Глава 9. Линейные отображения пространств со скалярным произведением

Наличие в пространстве скалярного произведения обеспечивает возможность измерений. А измерения играют, конечно, важнейшую роль в любой деятельности человека, поэтому и математический аппарат, применяемый людьми для решения тех или иных задач, должен иметь в своём арсенале такой инструмент. Как сказывается наличие скалярного произведения на теорию линейных отображений? Какие дополнительные возможности появляются? Об этом и пойдёт речь в этой главе.

§ 1. Сопряжённое отображение

Пусть L_1 и L_2 – пространства со скалярным произведением, разумеется, над одним и тем же полем (т.е. либо оба они евклидовы, либо оба унитарны). Мы будем одинаково круглыми скобками обозначать скалярное произведение в одном и другом пространстве, понимая, что в каждом из них оно своё. Пока без ограничений конечномерности.

Определение 1. Пусть f – всюду определённая функция из L_1 в L_2, а g – всюду определённая функция из L_2 в L_1 (не обязательно линейные!). Будем говорить, что эти функции ***сопряжены***, если $\forall x \in L_1\ \forall y \in L_2\ (f(x), y) = (x, g(y))$.

! Разберитесь, в каком пространстве вычисляется левая часть равенства и в каком правая.

Теорема 1. Если для функции f существует сопряженная функция g, то только одна.

Доказательство. Допустим, что g_1 и g_2 – функции, сопряженные с f. Тогда

$$\forall x \in L_1\ \forall y \in L_2\ (f(x), y) = (x, g_1(y)) = (x, g_2(y)).$$

Следовательно,

$$\forall x \in L_1\ \forall y \in L_2\ 0 = (x, g_1(y)) - (x, g_2(y)) = (x, (g_1(y) - g_2(y))$$

и, значит, $\forall y \in L_2\ g_1(y) - g_2(y) = 0$, т.е. $\forall y \in L_2\ g_1(y) = g_2(y)$, что и означает $g_1 = g_2$. □

Эта теорема позволяет нам обозначать функцию, сопряженную к f, если таковая существует, обозначать f^*.

? Какие вы думаете, для любой ли функции есть сопряженная?

Теорема 2. Сопряженная функция, если она существует, линейна.

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in L_2$. Тогда

$$\forall x \in L_1\ (x, f^*(y_1 + y_2)) = (f(x), y_1 + y_2) = (f(x), y_1) + (f(x), y_2) =$$
$$= (x, f^*(y_1)) + (x, f^*(y_2)) = (x, f^*(y_1) + f^*(y_2)),$$

откуда получаем

$$\forall x \in L_1\ (x, f^*(y_1 + y_2) - (f^*(y_1) + f^*(y_2))) = 0.$$

Следовательно, $f^*(y_1 + y_2) = f^*(y_1) + f^*(y_2)$. □

! Свойство умножения на элемент поля проверьте самостоятельно.

Ясно, что и для функции f^* можно рассматривать к ней сопряженную $(f^*)^*$. Мы будем обозначать её просто f^{**}.

Теорема 3. Если для функции f существует сопряженная функция f^*, то существует f^{**} и $f^{**} = f$.

Доказательство. По определению достаточно проверить, что $\forall y \in L_2$ $\forall x \in L_1$ $(f^*(y), x) = (y, f(x))$. Но $(y, f(x)) = \overline{(f(x), y)} = \overline{(y, f^*(x))} = (f^*(y), x)$. □

Следствие 1. Если для функции f существует сопряженная функция, то f линейна.

! Объясните, почему.

Утверждение, обратное к следствию 1, мы докажем только в случае конечномерных пространств L_1 и L_2. Напомним, что если в пространстве выбран ортонормированный базис, то $(x, y) = [x]^t\overline{[y]}$.

Теорема 4. Если f – линейное отображение конечномерного линейного пространства L_1 со скалярным произведением в конечномерное линейное пространства L_2 со скалярным произведением, то для f существует сопряженное отображение.

Доказательство. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – ортонормированный базис пространства L_1, а $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – ортонормированный базис пространства L_2. Тогда $(f(x), y) = ([f][x])^t\overline{[y]} = [x]^t[f]^t\overline{[y]} = [x]^t\overline{\overline{[f]^t}[y]}$. Рассмотрим линейное отображение g из L_2 в L_1, заданное в базисе $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матрицей $\overline{[f]^t}$. Записанная координатная формула скалярного произведения показывает, что $g = f^*$. □

Следствие 2. Пусть L_1 и L_2 – конечномерные пространства со скалярным произведением, f – линейное отображение L_1 в L_2. Тогда для матриц $[f]$ и $[f^*]$, записанных в ортонормированных базисах этих пространств выполняется соотношение $[f^*] = \overline{[f]}^t$.

В случае евклидова пространства формул будет ещё проще: $[f^*] = [f]^t$.

Свойства сопряжения.

Для любых линейных отображений f: $L_1 \to L_2$, g: $L_1 \to L_2$ и h: $L_2 \to L_3$ конечномерных пространств L_1, L_2, L_3 выполняются равенства

$(f + g)^* = f^* + g^*$;

$(\alpha f)^* = \bar{\alpha} f^*$;

$(fh)^* = h^*f^*$.

! Докажите самостоятельно.

§ 2. Изометрические отображения

Пусть L_1 и L_2 – конечномерные пространства со скалярным произведением.

Определение 1. Линейное отображение f: $L_1 \to L_2$ называется изометрическим, если $\forall x, y \in L_1$ $(f(x), f(y)) = (x, y)$.

Теорема 1. Линейное отображение f: $L_1 \to L_2$ изометрично тогда и только тогда, когда $\forall x \in L_1$ $|f(x)| = |x|$.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно.

Обратно. Пусть $\forall x \in L_1$ $|f(x)| = |x|$. Это равносильно тому, что $\forall x \in L_1$ $(f(x), f(x)) = (x, x)$. Подставим вместо элемента x элемент $x + y$. Получим

$$\forall x, y \in L_1\ (f(x + y), f(x + y)) = (x + y, x + y).$$

Раскроем скобки, воспользовавшись линейностью отображения:

$$(f(x + y), f(x + y)) = (f(x), f(x)) + (f(x), f(y)) + (f(y), f(x)) + (f(y), f(y));$$
$$(x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y).$$

Учитывая $|f(x)| = |x|$ и $|f(y)| = |y|$, получаем:

$$\forall x, y \in L_1\ (f(x), f(y)) + (f(y), f(x)) = (x, y) + (y, x).$$

Если пространство евклидово, то сразу получаем $\forall x, y \in L_1$ $(f(x), f(y)) = (x, y)$.

Если пространство унитарное, то подставим вместо вектора x вектор ix:

$$\forall x, y \in L_1\ (f(ix), f(y)) + (f(y), f(ix)) = (ix, y) + (y, ix).$$

Получаем:

$$\forall x, y \in L_1\ i(f(x), f(y)) - i(f(y), f(x)) = i(x, y) - i(y, x).$$

Сокращая обе части равенства на i, имеем ещё одно соотношение:

$$\forall x, y \in L_1\ (f(x), f(y)) - (f(y), f(x)) = (x, y) - (y, x).$$

Складывая его с ранее имевшимся, получаем нужное соотношение. □

Именно этому свойству изометрические отображения обязаны своим названием.

Докажем ещё ряд свойств изометрических отображений.

Теорема 2. Линейное отображение f: $L_1 \to L_2$ изометрично, тогда и только тогда, когда f^*f – тождественное отображение пространства L_1 на себя.

Доказательство. Пусть f изометрично. По определению

$$\forall x, y \in L_1\ (x, y) = (f(x), f(y)) = (x, f^*f(y)).$$

Значит, $\forall x, y \in L_1$ $(x, y - f^*f(y)) = 0$. Следовательно, $\forall y \in L_1$ $y = f^*f(y)$.

Обратно. Если $\forall y \in L_1$ $y = f^*f(y)$, то $\forall x, y \in L_1$ $(x, y - f^*f(y)) = 0$. Значит, $\forall x, y \in L_1$ $(x, y) = (x, f^*f(y)) = (f(x), f(y))$. □

? Можно ли в условиях теоремы 2 утверждать, что ff^* – тождественное отображение пространства L_2 на себя?

Следствие. Пусть $\dim L_1 = \dim L_2$. Линейное отображение f: $L_1 \to L_2$ изометрично тогда и только тогда, когда f обратимо и $f^{-1} = f^*$.

Доказательство. Пусть f изометрично. Тогда f^*f – тождественное отображение пространства L_1 на себя и потому $\dim L_1 = r(f^*f)$. По неравенству Сильвестра $r(f^*f) \leq r(f)$ и $r(f^*f) \leq r(f^*)$. Но $r(f) \leq \dim L_1$, так что $r(f) = \dim L_1$ и $\mathrm{Im}(f) = L_2$, т.е. f обратим. Умножая справа равенство $f^*f = \varepsilon$ на f^{-1}, получаем $f^* = f^{-1}$.

Обратное с очевидностью следует из теоремы 2. □

Теорема 3. 1) Пусть f – изометрическое отображение пространства L_1 в L_2. Тогда f любую ортонормированную систему векторов пространства L_1 переводит в ортонормированную систему.

2) Пусть линейное отображение f пространства L_1 в L_2 переводит некоторый ортонормированный базис пространства L_1 в ортонормированную систему. Тогда f изометрично.

Доказательство. Утверждение 1) с очевидностью следует из определения. Для доказательства утверждения 2) обозначим фигурирующий в нём базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Обозначим $f(u_i)$ через v_i. Поскольку система $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно независима (ввиду ортонормированности) и количество векторов совпадает с $\dim L_1$, эта система является базисом $\mathrm{Im}(f)$. Пусть x – произвольный вектор пространства L_1, $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$ и $|\, x \,| = \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2}$. Тогда $f(x) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \ldots + \alpha_n f(u_n) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$ и, значит, $|\, f(x) \,| = \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2}$. Следовательно, $|\, x \,| = |\, f(x) \,|$ и по теореме 1 отображение f изометрично. □

Как же устроено отображение, сопряжённое изометрическому отображению f? Из теоремы 3 ясно, что $\dim L_2 \geq \dim L_1$. Случай $\dim L_2 = \dim L_1$ рассмотрен в Следствии к теореме 2. Пусть $\dim L_2 > \dim L_1$. Теорема 2 подсказывает, что на подпространстве $\mathrm{Im}(f)$ отображение, сопряженное с f, должно совпадать с f^{-1}. По теореме о разложении $L_2 = \mathrm{Im}(f) \oplus (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. Поэтому достаточно определить действие сопряженного отображения на $(\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.

! Объясните, как определить отображение на всём L_2, зная его на $\mathrm{Im}(f)$ и $(\mathrm{Im}(f))^{\perp}$.

Определим отображение g на L_2 следующим образом:

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & \text{если } y \in \mathrm{Im}(f) \\ 0, & \text{если } y \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp} \end{cases}.$$

Проверим, что $g = f^*$. Пусть $x \in L_1$, $y \in L_2$, причем $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in \mathrm{Im}(f)$, а $y_2 \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. Тогда

$$(x, g(y)) = (x, g(y_1 + y_2)) = (x, g(y_1)) = (x, f^{-1}(y_1)) = (f(x), y_1) = (f(x), y_1 + y_2),$$

поскольку $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, а $y_2 \in (\mathrm{Im}(f))^{\perp}$. Тем самым, $(x, g(y)) = (f(x), y)$, т.е. $g = f^*$.

Изометрические отображения евклидовых пространств называют ***ортогональными***, а унитарных пространств – ***унитарными***.