Лекция 1

1.1 Полугруппы

Я приветствую полугруппу,
где бы я ее ни встретил,
а встречается она повсюду.
Впрочем, от друзей я слышал,
что в математике попадаются
объекты, отличные
от полугрупп.

Эйнар Хилле [1]

Полугруппой называется непустое множество S, на котором определена бинарная операция, удовлетворяющая закону ассоциативности:

$$\forall a, b, c \in S\colon (ab)c = a(bc). \tag{1.1}$$

В записи закона ассоциативности (1.1) операция «обозначена» подразумеваемой точкой, т.е. так, как обычно обозначается умножение. Мы будем называть эту операцию умножением.

Поскольку никаких других требований, помимо (1.1), на операцию не накладывается, вся теория полугрупп состоит из следствий закона ассоциативности! Довольно удивительно, что на столь простой основе удалось развить столь содержательную теорию, богатую красивыми результатами и полезными приложениями.

Единица полугруппы S – это такой элемент 1, что $a1 = 1a = a$ для любого элемента $a \in S$. Для полугруппы S через S^1 будем обозначать полугруппу S с единицей, возможно присоединенной. Это значит, что $S^1 := S$, если в S есть единица; в противном случае, $S^1 := S \cup \{1\}$ и умножение на S^1 продолжает умножение на S так, чтобы «свежий» символ 1 играл роль единицы. Полугруппу с единицей называют *моноидом*.

1.2 Отношения Грина

> При встрече с новой полугруппой едва ли не первый вопрос, который задают, это: «Каковы ее отношения Грина?»
>
> Джон Макинтош Хауи [2]

Отношениями Грина[1] называются следующие бинарные отношения на произвольной полугруппе S:

1. $a\mathscr{R}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1$. Это означает, что $\exists\ u,v \in S^1\colon a = bu,\ b = av$, т.е. элементы a и b делят друг друга справа (aS^1 – *главный правый идеал*, порожденный элементом a).

2. $a\mathscr{L}b \Leftrightarrow S^1a = S^1b$. Это означает, что $\exists\ x,y \in S^1\colon a = xb,\ b = ya$, т.е. элементы a и b делят друг друга слева (aS^1 – *главный левый идеал*, порожденный элементом a).

3. $a\mathscr{H}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1,\ S^1a = S^1b$, т.е. элементы a и b делят друг друга и справа и слева. Итак, $\mathscr{H} = \mathscr{R} \cap \mathscr{L}$.

4. $a\mathscr{J}b \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1$. Это означает, что $\exists\ u,v,x,y \in S^1\colon a = ubv,\ b = xay$, т.е. элементы a и b делят друг друга «посередине» (S^1aS^1 – *главный идеал*, порожденный элементом a).

Напомним, что *отношение эквивалентности* – это рефлексивное, симметричное и транзитивное бинарное отношение.

Упражнение 1.1. *Отношения Грина являются отношениями эквивалентности.*

Предпорядок – это рефлексивное и транзитивное бинарное отношение. Бывают полезны связанные с отношениями Грина предпорядки:

1. $a \leq_{\mathscr{R}} b \Leftrightarrow aS^1 \subseteq bS^1$.

2. $a \leq_{\mathscr{L}} b \Leftrightarrow S^1a \subseteq S^1b$.

3. $a \leq_{\mathscr{H}} b \Leftrightarrow aS^1 \subseteq bS^1,\ S^1a \subseteq S^1b$.

4. $a \leq_{\mathscr{J}} b \Leftrightarrow S^1aS^1 \subseteq S^1bS^1$.

Бинарное отношение ρ на полугруппе S называется *стабильным справа* (*слева*), если $a\ \rho\ b \Rightarrow ac\ \rho\ bc$ (соответственно $a\ \rho\ b \Rightarrow ca\ \rho\ cb$) для любых $a,b,c \in S$.

[1] James Alexander (Sandy) Green (1926–2014) – английский математик. С 18 лет вместе с другими юными талантами Великобритании работал в Блетчли-парке над взломом немецких шифров. Отношения, позднее названные его именем, ввел и изучил в 1951 г. в своей диссертации, выполненной под руководством Филиппа Холла и Дэвида Рисса.

Предложение 1.1. *Отношения $\leq_{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{L}$ стабильны справа, а отношения $\leq_{\mathscr{R}}$ и $\mathscr{R}$ – стабильны слева.*

Доказательство. $a \leq_{\mathscr{L}} b \Rightarrow a = ub$ для некоторого $u \in S^1$. Умножим на c справа: $ac = ubc \Rightarrow ac \leq_{\mathscr{L}} bc$. Все остальные утверждения проверяются аналогично. □

Если α и β бинарные отношения на некотором множестве X, то их произведение определяется правилом

$$\alpha\beta := \{(x, y) \in X \times X \mid \exists z \in X : (x, z) \in \alpha, (z, y) \in \beta\}.$$

Предложение 1.2. $\mathscr{L}\mathscr{R} = \mathscr{R}\mathscr{L}$.

Доказательство. Пусть $a \mathrel{\mathscr{L}\mathscr{R}} b$. Тогда существует элемент $c \in S$ такой, что $a \mathrel{\mathscr{L}} c$ и $c \mathrel{\mathscr{R}} b$, т.е. $\exists\, u, v, x, y \in S^1 : a = uc,\ c = va,\ c = bx,\ b = cy$. Через d обозначим $ay = ucy = ub$. Покажем, что $a \mathrel{\mathscr{R}} d$ и $d \mathrel{\mathscr{L}} b$. Действительно, в силу предложения 1.1 $a \mathrel{\mathscr{L}} c \Rightarrow ay \mathrel{\mathscr{L}} cy \Rightarrow d \mathrel{\mathscr{L}} b$. Аналогично, $c \mathrel{\mathscr{R}} b \Rightarrow uc \mathrel{\mathscr{R}} ub \Rightarrow a \mathrel{\mathscr{R}} d$. Получили, что $a \mathrel{\mathscr{R}\mathscr{L}} b$, т.е. $\mathscr{L}\mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}\mathscr{L}$. Аналогично получаем обратное включение. Таким образом, $\mathscr{L}\mathscr{R} = \mathscr{R}\mathscr{L}$. □

Следствие 1.1. *Отношение $\mathscr{D} := \mathscr{L}\mathscr{R}$ является наименьшим отношением эквивалентности, содержащим $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$ одновременно.*

Доказательство. Ясно, что $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{D}$ и $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{D}$. Покажем, что $\mathscr{D}$ является отношением эквивалентности.

1. Рефлексивность очевидна
2. Симметричность сразу следует из того, что $\mathscr{L}\mathscr{R} = \mathscr{R}\mathscr{L}$.
3. Транзитивность. Пусть $a \mathrel{\mathscr{D}} b$ и $b \mathrel{\mathscr{D}} c$, тогда $a \mathrel{\mathscr{L}} x \mathrel{\mathscr{R}} b \mathrel{\mathscr{L}} y \mathrel{\mathscr{R}} c$ для некоторых x и y. Отсюда $x \mathrel{\mathscr{R}\mathscr{L}} y \Rightarrow x \mathrel{\mathscr{L}\mathscr{R}} y$, т.е. $x \mathrel{\mathscr{L}} z \mathrel{\mathscr{R}} y$ для некоторого z. Следовательно, $a \mathrel{\mathscr{L}} z$ и $z \mathrel{\mathscr{R}} c$, откуда $a \mathrel{\mathscr{L}\mathscr{R}} c$.

Любое отношение эквивалентности, содержащее $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$, содержит $\mathscr{L}\mathscr{R}$, откуда $\mathscr{D}$ – наименьшее отношение эквивалентности с этим свойством. □

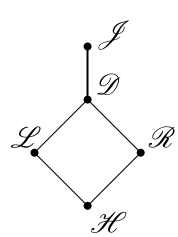

Рис. 1.1: Включения между отношениями Грина

Таким образом, включения между отношениями Грина на произвольной полугруппе описываются диаграммой на рис. 1.1.

В конкретных полугруппах некоторые (или даже все) из отношений Грина могут совпадать. Например, так происходит, если умножение коммутативно.

Упражнение 1.2. *В любой группе G все отношения Грина совпадают с универсальным отношением $G \times G$.*

Упражнение 1.3. *Проверьте, что в подполугруппе полугруппы всех действительных 2×2-матриц, состоящей из всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, где числа a и b положительны, отношение $\mathscr{D}$ совпадает с отношением равенства, а отношение $\mathscr{J}$ – с универсальным отношением.*

1.3 Лемма Грина

Пусть S – полугруппа и $a \in S$. Договоримся обозначать

$\mathscr{R}$-класс, содержащий a, через R_a;
$\mathscr{L}$-класс, содержащий a, через L_a;
$\mathscr{H}$-класс, содержащий a, через H_a;
$\mathscr{D}$-класс, содержащий a, через D_a.

Заметим, что $H_a = L_a \cap R_a$ для любого a.

Лемма 1.1. *Пусть L – $\mathscr{L}$-класс, R – $\mathscr{R}$-класс. Тогда $R \cap L \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда L и R содержатся в одном $\mathscr{D}$-классе.*

Доказательство. Пусть $a \in L \cap R$. Тогда ясно, что $L = L_a$ и $R = R_a$ содержатся в $\mathscr{D}$-классе D_a.

Обратно, пусть L и R содержатся в $\mathscr{D}$-классе D. Возьмем произвольные $x \in L$ и $y \in R$. Тогда $x \mathrel{\mathscr{D}} y$, т.е. существует такой элемент a, что $x \mathrel{\mathscr{L}} a \mathrel{\mathscr{R}} y$. Тогда $a \in L \cap R$, откуда $L \cap R \neq \varnothing$. □

Лемма 1.1 подсказывает, что $\mathscr{D}$-классы удобно мыслить себе как прямоугольные таблицы (по традиции именуемые *egg-box картинками*), в которых строки изображают $\mathscr{R}$-классы, столбцы – $\mathscr{L}$-классы, а ячейки – $\mathscr{H}$-классы.

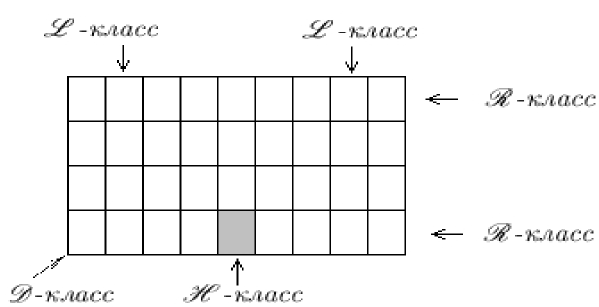

Рис. 1.2: egg-box картинка

Литература

[1] Э. Хилле. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд. иностранной литературы, 1951.

[2] J. M. Howie. Semigroups, past, present and future. In: Wanida Hemakul (ed.), “Proceedings of the International Conference on Algebra and its Applications”, Chulalongkorn Univ., Bangkok, Thailand, 2002, P.6–20.