Глава 11. Линии и поверхности второго порядка

§ 12. Классификация поверхностей, задаваемых уравнениями второго порядка

Определение 1. Уравнение вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов a_{ij} отличен от 0, называется ***уравнением второго порядка***.

Нас будет интересовать, какие поверхности задаёт это уравнение, если рассматривать его в какой-либо прямоугольной декартовой системе координат. Точнее это формулируют так: каков геометрический образ данного уравнения?

Целый ряд случаев мы уже наблюдали.

? Какие именно?

А ещё что-нибудь есть?

Понятно, что для ответа на этот вопрос надо поменять систему координат так, чтобы уравнение стало проще. И, конечно, мы хотим, чтобы новая система координат тоже была прямоугольной декартовой. Если мы не меняем начало координат, то такое преобразование касается только базисных векторов и для них оно будет ортогональным.

? А есть ещё какие-нибудь характеристики системы координат, кроме ортогональности и декартовости?

Система может быть правой, а может быть левой.

? Какая система называется правой?

Мы будем считать, что исходная система правая, и новую систему мы тоже хотим видеть правой, хотя это не принципиально.

? Как определить, что упорядоченная тройка векторов, заданных своими координатами в правой прямоугольной декартовой системе координат, является правой?

Надо составить матрицу из координат этих векторов и вычислить её определитель. Если он положителен, то тройка правая; если отрицателен, то левая.

? Если тройка оказалась левой, как из неё сделать правую?

Приведём квадратичную форму $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ к главным осям, причём так, чтобы новый ортонормированный базис был правой тройкой, и пусть $T_{\text{НС}}$ – матрица перехода от одного базиса к другому. Тогда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_{\text{НС}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

где x', y' и z' – новые переменные.

После подстановки у нас исчезнут произведения переменных, а остальные коэффициенты, кроме c, изменятся. Не выписывая для них формулы, обозначим их «штрихованными» буквами:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + 2b'_3z' + c = 0.$$

Это уравнение нашей линии в системе координат x', y', z'. Разберём возможные варианты.

1) $a'_{11} \neq 0$, $a'_{22} \neq 0$, $a'_{33} \neq 0$.

Тогда перепишем уравнение так:

$$a'_{11}(x' + \frac{b'_1}{a'_{11}})^2 + a'_{22}(y' + \frac{b'_2}{a'_{22}})^2 + a'_{33}(z' + \frac{b'_3}{a'_{33}})^2 + c - \frac{(b'_1)^2}{a'_{11}} - \frac{(b'_2)^2}{a'_{22}} - \frac{(b'_3)^2}{a'_{33}} = 0.$$

Сделаем ещё одну замену:

$x'' = x' + \dfrac{b'_1}{a'_{11}}$;

$y'' = y' + \dfrac{b'_2}{a'_{22}}$;

$z'' = z' + \dfrac{b'_3}{a'_{33}}$;

$c' = \dfrac{(b'_1)^2}{a'_{11}} + \dfrac{(b'_2)^2}{a'_{22}} + \dfrac{(b'_3)}{a'_{33}} - c.$

Она позволяет записать уравнение в виде

$$a'_{11}(x'')^2 + a'_{22}(y'')^2 + a'_{33}(z'')^2 = c'.$$

Такая замена переменных геометрически приводит к переносу начала координат в точку с координатами $(-\dfrac{b'_1}{a'_{11}}, -\dfrac{b'_2}{a'_{22}}, -\dfrac{(b'_3)}{a'_{33}})$.

1a) $c' \neq 0$.

Тогда перепишем уравнение так:

$$\frac{(x'')^2}{\frac{c'}{a'_{11}}} + \frac{(y'')^2}{\frac{c'}{a'_{22}}} + \frac{(z'')^2}{\frac{c'}{a'_{33}}} = 1.$$

Если все коэффициенты $\frac{c'}{a'_{11}}$, $\frac{c'}{a'_{22}}$ и $\frac{c'}{a'_{33}}$ положительны, то это эллипсоид.

Если все коэффициенты $\frac{c'}{a'_{11}}$, $\frac{c'}{a'_{22}}$ и $\frac{c'}{a'_{33}}$ отрицательны, то множество точек пустое. Его называют **мнимым эллипсоидом**.

Если коэффициенты разных знаков, то один из гиперболоидов.

? А именно когда какой?

1б) $c' = 0$.

Тогда уравнение имеет вид $a'_{11}(x'')^2 + a'_{22}(y'')^2 + a'_{33}(z'')^2 = 0$.

Если все коэффициенты a'_{11}, a'_{22} и a'_{33} одного знака, то есть только одна точка с координатами, удовлетворяющими этому уравнению – это точка (0; 0; 0). В этом случае геометрический образ уравнения – одна точка.

Если коэффициенты a'_{11}, a'_{22} и a'_{33} разных знаков, то получаем уравнение эллиптического конуса.

2) Ровно один из коэффициентов a'_{11}, a'_{22} или a'_{33} равен 0. Пусть для определённости $a'_{33} = 0$. Тогда уравнение примет вид

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + 2b'_3z' + c = 0.$$

И снова разбираем возможные случаи.

2а) $b'_3 \neq 0$.

Снова делаем замену:

$x'' = x' + \frac{b'_1}{a'_{11}}$;

$y'' = y' + \frac{b'_2}{a'_{22}}$;

$z'' = z' + \frac{c}{2b'_3} - \frac{(b'_1)^2}{2b'_3a'_{11}} - \frac{(b'_2)^2}{2b'_3a'_{22}}$.

Тогда $z'' = -\frac{a'_{11}}{2b'_3}x''^2 - \frac{a'_{22}}{2b'_3}y''^2$. Это, разумеется, один из параболоидов в системе координат x'', y'', z''. Если коэффициенты при x''^2 и y''^2 одного знака, то эллиптический параболоид, если разных – гиперболический.

2б) $b'_3 = 0$.

Уравнение имеет вид $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0$.

? Каков геометрический образ этого уравнения?

Это цилиндрическая поверхность, у которой направляющая в плоскости $x'Oy'$ задаётся уравнением $a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0$, а образующие параллельны оси Oz'.

? Какие цилиндрические поверхности здесь могут получиться?

– эллиптический цилиндр;
– прямая;
– ***мнимый эллиптический цилиндр***;
– гиперболический цилиндр;
– две пересекающиеся плоскости;

3) Два коэффициента при квадратах переменных равны 0. Пусть для определённости $a'_{22} = a'_{33} = 0$. Тогда уравнение имеет вид

$$a'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + 2b'_3z' + c = 0.$$

Что делать с x' понятно:

$$x'' = x' + \frac{b'_1}{a'_{11}}.$$

Как разобраться с y' и z', если хотя бы один из коэффициентов b'_2 или b'_3 отличен от 0? Пусть для определённости $b'_3 \neq 0$.

Сделаем поворот вокруг оси x':

$y' = y''\cos\alpha - z''\sin\alpha;$

$z' = y''\sin\alpha + z''\cos\alpha;$

Тогда

$$2b'_2y' + 2b'_3z' = 2b'_2(y''\cos\alpha - z''\sin\alpha) + 2b'_3(y''\sin\alpha + z''\cos\alpha) =$$
$$= 2(b'_2\cos\alpha + b'_3\sin\alpha)y'' - 2(b'_2\sin\alpha - b'_3\cos\alpha)z''.$$

Выберем угол α так, чтобы коэффициент при z'' был равен 0:

$$b'_2\sin\alpha - b'_3\cos\alpha = 0;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b'_2}{b'_3}.$$

Для этого угла α вычислим значение $b'_2\cos\alpha + b'_3\sin\alpha$ и обозначим его b''_2. Тогда наше уравнение запишется в виде

$$a'_{11}x''^2 + 2b''_2y'' + c' = 0,$$

где $c' = c - \dfrac{(b_1')^2}{a_{11}'}$.

3а) $b_2'' \neq 0$. Тогда это параболический цилиндр в системе координат x'', y'', z'' с направляющей в плоскости $x''Oy''$ и образующими, параллельными оси Oz''.

3б) $b_2'' = 0$. Уравнение принимает вид $a_{11}'x''^2 + c' = 0$ или $x''^2 = -\dfrac{c'}{a_{11}'}$. В зависимости от знака $-\dfrac{c'}{a_{11}'}$ получаем три случая:

– две параллельные плоскости ($-\dfrac{c'}{a_{11}'} > 0$);

– две совпадающие плоскости ($-\dfrac{c'}{a_{11}'} = 0$);

– ***две мнимы параллельные плоскости*** ($-\dfrac{c'}{a_{11}'} < 0$);

На этом разбор случаев заканчивается и, значит, мы получили полное описание геометрических образов уравнения второго порядка в трёхмерном пространстве.

Обратите внимание: у нас не возникло поверхности, которая называлась бы гиперболический конус или параболический конус. Почему? Ответ на этот вопрос вы можете получить уже сейчас сами, но он будет также следовать из рассмотрений следующего параграфа.

Наконец, мы рассмотрим ещё один вопрос и в более общей постановке, чем трёхмерное пространство.

Определение 2. Геометрический образ уравнения

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$$

в n-мерном евклидовом пространстве называется ***n-мерным эллипсоидом***. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются ***полуосями*** n-мерного эллипсоида.

Определение 3. n-мерной эллипсоид, у которого все полуоси равны, называется ***n-мерной сферой***, а любая из полуосей называется её ***радиусом***.

При $n = 2$ эти определения дают обычные эллипс и окружность, а при $n = 3$ обычные эллипсоид и сферу.

Если рассматривать $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как координаты вектора x в n-мерном евклидовом пространстве, то ясно, что сфера радиуса R – это множество векторов, длина которых равна R. Сферу радиуса 1 обычно называют ***единичной***.

Как и в случае трёхмерного пространства n-мерным эллипсоидом называют и тело, ограниченное данной поверхностью, т.е. множество векторов, координаты которых удовлетворяют неравенству $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} \leq 1$. Аналогично ***n*-*мерным шаром радиуса R*** называют множество векторов, координаты которых удовлетворяют неравенству $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2$. Шар радиуса 1 обычно называют ***единичным***.

Теорема. Пусть L_1 и L_2 – евклидовы пространства, f – линейное отображение L_1 в L_2. Тогда образ единичного n-мерной шара из пространства L_1 при отображении f является r-мерным эллипсоидом в пространстве $\mathrm{Im}\, f$, где r – ранг отображения f, а его полуоси – сингулярные числа отображения f.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис пространства L_1, в котором рассматривается неравенство, определяющее единичный шар, т.е. множество векторов, длина которых не больше 1. Перейдём к ортонормированному базису $u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots, u_n$, в котором f имеет сингулярное разложение. Если $T_{\text{СН}}$ – матрица перехода, связывающая базисы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $u_1, u_2, \ldots, u_r, \ldots, u_n$, то координаты $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ любого вектора данного шара преобразуются в координаты $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = T_{\text{СН}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$. Поскольку матрица $T_{\text{СН}}$ ортогональна, длина вектора $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ совпадает с длиной вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$. Значит, имеет место неравенство $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \leq 1$. Разумеется, геометрически это тоже самый шар, только записанный в другой системе координат.

Как известно, векторы $v_i = \frac{1}{\sigma_i} f(u_i)$, где $1 \leq i \leq r$, образуют ортонормированный базис образа $\mathrm{Im}\, f$. А в целом в соответствующих сингулярному разложению ортонормированных базисах пространств L_1 и L_2 имеем

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_r \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1\ 0\ 0 \dots 0\ 0 \dots 0 \\ 0\ \sigma_2\ 0 \dots 0\ 0 \dots 0 \\ 0\ 0\ \sigma_3 \dots 0\ 0 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0\ 0\ 0 \dots\ \sigma_r\ 0 \dots 0 \\ 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 0\ 0\ 0 \dots 0\ 0 \dots 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Значит, $z_i = \sigma_i y_i$ при $1 \le i \le r$. Поэтому

$$\frac{z_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{z_2^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{z_r^2}{\sigma_r^2} = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_r^2 \le 1 \le y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \le 1.$$

Ясно при этом, что равенство достигается на образах r векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, …, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, так что именно эллипсоид, а не его внутренность.

§ 13. Сечение поверхностей, задаваемых уравнениями второго порядка, плоскостью

Теорема 1. Сечение поверхности, заданной уравнением второго порядка, произвольной плоскостью является одной из линий второго порядка.

Доказательство. Пусть поверхность задана уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0,$$

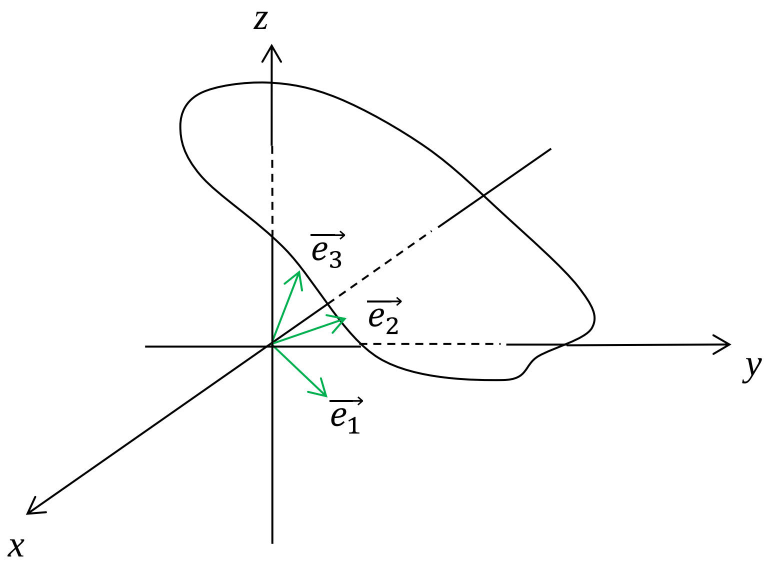
а плоскость – уравнением

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Сечение задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Выберем ортонормированный базис $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ данной плоскости и дополним его до правого ортонормированного базиса пространства вектором $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1} \times \overrightarrow{e_2}$. Пусть



Пусть $T_{\text{НС}}$ – матрица перехода от исходного базиса к базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_{\text{НС}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

Первое уравнение системы после замены переменных останется уравнением второго порядка, но с изменившимися коэффициентами. А второе уравнение примет вид $z' = h$, поскольку взятая нами плоскость параллельна координатной плоскости, проходящей через векторы $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$. Значит, система уравнений примет вид

$$\begin{cases} a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' + 2b'_1x' + 2b'_2y' + 2b'_3z' + c = 0 \\ z' = h \end{cases}$$

Она задаёт рассматриваемое нами сечение в системе координат $Ox'y'z'$. Преобразуем эту систему в равносильную, подставив h вместо z' в первое уравнение:

$$\begin{cases} a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2(a'_{13}h + b'_1)x' + 2(a'_{23}h + b'_2)y' + a'_{33}h^2 + 2b'_3h + c = 0 \\ z' = h \end{cases}$$

Первое уравнение задаёт цилиндрическую поверхность с направляющей, расположенной в плоскости $Ox'y'$, и образующими, параллельными оси Oz'. Значит, и в сечении будет та же линия, что и основании цилиндрической поверхности. А значит, это одна из линий, задаваемых на плоскости уравнением второго порядка. □

Следствие 1. Непустым сечением эллипсоида плоскостью может быть только эллипс или точка.

Доказательство. Поскольку эллипсоид ограниченная поверхность, его сечение является ограниченным множеством. Среди таковых те, которые заданы уравнением второго порядка, – это только эллипс и точка. □

Теорема 2. Проекция сечения на координатную плоскость поверхности, заданной уравнением второго порядка, произвольной плоскостью, не перпендикулярной этой координатной плоскости является одной из линий второго порядка.

Доказательство. Пусть поверхность задана уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0,$$

а плоскость – уравнением

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Пусть рассматривается проекция сечения на плоскость Oxy. Тогда по условию $c \neq 0$.

Сечение задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Выразим переменную z из второго уравнения и подставим в первое уравнение. Ясно, что мы получим систему уравнений, равносильную исходной. Поэтому геометрический образ у них один и тот же. Понятно, что коэффициенты при переменных x и y изменятся, мы обозначим их «штрихованными» символами. Система запишется так:

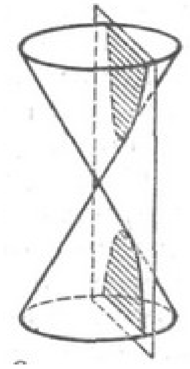
$$\begin{cases} a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{12}xy + 2b'_1x + 2b'_2y + c' = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}.$$

Первое уравнение этой системы определяет цилиндрическую поверхность с направляющей, заданной этим же уравнением в плоскости Oxy, и направляющими, параллельными оси аппликат. Значит, геометрический образ этого уравнения в плоскости Oxy и есть требуемая проекция. □

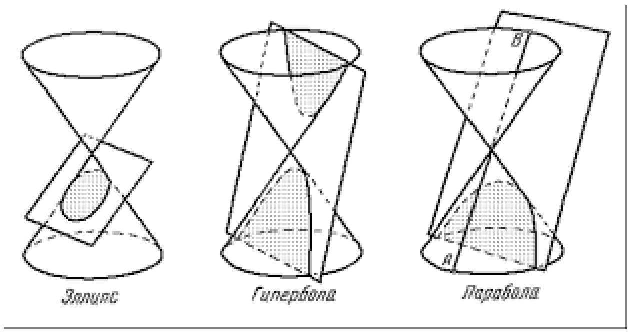
Следствие 2. Сечением эллиптического конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, является эллипс или гипербола, или парабола.

Доказательство. Для удобства и краткости формулировок будем считать, что у нас есть система координат, вершина конуса совпадает с началом координат, а его ось совпадает с осью аппликат. Координатная плоскость Oxy является плоскостью симметрии и делит пространство на два полупространства, в каждом из которых целиком лежит одна из частей конической поверхности, расположенной по дону строну от вершины.

Если плоскость сечения параллельна оси аппликат, то она пересекает коническую поверхность по линии, состоящей из двух отдельных ветвей. Из линий второго порядка (а по теореме 1 это линия второго порядка) это может быть только гипербола.



Пусть теперь плоскость сечения не параллельна оси аппликат. Возможны три случая: плоскость сечения пересекает все образующие конической поверхности в пределах одного полупространства, плоскость сечения пресекает не все образующие, но все точки пересечения лежат в одном полупространстве, плоскость сечения пересекает хотя бы две образующие и точки пересечения лежат в разных полупространствах. Ясно при этом, что с каждой образующей сечение может не более одной общей точки.



Первый случай: плоскость сечения пересекает все образующие конической поверхности в пределах одного полупространства. Пусть это будет нижнее полупространство. Спроецируем сечение и все образующие нижней части конуса на плоскость Oxy. Образующие станут лучами, выходящими из начала координат, а образующая линией второго порядка. Единственной линией второго порядка, пересекающей все лучи, прием ровно один раз, является эллипс. Значит, и в сечении у нас ограниченная линия второго порядка, т.е. эллипс.

Второй случай. Ясно, что эта линия не ограничена, иначе она была бы ограниченной в проекции, т.е. была бы эллипсом, содержащим начало координат, а тогда сечение пересекает все образующие. Поскольку она лежит в одном полупространстве, у неё не может быть двух ветвей, так что парабола.

Третий случай. Плоскость *Oxy* разделяет сечение на две не связанные между собой части. Значит, это гипербола. □

Ясно, что получить все эти линии можно, пересекая не произвольный эллиптический конус, а прямой круговой. Поэтому эллипс, гиперболу и параболу называют ***коническими сечениями***.