Глава 11. Линии и поверхности второго порядка

§ 11. Параболоиды

С параболоидом вращения вы уже знакомы.

? Как выглядит уравнение параболоида вращения?

Определение 1. ***Эллиптическим параболоидом*** называется геометрический образ уравнения $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$, где p и q положительны.

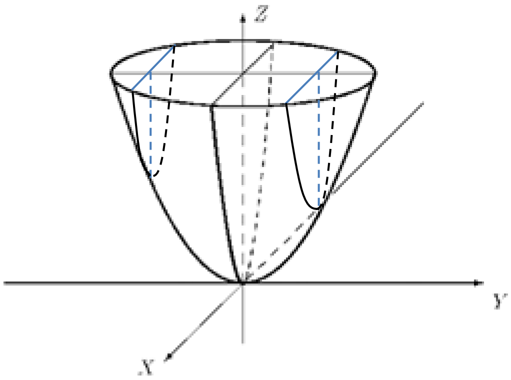
Очевидно, что эллиптический параболоид расположен в верхнем координатном полупространстве и с координатной плоскостью имеет одну общую точку – начало координат. Она называется ***вершиной*** эллиптического параболоида. Ясно также, что ось аппликат является осью симметрии, и её называют ***осью*** эллиптического параболоида. Координатные плоскости, проходящие через ось аппликат, являются плоскостями симметрии эллиптического параболоида.

Сечения эллиптического параболоида плоскостями $z = h > 0$ являются эллипсами с полуосями $\sqrt{2ph}$ и $\sqrt{2qh}$.

! Докажите это.

Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Оно задаётся системой

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}. \\ y = h \end{cases}$$



Как обычно, сделаем замену и получим в качестве первого уравнения системы уравнение цилиндрической поверхности:

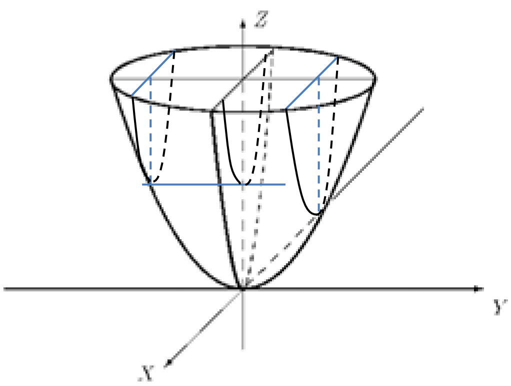
$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{h^2}{2q}. \\ y = h \end{cases}$$

? Каков геометрический образ первого уравнения системы?

Это параболический цилиндр, у которого направляющая – это парабола, лежащий в плоскости xOz и заданная в ней уравнением $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{h^2}{2q}$, а образующие параллельны оси абсцисс. Мы пересекаем эту поверхность плоскостью $y = h$, которая параллельна плоскости xOz, и потому в сечении получаем такую же параболу, как и направляющая этой цилиндрической поверхности.

Обратите внимание, что геометрически это одна и та же парабола, только поднятая вдоль оси Oz на высоту $\dfrac{h^2}{2q}$.

А где лежит вершина этой параболы? Ясно, что она получается, когда $x = 0$.



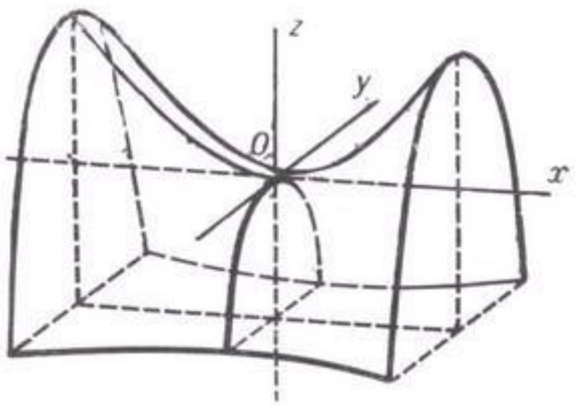
То есть координаты вершины параболы, получающейся в сечении плоскостью $y = h$, таковы: $(0; h; \dfrac{h^2}{2q})$. Заметим, что эта точка лежит на параболе $z = \dfrac{y^2}{2q}$, которая получается, когда мы эллиптический параболоид пересекаем плоскостью $x = 0$.

Можно себе представить, что у нас есть неподвижная парабола $z = \dfrac{y^2}{2q}$, по которой перемешается параллельно самой себе парабола $z = \dfrac{x^2}{2p}$.

Тем самым, получаем такую теорему:

Теорема 1. Эллиптический параболоид – это поверхность, которая получается при перемещении одной параболы по другой так, что их плоскости перпендикулярны, ветви находятся в одном полупространстве и вершина подвижной параболы лежит на неподвижной.

А что если вместо того, чтобы направлять ветви парабол в одну сторону, будем направлять их в разные стороны. Грубо говоря, вешать подвижную параболу на неподвижную.



Неподвижная парабола (в плоскости $y = 0$) задаётся уравнением $z = \frac{x^2}{2p}$. А подвижная парабола (в плоскости $x = 0$) задаётся уравнением $z = -\frac{y^2}{2q}$.

? Как, по вашему мнению, будет выглядеть уравнение такой поверхности?

Но мы пойдем стандартным путём.

Определение 2. ***Гиперболическим параболоидом*** называется геометрический образ уравнения $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$, где p и q положительны.

! Докажите, что все сечения гиперболического параболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости *xOz*, являются одинаковыми параболами. Докажите аналогичное утверждение про сечения гиперболического параболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости *yOz*.

После этого мы фактически имеем такую теорему.

Теорема 2. Гиперболический параболоид – это поверхность, которая получается при перемещении одной параболы по другой так, что их плоскости перпендикулярны, ветви направлены противоположно и вершина подвижной параболы лежит на неподвижной.

Теперь посмотрим на сечения гиперболического параболоида плоскостью $z = h$.

Сечение задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q}. \\ z = h \end{cases}$$

Подстановкой превратим первое уравнение в уравнение цилиндрической поверхности:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = h \\ z = h \end{cases}.$$

Пусть $h > 0$. Тогда первое уравнение – это уравнение гиперболического цилиндра, и в его сечении плоскостью $z = h$ получаем гиперболу с действительной полуосью $\sqrt{2ph}$ и мнимой $\sqrt{2qh}$. Они все подобны между собой.

Пусть $h < 0$. Тогда первое уравнение – это уравнение гиперболического цилиндра, и в его сечении плоскостью $z = h$ получаем гиперболу с действительной полуосью $\sqrt{2p(-h)}$ и мнимой $\sqrt{2q(-h)}$. Они все подобны между собой и сопряжены с соответствующими гиперболами сечений при $h > 0$.

Наконец, пусть $h = 0$. Легко понять, что в этом случае получаются две пересекающиеся прямые. Впрочем, в любой точка гиперболического параболоида можно так провести плоскость, что она пересечёт его по двум пересекающимся прямым. Эти прямые называются ***прямолинейными образующими*** гиперболического параболоида.