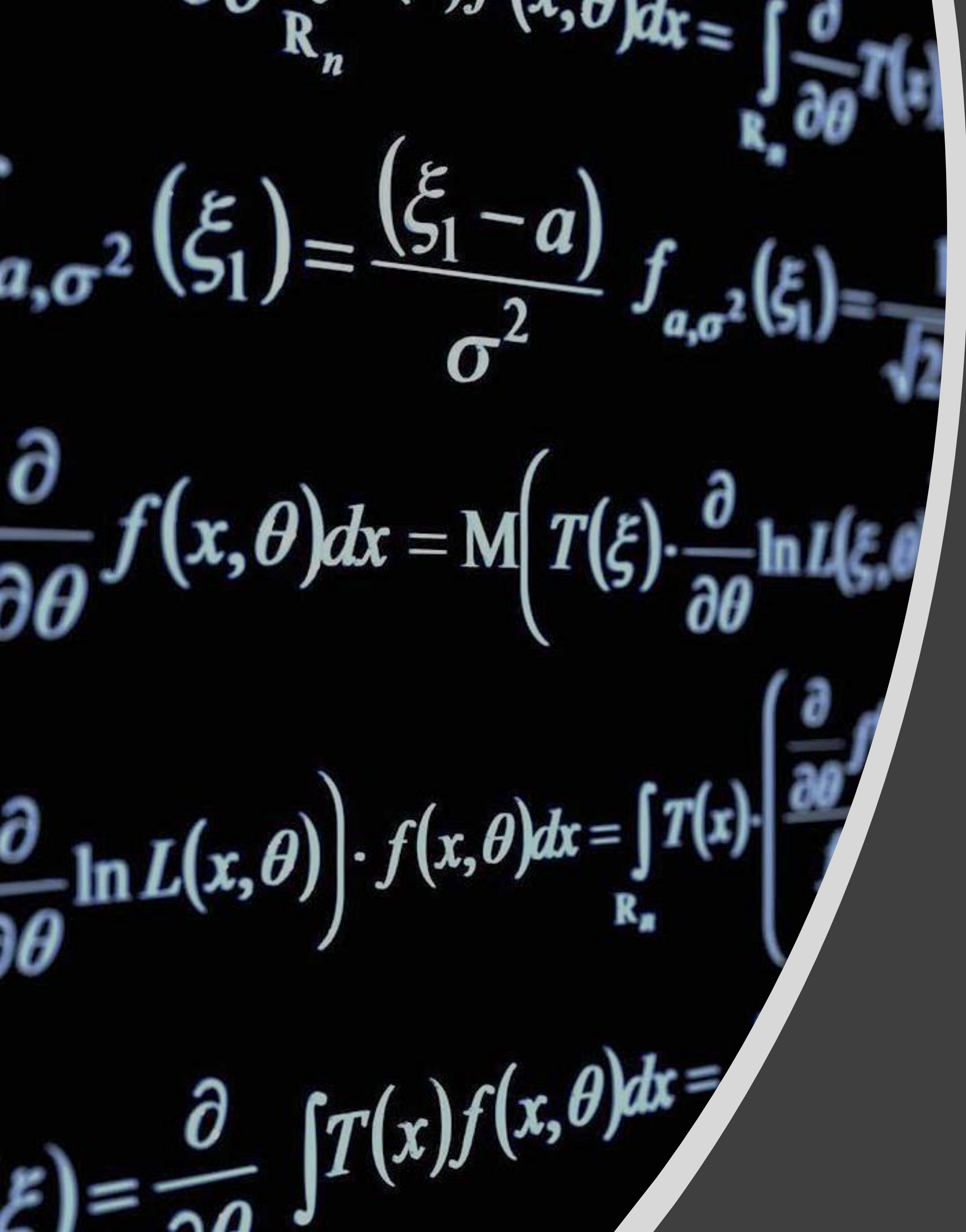


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 1,2 (короткая версия)

Математический анализ

Производная функции, продолжение

Определение производной функции в точке

Пример 1 (упр.) Пусть $f(x) = \sin x$.

Тогда $f'(x) = \cos x$.

Указание. Использовать формулу разности синусов.

Пример 2 (упр.) Пусть $f(x) = a^x$.

Тогда $f'(x) = a^x \ln a$.

Пример 3 (упр.) Пусть $f(x) = \cos x$.

Тогда $f'(x) = -\sin x$.

Определение функции, дифференцируемой в точке

<u>Опр.</u> Функция $f(x)$, определенная в $O(x_0)$, называется дифференцируемой в точке $x = x_0$, если существует производная $f'(x_0)$ в этой точке.

<u>Пример.</u> Функция $f(x) = x^2$ является дифференцируемой в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Геометрический смысл производной функции в точке

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$ и дифференцируема в точке $x = x_0$.

Тогда производная $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Геометрический смысл производной функции в точке

Следствие. Уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке $x = x_0$ (на графике в точке $M_0(x_0, y_0)$):

$$\boxed{y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)}$$

Геометрический смысл производной функции в точке. Пример 4

Пример 4. Написать уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = 1$.

Решение.

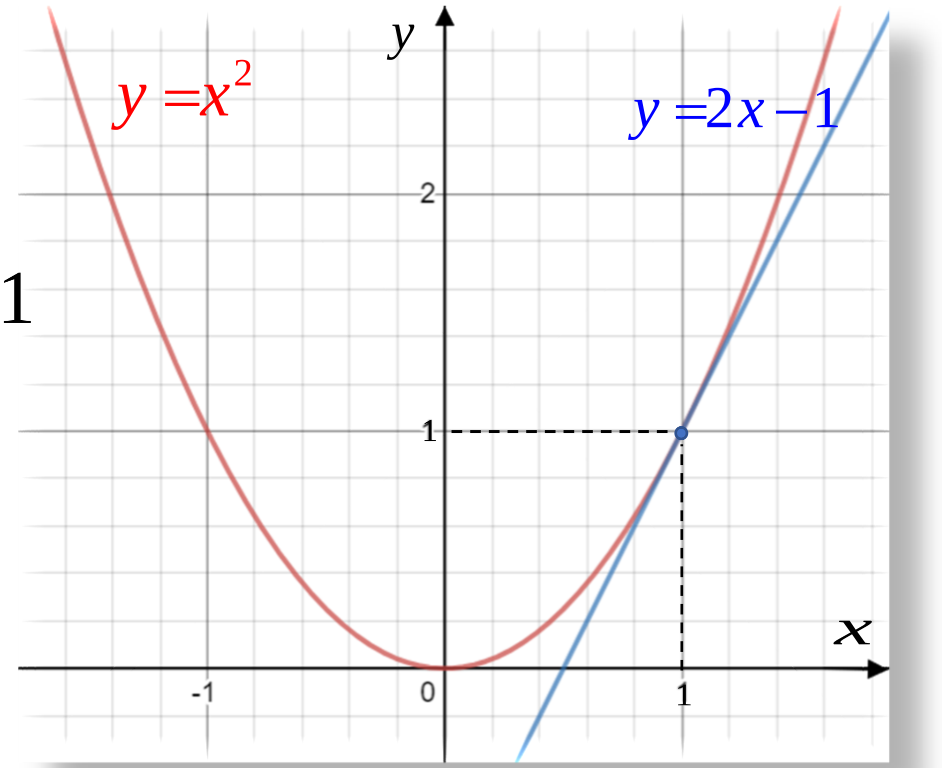
$$y = x^2, \quad y' = 2x, \quad x_0 = 1$$

$$y'(x_0) = 2, \quad y_0 = y(x_0) = 1$$

$$\boxed{y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)}$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 1$$



Теорема о связи дифференцируемости в точке и непрерывности в этой точке

Теорема 2.

Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$.

Если функция $f(x)$ **дифференцируема** в точке x_0, то она **непрерывна** в этой точке.

Теорема о связи дифференцируемости в точке и непрерывности в этой точке

<u>Доказательство.</u>

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Тогда существует конечный предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x) \quad (\cdot\, \Delta x \to 0)$$

Теорема о связи дифференцируемости в точке и непрерывности в этой точке

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) = 0$$

$\Rightarrow$ Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 ■

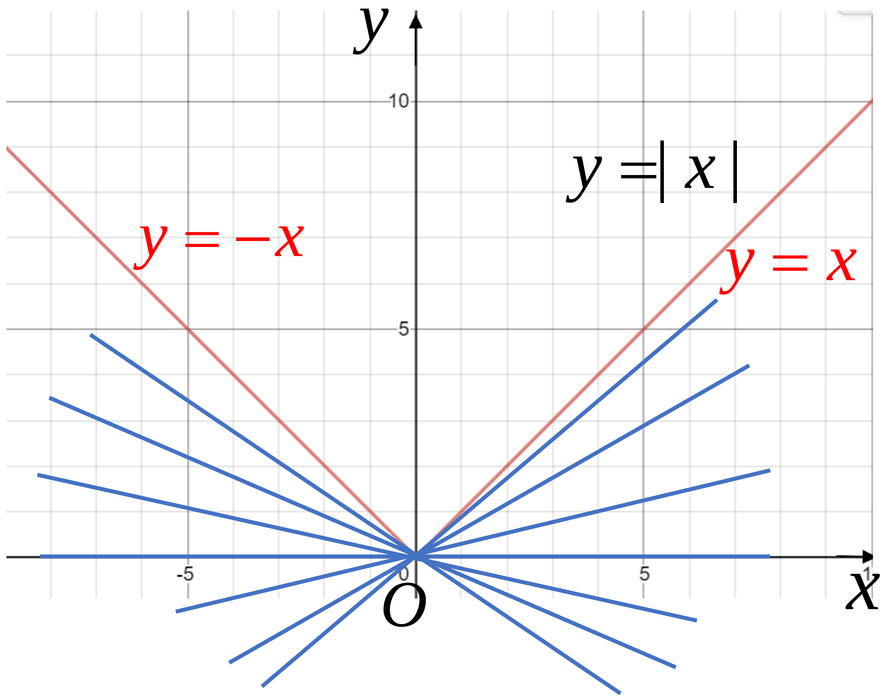
Теорема о связи дифференцируемости в точке и непрерывности в этой точке

Обратное неверно.

Функция $f(x) = |x|$ **непрерывна** в точке $x_0 = 0$, но **не дифференцируема** в этой точке.

$f'(x_0)$не существует

(не существует касательной в точке $x_0 = 0$)



Дифференцируемость функции на интервале

Опр. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой на интервале (a, b), если она определена на (a, b) и дифференцируема для любой точки $x_0 \in (a, b)$.

Пример 5. Функция $y = x^2$ дифференцируема на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Правила дифференцирования

Теорема 3. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ определены и дифференцируемы на интервале (a, b). Тогда их сумма/разность, произведение, частное при условии, что знаменатель не равен нулю, дифференцируемы на этом интервале.

И при этом справедливы формулы

Правила дифференцирования

1) $\boxed{c' = 0}$

2) $\boxed{(cu)' = cu'}$

3) $\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$

4) $\boxed{(u \cdot v)' = u'v + uv'}$

5) $$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Правила дифференцирования. Доказательство

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a, b)$.

(1), (2) упр.

(3) $\Delta(u+v) = (u+v)(x) - (u+v)(x_0) =$

$$= \left(u(x) + v(x)\right) - \left(u(x_0) + v(x_0)\right) =$$

$$= \left(u(x) - u(x_0)\right) + \left(v(x) - v(x_0)\right) =$$

$$= \Delta u(x_0) + \Delta v(x_0)$$

Правила дифференцирования. Доказательство

$$(u+v)'\Big|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x_0) + \Delta v(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} \right) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} = u'(x_0) + v'(x_0) \blacksquare$$

(4), (5) без док-ва.

Правила дифференцирования. Пример 6

Пример 6. Найти производную функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ в любой точке $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{N}$.

Решение.

$$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right]$$

$$= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \, (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

Правила дифференцирования. Пример 6

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Таким образом, $f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Производная обратной функции

Теорема 4

Пусть функция $y = y(x)$ определена, обратима и дифференцируема на (a, b).

Тогда обратная функция $x = x(y)$ определена и дифференцируема на (c, d), где $y((a, b)) = (c, d)$, и

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}}$$

Производная обратной функции Доказательство

<u>Доказательство.</u> Пусть $x_0 \in (a,b)$, $y_0 = y(x_0)$

$$x'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$[y = y(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0 \Rightarrow$
$y = y(x)$ непрерывна в этой точке,

по теореме об обратной функции

функция $x = x(y)$ непрерывна в точке
$y = y_0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0]$

Производная обратной функции в точке

Доказательство.

$$x'(y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x_0)} \ \blacksquare$$

Производная обратной функции. Пример 7

Пример 7. Найти производную функции $f(x) = \ln x$.

Решение.

$$y = y(x) = e^x \Rightarrow x = x(y) = \ln y$$

$$\Rightarrow (\ln y)' = x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Производная обратной функции. Пример 8

Пример 8. Найти $f'(x)$ для $f(x) = \arcsin x$

Решение. $y = y(x) = \sin x \Rightarrow x = x(y) = \arcsin y$

$$\Rightarrow (\arcsin y)' = x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{(\sin x)'}$$

$$= \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Производная обратной функции. Примеры 9-12

Пример 9. Доказать, что $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ (упр.)

Пример 10. Доказать, что $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (упр.)

Пример 11. Доказать, что $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$ (упр.)

Пример 12. Доказать, что $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ (упр.)

Таблица производных

$$1)(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$2)(e^x)' = e^x$$

$$3)(a^x)' = a^x \ln a\,, a > 0, a \neq 1$$

$$4)(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$5)(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$6)(\sin x)' = \cos x$$

$$7)(\cos x)' = -\sin x$$

$$8)(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$9)(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Таблица производных

$$10)\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11)\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12)\ (\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$13)\ (\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Дифференцирование сложной функции

Теорема 5

1) Пусть функция $y = f(u)$ определена и дифференцируема на (c, d).

2) Пусть функция $u = u(x)$ определена и дифференцируема на (a, b).

3) Причем $u(a, b) \subseteq (c, d)$.

Дифференцирование сложной функции

Тогда сложная функция $y = f\big(u(x)\big)$ определена и дифференцируема на (a, b), и

$$\boxed{y' = f'(u)\,u'}$$

<u>Без док-ва</u>

Таблица производных для сложной функции

$$1)(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$$

$$2)(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$3)(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$4)(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$5)(\log_a u)' = \frac{1}{u\ln a} \cdot u'$$

$$6)(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$7)(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

Таблица производных для сложной функции

$$8)(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$9)(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$10)(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$11)(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$12)(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$13)(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

Таблица производных для сложной функции. Пример 13

<u>Пример 13.</u>

1) $y=(3x-17)^{10}$

$$y=u^{10},\, u=3x-17$$

$$y'=10u^9\cdot u'=10\cdot(3x-17)^9\cdot(3x-17)'=$$

$$=10\cdot(3x-17)^9\cdot 3=30\cdot(3x-17)^9$$

Таблица производных для сложной функции. Пример 14

Пример 14.

2) $y = \operatorname{arctg}(7x+1)$

$$y = \operatorname{arctg} u,\ u = 7x+1$$

$$y' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u' = \frac{1}{1+(7x+1)^2}\cdot(7x+1)' =$$

$$= \frac{1}{1+(7x+1)^2}\cdot 7 = \frac{7}{1+(7x+1)^2}$$

Таблица производных для сложной функции. Пример 15

Пример 15.

3) $y=\sin^2(3x-1)$

$$y=u^2, u=\sin(3x-1)$$

$$y'=2u\cdot u' = 2\sin(3x-1)\cdot(\sin(3x-1))' =$$

$$= 2\sin(3x-1)\cdot\cos(3x-1)(3x-1)' =$$

$$= 2\sin(3x-1)\cdot\cos(3x-1)\cdot 3 =$$

$$= 6\sin(3x-1)\cdot\cos(3x-1)$$

Логарифмическое дифференцирование

1) $y = x^{\sin x}$ – степенно-показательная функция

$$\ln y = \ln x^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} y' = (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)'$$

Логарифмическое дифференцирование

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)}$$

Логарифмическое дифференцирование

2) $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

$\Rightarrow \ \ln y = \ln \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

(При этом считаем, что $y > 0$)

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{x(x-1)^2}$$

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{x} + \ln \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

Логарифмическое дифференцирование

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}\ln(x-1)$$

$$\left(\ln y\right)' = \left(\frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}\ln(x-1)\right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{\overset{x-1}{1}}{x} + \frac{\overset{x}{2}}{x-1}\right)$$

Логарифмическое дифференцирование

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\,\frac{(x-1)+2x}{x(x-1)}$$

$$y' = y\,\frac{3x-1}{3x(x-1)}$$

$$y' = \sqrt[3]{x(x-1)^2}\,\frac{3x-1}{3x(x-1)}$$

$$\boxed{y' = \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x-1}}}$$

Дифференциал функции

Пусть функция $y = y(x)$ определена в $O(x_0)$ и дифференцируема в точке $x = x_0$. Тогда

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad \alpha(\Delta x) - \text{б.м.ф. при } \Delta x \to 0$$

$$\Rightarrow \Delta y = \underbrace{y'(x_0)\Delta x}_{dy} + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad \boxed{\Delta y \approx dy}$$

Дифференциал функции

<u>Опр.</u> Дифференциалом функции $y = y(x)$ в точке $x = x_0$ называется произведение $dy = y'(x_0)\Delta x$

$$dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

$$\boxed{dy = y'(x_0)dx}$$

Дифференциал функции $y = y(x)$ равен произведению производной на дифференциал независимой переменной.

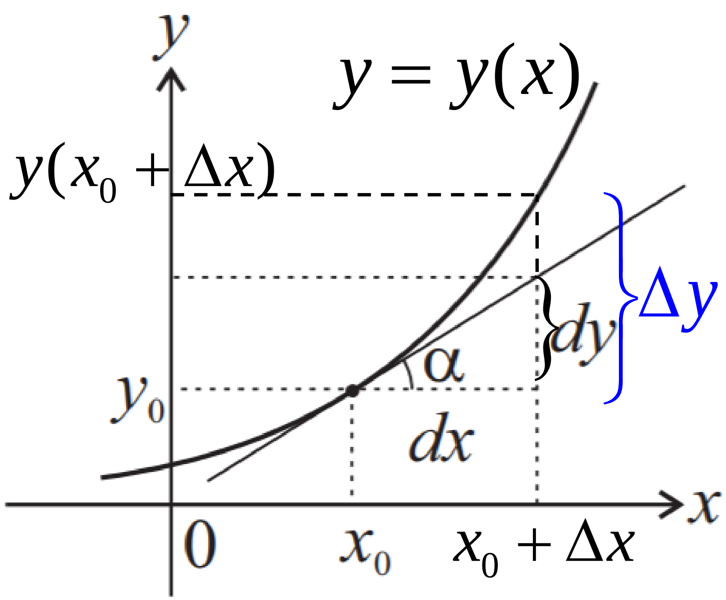
$$\boxed{dy = y'dx}$$

Геометрический смысл дифференциала

<u>Утверждение.</u> Дифференциал функции в точке равен приращению касательной в этой точке.

$$dy = y'(x_0)\Delta x = \operatorname{tg}\alpha\Delta x$$

$$\boxed{\Delta y \approx dy}$$



Дифференциал функции. Пример 16

Пример 16. $y = x^2,\ x_0 = 1$ $\boxed{\Delta y \approx dy}$

$$dy = y'dx = 2xdx$$

$$dy = 2x_0dx = 2dx$$

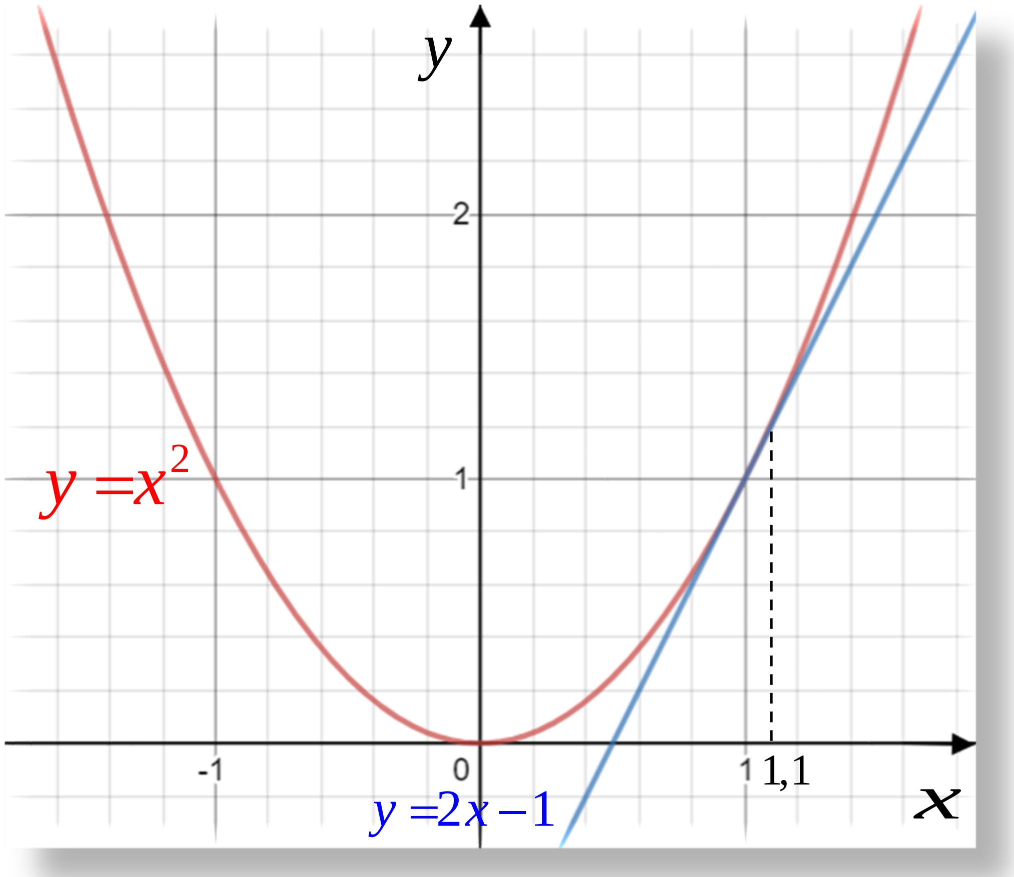
при $\Delta x = 0.1,$

$$dy = 2 \cdot \Delta x = 0.2$$

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) =$$

$$= y(1{,}1) - y(1) = 1{,}1^2 - 1^2 = 0{,}21$$

Геометрический смысл дифференциала



$$\boxed{\Delta y \approx dy}$$