга радиуса a с центром в начале координат, т.е. $\frac{\pi a^2}{4}$.

? Чему равен $\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx$?

$\frac{b}{a}\,\frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi ab}{4}$.

Значит, площадь эллипса равна πab.

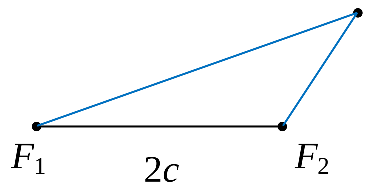
§ 2. Гипербола

Пусть на плоскости выбраны две точки.

Определение 1. Множество точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости постоянна, называется ***гиперболой***. Фиксированные точки плоскости называются ***фокусами*** гиперболы.

Договоримся фокусы гиперболы обозначать F_1 и F_2, расстояние между ними $2c$, а абсолютную величину разности расстояний от точек гиперболы до фокусов как $2a$. Почему не просто a и c и где «спряталась» буква b, станет ясно чуть позже.

А пока поймем, как соотносятся между собой a и c.



Неравенство треугольника говорит нам, что $a < c$.

? А что будет, если $a = 0$ при несовпадающих точках F_1 и F_2?

Получается серединный перпендикуляр к отрезку F_1F_2. Однако не принято считать прямую частным случаем гиперболы. Поэтому у нас всегда $c > a > 0$.

Составим уравнение гиперболы. Для этого выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокусы F_1, F_2 и имела положительное направление от F_1 к F_2; начало координат O возьмем в середине отрезка F_1F_2. Тогда $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$. Пусть $M(x,\ y)$ — произвольная точка гиперболы. По определению гиперболы

$$||F_1M|-|F_2M||=2a$$

или

$$|F_1M|-|F_2M|=\pm 2a. \qquad (2)$$

Вставляя в (2) выражения

$$|F_1M|=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad \text{и} \quad |F_2M|=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

получим

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \qquad (3)$$

Преобразуем это равенство, перенося второй радикал в правую часть и возводя её в квадрат.

$(x + c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2;$

$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2};$

Сократим на 4 обе части равенства и ещё раз возведём в квадрат:

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2((x - c)^2 + y^2).$$

! Раскройте скобки и приведите подобные члены.

Если всё сделано правильно, должно получиться

$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,(c^2 - a^2)$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \qquad (4)$$

Введем в рассмотрение новую величину

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

В силу неравенств (1) она вещественна. Тогда

$$b^2 = c^2 - a^2 \qquad (5)$$

и уравнение (4) принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (6)$$

Таким образом, координаты каждой точки гиперболы удовлетворяют этому уравнению.

Покажем обратное. Пусть координаты точки $M(x;\ y)$ удовлетворяют уравнению (6). Тогда

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right).$$

Используя это соотношение и равенство (5), найдем

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \left|\frac{c}{a}x + a\right|. \qquad (7)$$

Аналогично можно получить

$$|F_2M| = \left|\frac{c}{a}x - a\right|. \tag{8}$$

Из $y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \geq 0$ следует, что $|x| \geq a$. Кроме того, $c > a$, поэтому для $x \geq a$ имеем $\frac{c}{a}x + a > 0$ и $\frac{c}{a}x - a > 0$. Значит, $|F_1M| = \frac{c}{a}x + a$ и $|F_2M| = \frac{c}{a}x - a$, причём $|F_1M| > |F_2M|$. Следовательно, $||F_1M| - |F_2M|| = |F_1M| - |F_2M| = 2a$.

Пусть теперь $x \leq -a$. Тогда $\frac{c}{a}x + a \leq -c + a < 0$ и $\frac{c}{a}x - a \leq -c - a < 0$. Поэтому $|F_1M| = -\frac{c}{a}x - a$, $|F_2M| = -\frac{c}{a}x + a$. Следовательно, $||F_1M| - |F_2M|| = |-2a| = 2a$.

Итак, уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ является уравнением гиперболы. Оно называется ***каноническим уравнением гиперболы***.

Исходя из уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, исследуем форму гиперболы. Ещё раз отметим, что $|x| \geq a$. Это означает, гипербола располагается вне полосы, ограниченной вертикальными прямыми $x = a$ и $x = -a$ и состоит из двух линий: одна полностью располагается в полуплоскости $x \geq a$, другая – в полуплоскости $x \leq -a$.

Как и в случае эллипса, пременные x и y входят в уравнение в чётной степени, поэтому гипербола симметрична относительно каждой из координатных осей и начала координат. Тем самым, достаточно изучить поведение гиперболы в первой координатной четверти, а для остальных распространить из соображений симметрии. В первой координатной четверти зависимость переменной y от x выражается формулой

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geqslant a.$$

Эта функция имеет наклонную асимптоту. Для данной функции угловой коэффициент k наклонной асимптоты вычисляется по формуле

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$$

! Найдите значение этого предела.

Получаем $k = \frac{b}{a}$.

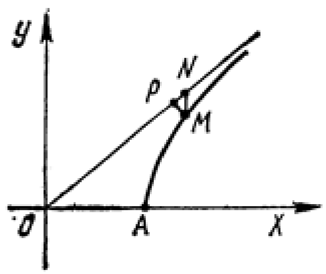
Отрезок, отсекаемый асимптотой на оси ординат, вычисляется по формуле

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right)$$

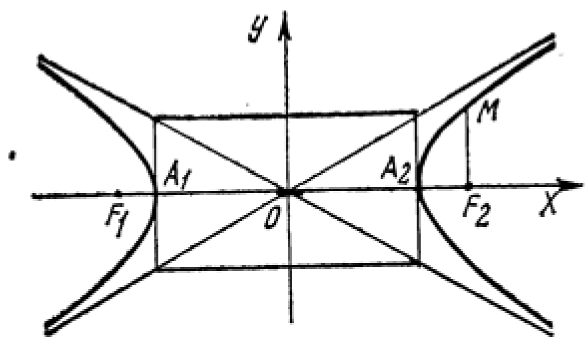
! Найдите значение этого предела.

Этот предел равен 0. Следовательно, в первом квадранте гипербола имеет асимптоту $y = \frac{b}{a}x$.

Вот как выглядит гипербола и её асимптота в первом квадранте:

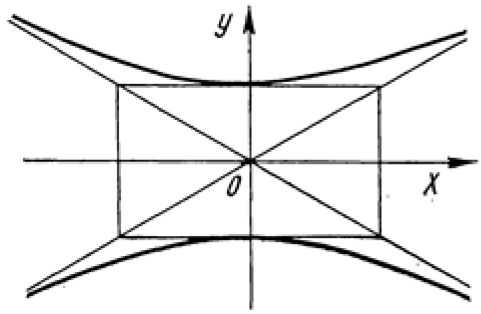


Продолжая по симметрии, получим общий вид гиперболы:



Значит, у гиперболы две асимптоты: $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$. Они являются диагоналями прямоугольника с центром в начале координат и сторонами $2a$ и $2b$, параллельными осям координат. Его называют ***основным прямоугольником гиперболы*** и построение гиперболы начинают с построения этого прямоугольника. Ось симметрии, проходящую через фокусы гиперболы, называют ***вещественной*** осью, а вторую – ***мнимой***; центр симметрии называют ***центром гиперболы***. Точки пересечения гиперболы с вещественной осью (на рисунке это точки A_1 и A_2) называют ***вершинами гиперболы***. Расстояние от начала координат до вершины (т.е. a) называют ***действительной полуосью***, в этом случае b называют ***мнимой полуосью***. Если $a = b$, то гиперболу называют ***равносторонней***, или ***равнобочной***.

Наряду с уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ естественно рассматривать уравнение $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Нетрудно понять, что оно тоже задаёт гиперболу, только теперь её фокусы располагаются на оси ординат, b является действительной полуосью, а a – мнимой.



Эти гиперболы называются ***сопряжёнными*** друг к другу. У них общий основной прямоугольник и общие асимптоты.

! Объясните почему.

Эксцентриситетом гиперболы называется число

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Для любой гиперболы $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет характеризует форму основного прямоугольника и, следовательно, форму самой гиперболы: чем меньше ε, тем больше вытягивается основной прямоугольник, а вслед за ним и сама гипербола вдоль вещественной оси. На рис 65 изображены гиперболы с различными значениями ε.

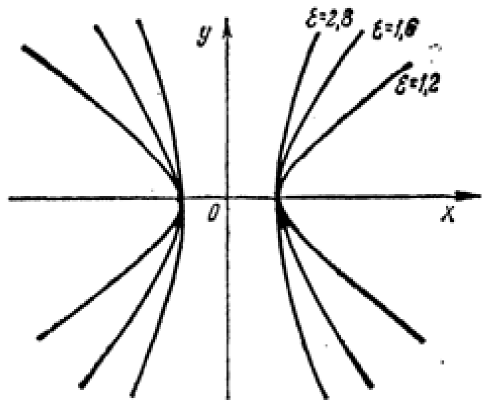


Рис. 65

Посмотрим ещё раз на формулы длин фокальных радиус векторов:

$$|F_1M| = |a + \frac{c}{a}x| \text{ и } |F_2M| = |a - \frac{c}{a}x|.$$

Теперь их можно переписать так:

$$|F_1M| = |a + \varepsilon x| \text{ и } |F_2M| = |a - \varepsilon x|.$$

Для дальнейших рассмотрений нам будет удобна запись именно с абсолютной величиной.

Построим ещё параметрическое задание гиперболы.

! Поверьте, что системы $\begin{cases} x = \frac{1}{2}a\,(t + \frac{1}{t}); \\ y = \frac{1}{2}b\,(t - \frac{1}{t}) \end{cases}$ и $\begin{cases} x = \frac{a}{\cos t}; \\ y = b\,\operatorname{tg} t \end{cases}$ являются параметрическими заданиями гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Для каждой из этих систем определите диапазон изменения параметра t, определяющий правую ветвь гиперболы.

Но мы рассмотрим ещё один вариант параметрического задания гиперболы.

Введём следующие функции:

$$\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \text{ и } \operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}).$$

Первая из них называется ***гиперболическим косинусом***, вторая – ***гиперболическим синусом***.

Гиперболический косинус функция четная, а гиперболический синус – нечётная. Но самое главное, что для них выполнено основное гиперболическое тождество:

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

! Проверьте.

Это означает, что точка с координатами $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$ лежит на гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

? Верно ли, что система $\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t; \\ y = b\operatorname{sh} t \end{cases}$ описывает все точки гиперболы?

Нет, потому что $\operatorname{ch} t \geq 0$ при любом t. Более того, $\operatorname{ch} t \geq 1$ при любом t.

! Объясните почему.

На самом деле, эта система описывает только правую ветвь гиперболы. Но иногда именно это и бывает нужно, потому что точка при непрерывном движении не может перескакивать с одной траектории на другую.

! Докажите, что система $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t; \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$ задаёт параметрически правую ветвь гиперболы. А какой системой параметрически задаётся левая ветвь?