Математическая логика

В. Б. Репницкий

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Математика и компьютерные науки
(4 семестр)

Метод интерпретаций, основанный на понятии истинностного значения формулы, позволяет достаточно глубоко исследовать свойства логических операций – связок и кванторов. Так, с помощью этого метода мы могли выяснить, является ли та или иная ФЛП общезначимой, противоречивой или выполнимой, следует ли она логически из других заданных формул, а также являются ли две формулы равносильными, т.е. логически неразличимыми.

Далее нами будет рассмотрен еще один метод – *аксиоматический*. Он принципиально отличается от предыдущего подходом к понятию истинности формулы (точнее истинности утверждения, записанного с помощью этой формулы) и основан на естественном стремлении считать формулу истинной, если она выводима из заданного списка аксиом, т.е. является *теоремой*. В нашем случае выводимость будет означать определенное оперирование символами и выражениями некоторого формального языка. В связи с этим аксиоматический метод еще называют *синтаксическим* в отличие от метода интерпретаций, являющегося по сути своей *семантическим* (семантика – значение, смысл).

Одной из основных задач данной главы будет установление тесной взаимосвязи этих методов, а в ряде важных случаев – и их полной адекватности. Мы также рассмотрим ряд проблем, естественным образом возникающих внутри аксиоматического метода, таких как проблемы полноты и непротиворечивости формальных теорий, независимости их аксиом и т.п.

Исходным понятием аксиоматического метода является понятие формальной теории. Полагаем, что *формальная теория* $\mathcal{S}$ определена, если выполнены следующие условия:

(1) Задано некоторое счетное множество символов, называемое *алфавитом* теории $\mathcal{S}$. *Выражение* теории – это любая конечная последовательность элементов ее алфавита. Выражения в совокупности образуют *формальный язык* теории $\mathcal{S}$.
(2) Имеется подмножество выражений, называемых *формулами* теории $\mathcal{S}$.
(3) В множестве формул выделены выражения, которые называются *аксиомами* теории $\mathcal{S}$.
(4) Зафиксировано конечное множество $R_1, \ldots, R_n$ отношений между формулами, именуемых *правилами вывода*. При этом говорят, что формула F является *непосредственным следствием* формул $F_1, \ldots, F_{k(i)}$ по правилу вывода R_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и пишут

$$\frac{F_1, \ldots, F_{k(i)}}{F},$$

если F находится в отношении R_i с $F_1, \ldots, F_{k(i)}$.

Обычно подразумевается, что существуют алгоритмы, т.е. эффективные процедуры, позволяющие определить по любому выражению теории $\mathcal{S}$, будет ли оно формулой этой теории, а по любым формулам $F, F_1, \ldots, F_{k(i)}$ и правилу R_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, будет ли F непосредственным следствием $F_1, \ldots, F_{k(i)}$ по этому правилу вывода. Если к тому же существует алгоритм, распознающий среди формул данной теории аксиомы, то такая теория называется *эффективно аксиоматизированной*.

ПРИМЕР 1. На обычную геометрию Евклида, изучаемую в школе, можно смотреть как на формальную теорию. В самом деле, полагаем, что алфавит этой теории включает в себя русский, греческий и латинский алфавиты, знаки препинания, знак пробела, а также общепринятые в математике символы, служащие для обозначения ряда ее понятий. Под формулами в данной теории будем понимать некоторые осмысленные выражения русского языка, а именно высказывания о свойствах тех или иных геометрических объектов (например, “*треугольник ABC – равнобедренный*”). Аксиомами теории являются обычные постулаты евклидовой геометрии, а ее правилами вывода – общеупотребительные в математике правила умозаключений (например, из формул “*треугольники ABC и DEF конгруэнтны*” и “*треугольник ABC – равнобедренный*” непосредственно следует формула “*треугольник DEF – равнобедренный*”).

Обычно подразумевается, что существуют алгоритмы, т.е. эффективные процедуры, позволяющие определить по любому выражению теории $\mathcal{S}$, будет ли оно формулой этой теории, а по любым формулам $F, F_1, \ldots, F_{k(i)}$ и правилу R_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, будет ли F непосредственным следствием $F_1, \ldots, F_{k(i)}$ по этому правилу вывода. Если к тому же существует алгоритм, распознающий среди формул данной теории аксиомы, то такая теория называется *эффективно аксиоматизированной*.

ПРИМЕР 1. На обычную геометрию Евклида, изучаемую в школе, можно смотреть как на формальную теорию. В самом деле, полагаем, что алфавит этой теории включает в себя русский, греческий и латинский алфавиты, знаки препинания, знак пробела, а также общепринятые в математике символы, служащие для обозначения ряда ее понятий. Под формулами в данной теории будем понимать некоторые осмысленные выражения русского языка, а именно высказывания о свойствах тех или иных геометрических объектов (например, "*треугольник ABC – равнобедренный*"). Аксиомами теории являются обычные постулаты евклидовой геометрии, а ее правилами вывода – общеупотребительные в математике правила умозаключений (например, из формул "*треугольники ABC и DEF конгруэнтны*" и "*треугольник ABC – равнобедренный*" непосредственно следует формула "*треугольник DEF – равнобедренный*").

ПРИМЕР 2. Определим формальную теорию $\mathcal{T}$, которую мы будем называть *теорией исчисления высказываний*. Теория $\mathcal{T}$ является своего рода синтаксическим аналогом семантической логики высказываний.

(1) Алфавит теории $\mathcal{T}$ состоит из логических связок $\neg, \longrightarrow$, скобок $(,)$ и букв $A, B, C, \ldots$ (этими же буквами в логике высказываний обозначались логические переменные).

(2) Конечную последовательность элементов данного алфавита будем называть формулой теории $\mathcal{T}$, если она является ФЛВ. Например, выражения $(\neg A \longrightarrow B) \longrightarrow \neg\neg B$ и $\neg(A \longrightarrow \neg B)$ суть формулы теории $\mathcal{T}$, в то время как выражения $\neg(A \vee B) \vee \neg\neg B$ и $A \wedge B$ формулами этой теории, вообще говоря, не являются, так как символы $\vee$ и $\wedge$ не входят в ее алфавит. Это ничуть не противоречит высказанному выше тезису об адекватности теории $\mathcal{T}$ логике высказываний, поскольку, как известно, всякая ФЛВ равносильна формуле, содержащей лишь связки $\neg$ и $\longrightarrow$; в целях сокращения записи формул теории $\mathcal{T}$ мы по определению можем считать, что $A \wedge B$ означает $\neg(A \longrightarrow \neg B)$, а $A \vee B$ означает $\neg A \longrightarrow B$.

ПРИМЕР 2. Определим формальную теорию $\mathcal{T}$, которую мы будем называть *теорией исчисления высказываний*. Теория $\mathcal{T}$ является своего рода синтаксическим аналогом семантической логики высказываний.

(1) Алфавит теории $\mathcal{T}$ состоит из логических связок $\neg, \longrightarrow$, скобок $($, $)$ и букв $A, B, C, \ldots$ (этими же буквами в логике высказываний обозначались логические переменные).

(2) Конечную последовательность элементов данного алфавита будем называть формулой теории $\mathcal{T}$, если она является ФЛВ. Например, выражения $(\neg A \longrightarrow B) \longrightarrow \neg\neg B$ и $\neg(A \longrightarrow \neg B)$ суть формулы теории $\mathcal{T}$, в то время как выражения $\neg(A \vee B) \vee \neg\neg B$ и $A \wedge B$ формулами этой теории, вообще говоря, не являются, так как символы $\vee$ и $\wedge$ не входят в ее алфавит. Это ничуть не противоречит высказанному выше тезису об адекватности теории $\mathcal{T}$ логике высказываний, поскольку, как известно, всякая ФЛВ равносильна формуле, содержащей лишь связки $\neg$ и $\longrightarrow$; в целях сокращения записи формул теории $\mathcal{T}$ мы по определению можем считать, что $A \wedge B$ означает $\neg(A \longrightarrow \neg B)$, а $A \vee B$ означает $\neg A \longrightarrow B$.

ПРИМЕР 2. Определим формальную теорию $\mathcal{T}$, которую мы будем называть *теорией исчисления высказываний*. Теория $\mathcal{T}$ является своего рода синтаксическим аналогом семантической логики высказываний.

(1) Алфавит теории $\mathcal{T}$ состоит из логических связок $\neg, \longrightarrow$, скобок $($, $)$ и букв $A, B, C, \ldots$ (этими же буквами в логике высказываний обозначались логические переменные).

(2) Конечную последовательность элементов данного алфавита будем называть формулой теории $\mathcal{T}$, если она является ФЛВ. Например, выражения $(\neg A \longrightarrow B) \longrightarrow \neg\neg B$ и $\neg(A \longrightarrow \neg B)$ суть формулы теории $\mathcal{T}$, в то время как выражения $\neg(A \vee B) \vee \neg\neg B$ и $A \wedge B$ формулами этой теории, вообще говоря, не являются, так как символы $\vee$ и $\wedge$ не входят в ее алфавит. Это ничуть не противоречит высказанному выше тезису об адекватности теории $\mathcal{T}$ логике высказываний, поскольку, как известно, всякая ФЛВ равносильна формуле, содержащей лишь связки $\neg$ и $\longrightarrow$; в целях сокращения записи формул теории $\mathcal{T}$ мы по определению можем считать, что $A \wedge B$ означает $\neg(A \longrightarrow \neg B)$, а $A \vee B$ означает $\neg A \longrightarrow B$.

(3) Для произвольных формул F, G и H теории $\mathcal{T}$ следующие формулы суть аксиомы:

(A1) $F \longrightarrow (G \longrightarrow F)$;
(A2) $(F \longrightarrow (G \longrightarrow H)) \longrightarrow ((F \longrightarrow G) \longrightarrow (F \longrightarrow H))$;
(A3) $(\neg G \longrightarrow \neg F) \longrightarrow ((\neg G \longrightarrow F) \longrightarrow G)$.

(4) Единственным правилом вывода теории $\mathcal{T}$ служит правило *módus pónens* (сокращенно MP):

$$\frac{F, F \longrightarrow G}{G},$$

которое утверждает, что формула G есть непосредственное следствие формул F и $F \longrightarrow G$. Например, подставляя $\neg A$ вместо F и $B \longrightarrow \neg C$ вместо G, получаем, что

$$\frac{\neg A, \neg A \longrightarrow (B \longrightarrow \neg C)}{B \longrightarrow \neg C} \quad (MP).$$

(3) Для произвольных формул F, G и H теории $\mathcal{T}$ следующие формулы суть аксиомы:

(A1) $F \longrightarrow (G \longrightarrow F)$;
(A2) $(F \longrightarrow (G \longrightarrow H)) \longrightarrow ((F \longrightarrow G) \longrightarrow (F \longrightarrow H))$;
(A3) $(\neg G \longrightarrow \neg F) \longrightarrow ((\neg G \longrightarrow F) \longrightarrow G)$.

(4) Единственным правилом вывода теории $\mathcal{T}$ служит правило *módus pónens* (сокращенно MP):

$$\frac{F, F \longrightarrow G}{G},$$

которое утверждает, что формула G есть непосредственное следствие формул F и $F \longrightarrow G$. Например, подставляя $\neg A$ вместо F и $B \longrightarrow \neg C$ вместо G, получаем, что

$$\frac{\neg A, \neg A \longrightarrow (B \longrightarrow \neg C)}{B \longrightarrow \neg C} \quad (MP).$$

Одним из основных понятий аксиоматического метода является понятие [синтаксической] выводимости. Пусть задана произвольная формальная теория $\mathcal{S}$. Говорим, что формула F есть *следствие в* $\mathcal{S}$ *множества формул* Γ (или F *выводится в* $\mathcal{S}$ *из* Γ), если существует последовательность $F_1, \ldots, F_n$ формул такая, что $F_n = F$ и для любого i формула F_i есть либо аксиома теории $\mathcal{S}$, либо элемент Γ, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул по одному из правил вывода. В этом случае последовательность $F_1, \ldots, F_n$ формул называется *выводом* F *из* Γ. Формулы множества Γ называются *гипотезами* или *посылками* вывода. Если F выводится в $\mathcal{S}$ из Γ, то мы употребляем запись $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} F$; при этом мы будем также писать $\Gamma \vdash F$, если ясно, о какой теории идет речь.

ПРИМЕР 3. Проверить, что $A \longrightarrow (B \longrightarrow C),\ A \longrightarrow B \vdash_{\mathcal{T}} A \longrightarrow C$.

Построим вывод в теории $\mathcal{T}$ формулы $A \longrightarrow C$ из формул $A \longrightarrow (B \longrightarrow C)$ и $A \longrightarrow B$:

(1) $A \longrightarrow (B \longrightarrow C)$ (гипотеза)
(2) $A \longrightarrow (B \longrightarrow C)) \longrightarrow ((A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow C))$ (схема аксиом (A2))
(3) $(A \longrightarrow B) \longrightarrow (A \longrightarrow C)$ (из (1), (2) по MP)
(4) $A \longrightarrow B$ (гипотеза)
(5) $A \longrightarrow C$ (из (3), (4) по MP)

Следующее утверждение включает несколько простых, но очень важных свойств выводимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (1) *Если* $\Gamma \vdash F$ *и* $\Gamma \subseteq \Delta$, *то* $\Delta \vdash F$.
(2) *Если* $\Gamma \vdash F$ *и* $\Delta \vdash G$ *для любой формулы* G *из множества* Γ, *то* $\Delta \vdash F$.
(3) $\Gamma \vdash F$ *тогда и только тогда, когда в* Γ *существует конечное подмножество* Δ, *для которого* $\Delta \vdash F$.

Доказательство. (1) Условие $\Gamma \vdash F$ означает, что существует вывод $F_1, \ldots, F_n$ формулы F из множества формул Γ. Если $\Gamma \subseteq \Delta$, то эту же последовательность формул $F_1, \ldots, F_n$ можно взять в качестве вывода F из Δ и, следовательно, будем иметь $\Delta \vdash F$.
(2) Пусть $\Gamma \vdash F$. Тогда существует последовательность формул $F_1, \ldots, F_n$ такая, что $F_n = F$ и для любого i формула F_i есть либо аксиома, либо гипотеза (т.е. элемент Γ), либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода. Пусть к тому же $\Delta \vdash G$, если $G \in \Gamma$, т.е. для каждой формулы множества гипотез Γ найдется ее вывод из Δ. Заменим в выводе $F_1, \ldots, F_n$ формулы F из Γ каждую гипотезу ее выводом из Δ. Получим последовательность формул, которая, очевидно, будет выводом F из Δ, а значит, $\Delta \vdash F$.

Следующее утверждение включает несколько простых, но очень важных свойств выводимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (1) *Если* $\Gamma \vdash F$ *и* $\Gamma \subseteq \Delta$, *то* $\Delta \vdash F$.
(2) *Если* $\Gamma \vdash F$ *и* $\Delta \vdash G$ *для любой формулы* G *из множества* Γ, *то* $\Delta \vdash F$.
(3) $\Gamma \vdash F$ *тогда и только тогда, когда в* Γ *существует конечное подмножество* Δ, *для которого* $\Delta \vdash F$.

Доказательство. (1) Условие $\Gamma \vdash F$ означает, что существует вывод $F_1, \ldots, F_n$ формулы F из множества формул Γ. Если $\Gamma \subseteq \Delta$, то эту же последовательность формул $F_1, \ldots, F_n$ можно взять в качестве вывода F из Δ и, следовательно, будем иметь $\Delta \vdash F$.
(2) Пусть $\Gamma \vdash F$. Тогда существует последовательность формул $F_1, \ldots, F_n$ такая, что $F_n = F$ и для любого i формула F_i есть либо аксиома, либо гипотеза (т.е. элемент Γ), либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода. Пусть к тому же $\Delta \vdash G$, если $G \in \Gamma$, т.е. для каждой формулы множества гипотез Γ найдется ее вывод из Δ. Заменим в выводе $F_1, \ldots, F_n$ формулы F из Γ каждую гипотезу ее выводом из Δ. Получим последовательность формул, которая, очевидно, будет выводом F из Δ, а значит, $\Delta \vdash F$.

Следующее утверждение включает несколько простых, но очень важных свойств выводимости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (1) *Если* $\Gamma \vdash F$ *и* $\Gamma \subseteq \Delta$, *то* $\Delta \vdash F$.
(2) *Если* $\Gamma \vdash F$ *и* $\Delta \vdash G$ *для любой формулы* G *из множества* Γ, *то* $\Delta \vdash F$.
(3) $\Gamma \vdash F$ *тогда и только тогда, когда в* Γ *существует конечное подмножество* Δ, *для которого* $\Delta \vdash F$.

Доказательство. (1) Условие $\Gamma \vdash F$ означает, что существует вывод $F_1, \ldots, F_n$ формулы F из множества формул Γ. Если $\Gamma \subseteq \Delta$, то эту же последовательность формул $F_1, \ldots, F_n$ можно взять в качестве вывода F из Δ и, следовательно, будем иметь $\Delta \vdash F$.
(2) Пусть $\Gamma \vdash F$. Тогда существует последовательность формул $F_1, \ldots, F_n$ такая, что $F_n = F$ и для любого i формула F_i есть либо аксиома, либо гипотеза (т.е. элемент Γ), либо получается из предыдущих формул по одному из правил вывода. Пусть к тому же $\Delta \vdash G$, если $G \in \Gamma$, т.е. для каждой формулы множества гипотез Γ найдется ее вывод из Δ. Заменим в выводе $F_1, \ldots, F_n$ формулы F из Γ каждую гипотезу ее выводом из Δ. Получим последовательность формул, которая, очевидно, будет выводом F из Δ, а значит, $\Delta \vdash F$.

(3) Пусть $\Gamma \vdash F$. Вывод F из Γ содержит лишь конечное подмножество гипотез, которое мы и обозначим через Δ. Тогда, очевидно, выполнено $\Delta \vdash F$. Обратно, если $\Delta \vdash F$ и $\Delta \subseteq \Gamma$, то в силу доказанного свойства (1) имеем $\Gamma \vdash F$. Предложение доказано.

Формула F теории $\mathcal{S}$ называется *теоремой*, если она выводится в $\mathcal{S}$ из пустого множества гипотез, т.е. $\emptyset \vdash_{\mathcal{S}} F$. Другими словами, F – теорема теории $\mathcal{S}$, если существует последовательность формул $F_1, \ldots, F_n$ такая, что $F_n = F$ и для любого i формула F_i есть либо аксиома теории $\mathcal{S}$, либо непосредственное следствие каких-то предыдущих формул по одному из правил вывода. В этом случае цепочка формул $F_1, \ldots, F_n$ называется *выводом* или *доказательством* теоремы F. В целях экономии места принято опускать в записи $\emptyset \vdash_{\mathcal{S}} F$ знак пустого множества и писать $\vdash_{\mathcal{S}} F$ или $\vdash F$, если ясно, теоремой какой теории является формула F.

(3) Пусть $\Gamma \vdash F$. Вывод F из Γ содержит лишь конечное подмножество гипотез, которое мы и обозначим через Δ. Тогда, очевидно, выполнено $\Delta \vdash F$. Обратно, если $\Delta \vdash F$ и $\Delta \subseteq \Gamma$, то в силу доказанного свойства (1) имеем $\Gamma \vdash F$. Предложение доказано.

Формула F теории $\mathcal{S}$ называется *теоремой*, если она выводится в $\mathcal{S}$ из пустого множества гипотез, т.е. $\emptyset \vdash_{\mathcal{S}} F$. Другими словами, F – теорема теории $\mathcal{S}$, если существует последовательность формул $F_1, \ldots, F_n$ такая, что $F_n = F$ и для любого i формула F_i есть либо аксиома теории $\mathcal{S}$, либо непосредственное следствие каких-то предыдущих формул по одному из правил вывода. В этом случае цепочка формул $F_1, \ldots, F_n$ называется *выводом* или *доказательством* теоремы F. В целях экономии места принято опускать в записи $\emptyset \vdash_{\mathcal{S}} F$ знак пустого множества и писать $\vdash_{\mathcal{S}} F$ или $\vdash F$, если ясно, теоремой какой теории является формула F.

ПРИМЕР 4. Показать, что $\vdash_{\mathcal{T}} F \longrightarrow F$ для любой формулы F теории $\mathcal{T}$.

Построим доказательство теоремы $F \longrightarrow F$ в $\mathcal{T}$:

(1) $F \longrightarrow ((F \longrightarrow F) \longrightarrow F)$ (подстановка в схему аксиом (A1))
(2) $(F \longrightarrow ((F \longrightarrow F) \longrightarrow F)) \longrightarrow ((F \longrightarrow (F \longrightarrow F)) \longrightarrow (F \longrightarrow F))$ (подстановка в схему аксиом (A2))
(3) $(F \longrightarrow (F \longrightarrow F)) \longrightarrow (F \longrightarrow F)$ (из (1), (2) по MP)
(4) $(F \longrightarrow (F \longrightarrow F))$ (схема аксиом (A1))
(5) $F \longrightarrow F$ (из (3), (4) по MP)

ПРИМЕР 4. Показать, что $\vdash_{\mathcal{T}} F \longrightarrow F$ для любой формулы F теории $\mathcal{T}$.

Построим доказательство теоремы $F \longrightarrow F$ в $\mathcal{T}$:

(1) $F \longrightarrow ((F \longrightarrow F) \longrightarrow F)$ (подстановка в схему аксиом (A1))
(2) $(F \longrightarrow ((F \longrightarrow F) \longrightarrow F)) \longrightarrow ((F \longrightarrow (F \longrightarrow F)) \longrightarrow (F \longrightarrow F))$
(подстановка в схему аксиом (A2))
(3) $(F \longrightarrow (F \longrightarrow F)) \longrightarrow (F \longrightarrow F)$ (из (1), (2) по MP)
(4) $(F \longrightarrow (F \longrightarrow F)$ (схема аксиом (A1))
(5) $F \longrightarrow F$ (из (3), (4) по MP)

ПРИМЕР 5. Доказать, что в теории $\mathcal{T}$ всякая теорема является тавтологией.

Действительно, заметим сначала, что для любых формул F и G теории $\mathcal{T}$ из того, что F и $F \longrightarrow G$ суть тавтологии, вытекает, что и G – тавтология. Поэтому свойство формул теории $\mathcal{T}$ "*быть тавтологией*" сохраняется при применении к ним правила вывода MP. Отсюда, поскольку каждая теорема теории $\mathcal{T}$ получается из аксиом с помощью правила MP, а все аксиомы в $\mathcal{T}$ суть тавтологии, заключаем, что и все теоремы в $\mathcal{T}$ являются тавтологиями.

Естественна постановка вопроса о справедливости обратного утверждения: *будет ли всякая тавтология теоремой теории $\mathcal{T}$?* Как мы увидим, ответ на этот вопрос оказывается положительным. Иначе говоря, список аксиом теории $\mathcal{T}$ является "достаточно полным" для того, чтобы из него выводилась любая тавтология. В этом состоит смысл так называемой *теоремы о полноте* для теории $\mathcal{T}$ исчисления высказываний. Эта теорема будет доказана нами в гораздо более общем случае, охватывающем широкий класс формальных теорий.

ПРИМЕР 5. Доказать, что в теории $\mathcal{T}$ всякая теорема является тавтологией.

Действительно, заметим сначала, что для любых формул F и G теории $\mathcal{T}$ из того, что F и $F \longrightarrow G$ суть тавтологии, вытекает, что и G – тавтология. Поэтому свойство формул теории $\mathcal{T}$ "*быть тавтологией*" сохраняется при применении к ним правила вывода MP. Отсюда, поскольку каждая теорема теории $\mathcal{T}$ получается из аксиом с помощью правила MP, а все аксиомы в $\mathcal{T}$ суть тавтологии, заключаем, что и все теоремы в $\mathcal{T}$ являются тавтологиями.

Естественна постановка вопроса о справедливости обратного утверждения: *будет ли всякая тавтология теоремой теории $\mathcal{T}$?* Как мы увидим, ответ на этот вопрос оказывается положительным. Иначе говоря, список аксиом теории $\mathcal{T}$ является "достаточно полным" для того, чтобы из него выводилась любая тавтология. В этом состоит смысл так называемой *теоремы о полноте* для теории $\mathcal{T}$ исчисления высказываний. Эта теорема будет доказана нами в гораздо более общем случае, охватывающем широкий класс формальных теорий.

ПРИМЕР 5. Доказать, что в теории $\mathcal{T}$ всякая теорема является тавтологией.

Действительно, заметим сначала, что для любых формул F и G теории $\mathcal{T}$ из того, что F и $F \longrightarrow G$ суть тавтологии, вытекает, что и G – тавтология. Поэтому свойство формул теории $\mathcal{T}$ “*быть тавтологией*” сохраняется при применении к ним правила вывода MP. Отсюда, поскольку каждая теорема теории $\mathcal{T}$ получается из аксиом с помощью правила MP, а все аксиомы в $\mathcal{T}$ суть тавтологии, заключаем, что и все теоремы в $\mathcal{T}$ являются тавтологиями.

Естественна постановка вопроса о справедливости обратного утверждения: *будет ли всякая тавтология теоремой теории $\mathcal{T}$?* Как мы увидим, ответ на этот вопрос оказывается положительным. Иначе говоря, список аксиом теории $\mathcal{T}$ является “достаточно полным” для того, чтобы из него выводилась любая тавтология. В этом состоит смысл так называемой *теоремы о полноте* для теории $\mathcal{T}$ исчисления высказываний. Эта теорема будет доказана нами в гораздо более общем случае, охватывающем широкий класс формальных теорий.

Определим произвольную *теорию первого порядка* $\mathcal{K}$.

(1) Алфавит теории $\mathcal{K}$ включает логические связки $\neg, \longrightarrow$; знак квантора общности $\forall$; скобки $($, $)$; запятую , (вводимую нами для облегчения чтения формул); счетное множество предметных переменных $x, y, z, \ldots$ (возможно, индексированных); непустое конечное или счетное множество предикатных символов $P^{(n)}, Q^{(n)}, S^{(n)}, \ldots (n \geq 0)$; а также конечное (возможно и пустое) или счетное множество *функциональных символов* $f^{(n)}, g^{(n)}, h^{(n)}, \ldots (n \geq 0)$.

Предикатные и функциональные символы в совокупности образуют *сигнатуру* $\Sigma(\mathcal{K}) = \{P^{(n)}, Q^{(n)}, S^{(n)}, \ldots; f^{(n)}, g^{(n)}, h^{(n)}, \ldots\}$ теории $\mathcal{K}$.

Определим произвольную *теорию первого порядка* $\mathcal{K}$.

(1) Алфавит теории $\mathcal{K}$ включает логические связки $\neg, \longrightarrow$; знак квантора общности $\forall$; скобки $($, $)$; запятую , (вводимую нами для облегчения чтения формул); счетное множество предметных переменных $x, y, z, \ldots$ (возможно, индексированных); непустое конечное или счетное множество предикатных символов $P^{(n)}, Q^{(n)}, S^{(n)}, \ldots (n \geq 0)$; а также конечное (возможно и пустое) или счетное множество *функциональных символов* $f^{(n)}, g^{(n)}, h^{(n)}, \ldots (n \geq 0)$.

Предикатные и функциональные символы в совокупности образуют *сигнатуру* $\Sigma(\mathcal{K}) = \{P^{(n)}, Q^{(n)}, S^{(n)}, \ldots; f^{(n)}, g^{(n)}, h^{(n)}, \ldots\}$ теории $\mathcal{K}$.

(2) Понятие *терма* теории $\mathcal{K}$ определяется так же как в логике предикатов:

(1′) предметные переменные $x, y, z, \ldots$, а также нульарные функциональные символы $f^{(0)}, g^{(0)}, h^{(0)}, \ldots$ из $\Sigma(\mathcal{K})$ (если они есть) суть термы теории $\mathcal{K}$;
(2′) для произвольного функционального символа $f^{(n)} \in \Sigma(\mathcal{K})$ $(n \geq 1)$ и термов $t_1, \ldots, t_n$ теории $\mathcal{K}$ выражение вида $f^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ тоже есть терм этой теории;
(3′) других термов нет.

Теперь мы можем определить формулы теории $\mathcal{K}$:

(1″) выражения вида $P^{(0)}$ и $P^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ суть формулы; здесь $P^{(0)}$ и $P^{(n)}$ – предикатные символы из $\Sigma(\mathcal{K})$, а $t_1, \ldots, t_n$ – произвольные термы теории $\mathcal{K}$; такие формулы называются *атомарными*;

(2″) если F и G – формулы, то выражения вида $\neg F$, $(F \longrightarrow G), \forall x F$ также являются формулами;

(3″) других формул нет.

Как обычно, мы будем опускать некоторые скобки для сокращения записи формул. При этом будем писать $F \wedge G$ вместо $\neg(F \longrightarrow \neg G)$, $F \vee G$ вместо $\neg F \longrightarrow G$ и $\exists x F$ вместо $\neg\forall x \neg F$.

Так же как и в случае ФЛП, определим понятия свободной и связанной переменной и свободного и связанного вхождения переменной в формуле.

Теперь мы можем определить формулы теории $\mathcal{K}$:

(1$''$) выражения вида $P^{(0)}$ и $P^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ суть формулы; здесь $P^{(0)}$ и $P^{(n)}$ – предикатные символы из $\Sigma(\mathcal{K})$, а $t_1, \ldots, t_n$ – произвольные термы теории $\mathcal{K}$; такие формулы называются *атомарными*;

(2$''$) если F и G – формулы, то выражения вида $\neg F$, $(F \longrightarrow G), \forall x F$ также являются формулами;

(3$''$) других формул нет.

Как обычно, мы будем опускать некоторые скобки для сокращения записи формул. При этом будем писать $F \wedge G$ вместо $\neg(F \longrightarrow \neg G)$, $F \vee G$ вместо $\neg F \longrightarrow G$ и $\exists x F$ вместо $\neg \forall x \neg F$.

Так же как и в случае ФЛП, определим понятия свободной и связанной переменной и свободного и связанного вхождения переменной в формуле.

Теперь мы можем определить формулы теории $\mathcal{K}$:

(1″) выражения вида $P^{(0)}$ и $P^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ суть формулы; здесь $P^{(0)}$ и $P^{(n)}$ – предикатные символы из $\Sigma(\mathcal{K})$, а $t_1, \ldots, t_n$ – произвольные термы теории $\mathcal{K}$; такие формулы называются *атомарными*;

(2″) если F и G – формулы, то выражения вида $\neg F$, $(F \longrightarrow G), \forall x F$ также являются формулами;

(3″) других формул нет.

Как обычно, мы будем опускать некоторые скобки для сокращения записи формул. При этом будем писать $F \wedge G$ вместо $\neg(F \longrightarrow \neg G)$, $F \vee G$ вместо $\neg F \longrightarrow G$ и $\exists x F$ вместо $\neg \forall x \neg F$.

Так же как и в случае ФЛП, определим понятия свободной и связанной переменной и свободного и связанного вхождения переменной в формуле.

(3) Аксиомы теории $\mathcal{K}$ разбиваются на два класса: *логические аксиомы* и *собственные аксиомы*.
Логические аксиомы подразделяются на пять схем $(A1)$–$(A5)$, которые справедливы для любой теории первого порядка. Первые три из них аналогичны схемам аксиом теории $\mathcal{T}$ исчисления высказываний:

(A1) $F \longrightarrow (G \longrightarrow F)$;
(A2) $(F \longrightarrow (G \longrightarrow H)) \longrightarrow ((F \longrightarrow G) \longrightarrow (F \longrightarrow H))$;
(A3) $(\neg G \longrightarrow \neg F) \longrightarrow ((\neg G \longrightarrow F) \longrightarrow G)$;
здесь F, G и H – произвольные формулы теории $\mathcal{K}$.

Следующая схема аксиом имеет вид:

(A4) $\forall x(F \longrightarrow G) \longrightarrow (F \longrightarrow \forall x G)$,
где формула F не содержит свободных вхождений x.

Для определения схемы (A5) нам понадобится понятие терма, свободного для данной переменной в формуле.

Пусть $F(x)$ – формула теории $\mathcal{K}$, где x – какая-то свободная в F переменная и t – некоторый терм теории $\mathcal{K}$. Обозначим через $F(t)$ формулу, получающуюся из $F(x)$ заменой каждого свободного вхождения переменной x термом t.

Терм t называется *свободным для переменной x в формуле $F(x)$*, если в формуле $F(t)$ никакое вхождение терма t (полученное указанным выше способом) не содержит связанных вхождений переменных.

Так например, для переменной x в формуле
$F(x, z) = \forall y P^{(3)}(x, y, z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x, z)$ терм $t_1 = f^{(2)}(x, z)$ свободен, а терм $t_2 = f^{(2)}(x, y)$ нет, поскольку
$F(t_1, z) = \forall y P^{(3)}(f^{(2)}(x, z), y, z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x, z)$, а
$F(t_2, z) = \forall y P^{(3)}(f^{(2)}(x, y), y, z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x, z)$, и в последнем случае вхождение терма t_2 в формуле $F(t_2, z)$ содержит связанную переменную y.

Следующая схема аксиом имеет вид:

(A4) $\forall x(F \longrightarrow G) \longrightarrow (F \longrightarrow \forall x G)$,
где формула F не содержит свободных вхождений x.

Для определения схемы (A5) нам понадобится понятие терма, свободного для данной переменной в формуле.

Пусть $F(x)$ – формула теории $\mathcal{K}$, где x – какая-то свободная в F переменная и t – некоторый терм теории $\mathcal{K}$. Обозначим через $F(t)$ формулу, получающуюся из $F(x)$ заменой каждого свободного вхождения переменной x термом t.

Терм t называется *свободным для переменной x в формуле $F(x)$*, если в формуле $F(t)$ никакое вхождение терма t (полученное указанным выше способом) не содержит связанных вхождений переменных.

Так например, для переменной x в формуле
$F(x,z) = \forall y P^{(3)}(x,y,z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x,z)$ терм $t_1 = f^{(2)}(x,z)$ свободен, а терм $t_2 = f^{(2)}(x,y)$ нет, поскольку
$F(t_1,z) = \forall y P^{(3)}(f^{(2)}(x,z),y,z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x,z)$, а
$F(t_2,z) = \forall y P^{(3)}(f^{(2)}(x,y),y,z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x,z)$, и в последнем случае вхождение терма t_2 в формуле $F(t_2,z)$ содержит связанную переменную y.

Следующая схема аксиом имеет вид:

(A4) $\forall x(F \longrightarrow G) \longrightarrow (F \longrightarrow \forall x G)$,
где формула F не содержит свободных вхождений x.

Для определения схемы (A5) нам понадобится понятие терма, свободного для данной переменной в формуле.

Пусть $F(x)$ – формула теории $\mathcal{K}$, где x – какая-то свободная в F переменная и t – некоторый терм теории $\mathcal{K}$. Обозначим через $F(t)$ формулу, получающуюся из $F(x)$ заменой каждого свободного вхождения переменной x термом t.

Терм t называется *свободным для переменной x в формуле $F(x)$*, если в формуле $F(t)$ никакое вхождение терма t (полученное указанным выше способом) не содержит связанных вхождений переменных.

Так например, для переменной x в формуле
$F(x,z) = \forall y P^{(3)}(x,y,z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x,z)$ терм $t_1 = f^{(2)}(x,z)$ свободен, а терм $t_2 = f^{(2)}(x,y)$ нет, поскольку
$F(t_1,z) = \forall y P^{(3)}(f^{(2)}(x,z),y,z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x,z)$, а
$F(t_2,z) = \forall y P^{(3)}(f^{(2)}(x,y),y,z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x,z)$, и в последнем случае вхождение терма t_2 в формуле $F(t_2,z)$ содержит связанную переменную y.

Следующая схема аксиом имеет вид:

(A4) $\forall x(F \longrightarrow G) \longrightarrow (F \longrightarrow \forall x G)$,
где формула F не содержит свободных вхождений x.

Для определения схемы (A5) нам понадобится понятие терма, свободного для данной переменной в формуле.

Пусть $F(x)$ – формула теории $\mathcal{K}$, где x – какая-то свободная в F переменная и t – некоторый терм теории $\mathcal{K}$. Обозначим через $F(t)$ формулу, получающуюся из $F(x)$ заменой каждого свободного вхождения переменной x термом t.

Терм t называется *свободным для переменной x в формуле $F(x)$*, если в формуле $F(t)$ никакое вхождение терма t (полученное указанным выше способом) не содержит связанных вхождений переменных.

Так например, для переменной x в формуле
$F(x, z) = \forall y P^{(3)}(x, y, z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x, z)$ терм $t_1 = f^{(2)}(x, z)$ свободен, а терм $t_2 = f^{(2)}(x, y)$ нет, поскольку
$F(t_1, z) = \forall y P^{(3)}(f^{(2)}(x, z), y, z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x, z)$, а
$F(t_2, z) = \forall y P^{(3)}(f^{(2)}(x, y), y, z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x, z)$, и в последнем случае вхождение терма t_2 в формуле $F(t_2, z)$ содержит связанную переменную y.

Следующая схема аксиом имеет вид:

(A4) $\forall x(F \longrightarrow G) \longrightarrow (F \longrightarrow \forall x G)$,
где формула F не содержит свободных вхождений x.

Для определения схемы (A5) нам понадобится понятие терма, свободного для данной переменной в формуле.

Пусть $F(x)$ – формула теории $\mathcal{K}$, где x – какая-то свободная в F переменная и t – некоторый терм теории $\mathcal{K}$. Обозначим через $F(t)$ формулу, получающуюся из $F(x)$ заменой каждого свободного вхождения переменной x термом t.

Терм t называется *свободным для переменной x в формуле $F(x)$*, если в формуле $F(t)$ никакое вхождение терма t (полученное указанным выше способом) не содержит связанных вхождений переменных.

Так например, для переменной x в формуле
$F(x, z) = \forall y P^{(3)}(x, y, z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x, z)$ терм $t_1 = f^{(2)}(x, z)$ свободен, а терм $t_2 = f^{(2)}(x, y)$ нет, поскольку
$F(t_1, z) = \forall y P^{(3)}(f^{(2)}(x, z), y, z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x, z)$, а
$F(t_2, z) = \forall y P^{(3)}(f^{(2)}(x, y), y, z) \longrightarrow \forall x \forall z Q^{(2)}(x, z)$, и в последнем случае вхождение терма t_2 в формуле $F(t_2, z)$ содержит связанную переменную y.

Приведем теперь последнюю схему логических аксиом:

(A5) $\forall x F(x) \longrightarrow F(t)$,
где $F(x)$ – произвольная формула теории $\mathcal{K}$ и t – терм теории $\mathcal{K}$, свободный для x в $F(x)$. При $t = x$ мы получаем одну из логических аксиом $\forall x F(x) \longrightarrow F(x)$. Мы также включаем в указанную схему логических аксиом формулы вида $\forall x F \longrightarrow F$, где переменная x не встречается в записи формулы F или все ее вхождения в F связаны.

Логические аксиомы должны подчиняться необходимому условию: быть истинными при любой интерпретации. Ограничения, наложенные на формулы в схемах (A4), (A5), объясняются именно этим требованием.

Собственные аксиомы сформулировать в общем случае нельзя, так как они индивидуальны для каждой теории первого порядка.

Приведем теперь последнюю схему логических аксиом:

(A5) $\forall x F(x) \longrightarrow F(t)$,
где $F(x)$ – произвольная формула теории $\mathcal{K}$ и t – терм теории $\mathcal{K}$, свободный для x в $F(x)$. При $t = x$ мы получаем одну из логических аксиом $\forall x F(x) \longrightarrow F(x)$. Мы также включаем в указанную схему логических аксиом формулы вида $\forall x F \longrightarrow F$, где переменная x не встречается в записи формулы F или все ее вхождения в F связаны.

Логические аксиомы должны подчиняться необходимому условию: быть истинными при любой интерпретации. Ограничения, наложенные на формулы в схемах (A4), (A5), объясняются именно этим требованием.

Собственные аксиомы сформулировать в общем случае нельзя, так как они индивидуальны для каждой теории первого порядка.

Приведем теперь последнюю схему логических аксиом:

(A5) $\forall x F(x) \longrightarrow F(t)$,
где $F(x)$ – произвольная формула теории $\mathcal{K}$ и t – терм теории $\mathcal{K}$, свободный для x в $F(x)$. При $t = x$ мы получаем одну из логических аксиом $\forall x F(x) \longrightarrow F(x)$. Мы также включаем в указанную схему логических аксиом формулы вида $\forall x F \longrightarrow F$, где переменная x не встречается в записи формулы F или все ее вхождения в F связаны.

Логические аксиомы должны подчиняться необходимому условию: быть истинными при любой интерпретации. Ограничения, наложенные на формулы в схемах (A4), (A5), объясняются именно этим требованием.

Собственные аксиомы сформулировать в общем случае нельзя, так как они индивидуальны для каждой теории первого порядка.

(4) В теории $\mathcal{K}$ имеются два правила вывода: знакомое нам уже *módus pónens* $\frac{F, F \longrightarrow G}{G}$ (MP) и, новое, *правило обобщения* $\frac{F}{\forall x F}$ (ПО).

Как видно из определения, две теории первого порядка могут отличаться друг от друга лишь множеством предикатных и функциональных символов, т.е. сигнатурой, и множеством собственных аксиом. Поэтому для того, *чтобы задать конкретную теорию первого порядка, достаточно указать ее сигнатуру и собственные аксиомы.*

Как и в логике предикатов, формулу теории $\mathcal{K}$ будем называть замкнутой, если она не содержит свободных переменных. Для каждой формулы $F = F(x_1, \ldots, x_k)$ теории $\mathcal{K}$, где $x_1, \ldots, x_k$ – все свободные переменные в F, можно построить ее замыкание $\bar{F} = \forall x_1 \cdots \forall x_k F(x_1, \ldots, x_k)$. Ясно, что формула F замкнута тогда и только тогда, когда $F = \bar{F}$.

(4) В теории $\mathcal{K}$ имеются два правила вывода: знакомое нам уже *módus pónens* $\frac{F, F \longrightarrow G}{G}$ (MP) и, новое, *правило обобщения* $\frac{F}{\forall x F}$ (ПО).

Как видно из определения, две теории первого порядка могут отличаться друг от друга лишь множеством предикатных и функциональных символов, т.е. сигнатурой, и множеством собственных аксиом. Поэтому для того, *чтобы задать конкретную теорию первого порядка, достаточно указать ее сигнатуру и собственные аксиомы*.

Как и в логике предикатов, формулу теории $\mathcal{K}$ будем называть замкнутой, если она не содержит свободных переменных. Для каждой формулы $F = F(x_1, \ldots, x_k)$ теории $\mathcal{K}$, где $x_1, \ldots, x_k$ – все свободные переменные в F, можно построить ее замыкание $\bar{F} = \forall x_1 \cdots \forall x_k F(x_1, \ldots, x_k)$. Ясно, что формула F замкнута тогда и только тогда, когда $F = \bar{F}$.

(4) В теории $\mathcal{K}$ имеются два правила вывода: знакомое нам уже *módus pónens* $\frac{F, F \longrightarrow G}{G}$ (MP) и, новое, *правило обобщения* $\frac{F}{\forall x F}$ (ПО).

Как видно из определения, две теории первого порядка могут отличаться друг от друга лишь множеством предикатных и функциональных символов, т.е. сигнатурой, и множеством собственных аксиом. Поэтому для того, *чтобы задать конкретную теорию первого порядка, достаточно указать ее сигнатуру и собственные аксиомы*.

Как и в логике предикатов, формулу теории $\mathcal{K}$ будем называть замкнутой, если она не содержит свободных переменных. Для каждой формулы $F = F(x_1, \dots, x_k)$ теории $\mathcal{K}$, где $x_1, \dots, x_k$ – все свободные переменные в F, можно построить ее замыкание $\bar{F} = \forall x_1 \cdots \forall x_k F(x_1, \dots, x_k)$. Ясно, что формула F замкнута тогда и только тогда, когда $F = \bar{F}$.

Следующий пример демонстрирует одно полезное свойство выводимости в теориях первого порядка, позволяющее во многих рассуждениях ограничиваться рассмотрением замкнутых формул.

ПРИМЕР 1. Пусть Γ – некоторое множество формул теории первого порядка и F – произвольная формула. Показать, что $\Gamma \vdash F$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \bar{F}$; в частности, выполнено $F \vdash \bar{F}$ и $\bar{F} \vdash F$.

Действительно, для любой свободной в F переменной x имеем по правилу обобщения $F \vdash \forall x F$. С другой стороны, последовательность формул $F_1 = \forall x F$, $F_2 = \forall x F \longrightarrow F$, $F_3 = F$ является выводом F из формулы $\forall x F$, и значит, $\forall x F \vdash F$; здесь F_1 – гипотеза, F_2 – аксиома из схемы $(A5)$, F_3 – непосредственное следствие формул F_1 и F_2 по правилу MP. Теперь остается выписать цепочку эквивалентностей: $\Gamma \vdash F(x_1, \ldots, x_k) \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \forall x_k F(x_1, \ldots, x_k) \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \forall x_{k-1} \forall x_k F(x_1, \ldots, x_k) \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_{k-1} \forall x_k F(x_1, \ldots, x_k)$, т.е. $\Gamma \vdash F \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \bar{F}$.

Следующий пример демонстрирует одно полезное свойство выводимости в теориях первого порядка, позволяющее во многих рассуждениях ограничиваться рассмотрением замкнутых формул.

ПРИМЕР 1. Пусть Γ – некоторое множество формул теории первого порядка и F – произвольная формула. Показать, что $\Gamma \vdash F$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \bar{F}$; в частности, выполнено $F \vdash \bar{F}$ и $\bar{F} \vdash F$.

Действительно, для любой свободной в F переменной x имеем по правилу обобщения $F \vdash \forall x F$. С другой стороны, последовательность формул $F_1 = \forall x F$, $F_2 = \forall x F \longrightarrow F$, $F_3 = F$ является выводом F из формулы $\forall x F$, и значит, $\forall x F \vdash F$; здесь F_1 – гипотеза, F_2 – аксиома из схемы $(A5)$, F_3 – непосредственное следствие формул F_1 и F_2 по правилу MP. Теперь остается выписать цепочку эквивалентностей: $\Gamma \vdash F(x_1, \ldots, x_k) \Longleftrightarrow$ $\Gamma \vdash \forall x_k F(x_1, \ldots, x_k) \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \forall x_{k-1} \forall x_k F(x_1, \ldots, x_k) \Longleftrightarrow$ $\Gamma \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_{k-1} \forall x_k F(x_1, \ldots, x_k)$, т.е. $\Gamma \vdash F \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \bar{F}$.

Пусть Σ – произвольная сигнатура и M – непустое множество, на котором определены некоторые предикаты и операции, образующие соответственно множества $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}$. Пусть к тому же задано отображение (интерпретация) $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathcal{P} \cup \mathcal{F}$, ставящее в соответствие каждому n-арному предикатному символу из Σ какой-либо предикат из $\mathcal{P}$, а n-арному функциональному символу – какую-либо n-арную операцию из $\mathcal{F}$. Тогда четырехэлементное множество $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mu \rangle$ называется *алгебраической системой* сигнатуры Σ; при этом M называется *основным множеством* системы $\mathfrak{M}$.

Например, множество натуральных чисел $\mathbf{N}$ с естественным предикатом (отношением) линейного порядка $\leq$ и операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$ образует алгебраическую систему $\langle \mathbf{N}, \leq, \{+, \cdot\}, \mu \rangle$ сигнатуры $\Sigma = \{P^{(2)}, f^{(2)}, g^{(2)}\}$, где $\mu(P^{(2)}) =$“$\leq$”, $\mu(f^{(2)}) =$“$+$”, $\mu(g^{(2)}) =$“$\cdot$”. Две алгебраические системы мы не различаем, если они *изоморфны*, т.е. если существует взаимно однозначное отображение основного множества одной из них на основное множество другой, сохраняющее операции и предикаты.

Пусть Σ – произвольная сигнатура и M – непустое множество, на котором определены некоторые предикаты и операции, образующие соответственно множества $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}$. Пусть к тому же задано отображение (интерпретация) $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathcal{P} \cup \mathcal{F}$, ставящее в соответствие каждому n-арному предикатному символу из Σ какой-либо предикат из $\mathcal{P}$, а n-арному функциональному символу – какую-либо n-арную операцию из $\mathcal{F}$. Тогда четырехэлементное множество $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mu \rangle$ называется *алгебраической системой* сигнатуры Σ; при этом M называется *основным множеством* системы $\mathfrak{M}$.

Например, множество натуральных чисел $\mathbf{N}$ с естественным предикатом (отношением) линейного порядка $\leq$ и операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$ образует алгебраическую систему $\langle \mathbf{N}, \leq, \{+, \cdot\}, \mu \rangle$ сигнатуры $\Sigma = \{P^{(2)}, f^{(2)}, g^{(2)}\}$, где $\mu(P^{(2)}) =$“$\leq$”, $\mu(f^{(2)}) =$“$+$”, $\mu(g^{(2)}) =$“$\cdot$”. Две алгебраические системы мы не различаем, если они *изоморфны*, т.е. если существует взаимно однозначное отображение основного множества одной из них на основное множество другой, сохраняющее операции и предикаты.

Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mu \rangle$ – алгебраическая система сигнатуры Σ с интерпретацией μ, $F(x_1, \ldots, x_k)$ – формула сигнатуры Σ. Тогда значение этой формулы при данной интерпретации есть k-арный предикат $(\mu F)(x_1, \ldots, x_k)$ на основном множестве системы $\mathfrak{M}$.

Говорят, что формула F *тождественно истинна* (соотв.*тождественно ложна*) на алгебраической системе $\mathfrak{M}$, если предикат $(\mu F)(x_1, \ldots, x_k)$ – тождествеенно истинный (соотв. тождественно ложный). Формула F *выполнима* на этой системе, если существуют элементы $a_1, \ldots, a_k \in M$ такие, что $(\mu F)(a_1, \ldots, a_k) = 1$.

Пусть $\mathcal{K}$ – теория первого порядка сигнатуры Σ, $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mu \rangle$ – алгебраическая система сигнатуры Σ.

Алгебраическая система $\mathfrak{M}$ называется *моделью* теории $\mathcal{K}$, если на ней тождественно истинны все собственные аксиомы теории $\mathcal{K}$.

В этом определении слово "собственные" можно опустить, т.к. логические аксиомы истинны на любой алгебраической системе данной сигнатуры.

Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mu \rangle$ – алгебраическая система сигнатуры Σ с интерпретацией μ, $F(x_1, \ldots, x_k)$ – формула сигнатуры Σ. Тогда значение этой формулы при данной интерпретации есть k-арный предикат $(\mu F)(x_1, \ldots, x_k)$ на основном множестве системы $\mathfrak{M}$.

Говорят, что формула F *тождественно истинна* (соотв.*тождественно ложна*) на алгебраической системе $\mathfrak{M}$, если предикат $(\mu F)(x_1, \ldots, x_k)$ – тождественно истинный (соотв. тождественно ложный). Формула F *выполнима* на этой системе, если существуют элементы $a_1, \ldots, a_k \in M$ такие, что $(\mu F)(a_1, \ldots, a_k) = 1$.

Пусть $\mathcal{K}$ – теория первого порядка сигнатуры Σ, $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mu \rangle$ – алгебраическая система сигнатуры Σ.

Алгебраическая система $\mathfrak{M}$ называется *моделью* теории $\mathcal{K}$, если на ней тождественно истинны все собственные аксиомы теории $\mathcal{K}$.

В этом определении слово "собственные" можно опустить, т.к. логические аксиомы истинны на любой алгебраической системе данной сигнатуры.

Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mu \rangle$ – алгебраическая система сигнатуры Σ с интерпретацией μ, $F(x_1, \ldots, x_k)$ – формула сигнатуры Σ. Тогда значение этой формулы при данной интерпретации есть k-арный предикат $(\mu F)(x_1, \ldots, x_k)$ на основном множестве системы $\mathfrak{M}$.

Говорят, что формула F *тождественно истинна* (соотв.*тождественно ложна*) на алгебраической системе $\mathfrak{M}$, если предикат $(\mu F)(x_1, \ldots, x_k)$ – тождествеенно истинный (соотв. тождественно ложный). Формула F *выполнима* на этой системе, если существуют элементы $a_1, \ldots, a_k \in M$ такие, что $(\mu F)(a_1, \ldots, a_k) = 1$.

Пусть $\mathcal{K}$ – теория первого порядка сигнатуры Σ, $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{P}, \mathcal{F}, \mu \rangle$ – алгебраическая система сигнатуры Σ.

Алгебраическая система $\mathfrak{M}$ называется *моделью* теории $\mathcal{K}$, если на ней тождественно истинны все собственные аксиомы теории $\mathcal{K}$.

В этом определении слово “собственные” можно опустить, т.к. логические аксиомы истинны на любой алгебраической системе данной сигнатуры.

ПРИМЕР 2. Для теории $\mathcal{K}$ первого порядка, заданной своей сигнатурой $\Sigma(\mathcal{K})$ и собственными аксиомами A_1, A_2, выяснить, будет ли моделью этой теории алгебраическая система $\mathfrak{M}$:

(1) $\Sigma(\mathcal{K}) = \{P^{(2)}, f^{(1)}\}$, $A_1 = \forall x P^{(2)}(x,x)$, $A_2 = \forall x P^{(2)}(x, f^{(1)}(x))$;
$\mathfrak{M} = \langle \mathbf{R}, P, f, \mu \rangle$, где $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел, $P(x,y) = \mathbf{1}$ $\Longleftrightarrow x \le y$, $f(x) = x + 1$ и $\mu(P^{(2)}) = P$, $\mu(f^{(1)}) = f$.

(2) $\Sigma(\mathcal{K}) = \{P^{(2)}, f^{(2)}\}$,
$A_1 = \forall x \forall y \forall z (P^{(2)}(x,y) \longrightarrow P^{(2)}(f^{(2)}(x,z), f^{(2)}(y,z)))$, $A_2 = \exists x \forall y P^{(2)}(x,y)$;
$\mathfrak{M} = \langle \mathbf{Z}, P, f, \mu \rangle$, где $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел, $P(x,y) = \mathbf{1} \Longleftrightarrow x \le y$, $f(x,y) = x + y$ и $\mu(P^{(2)}) = P$, $\mu(f^{(2)}) = f$.

В первом лучае аксиомам A_1 и A_2 соответствуют истинные высказывания: “для любого $x \in \mathbf{R} : x \le x$” и “для любого $x \in \mathbf{R} : x \le x + 1$”. Поэтому $\mu(A_1) = \mathbf{1}$ и $\mu(A_2) = \mathbf{1}$, а значит, система $\mathfrak{M}$ является моделью теории $\mathcal{K}$.

Во втором случае аксиомы A_1 и A_2 заданной интерпретацией переводятся соответственно в высказывания “для любых $x, y, z \in \mathbf{Z}$ условие $x \le y$ влечет за собой $x + z \le y + z$” и “существует $x \in \mathbf{Z}$ такой, что для любого $y \in \mathbf{Z} :\ x \le y$”. Второе высказывание о наличии наименьшего целого числа неверно. Поэтому $\mu(A_2) = \mathbf{0}$ и, несмотря на то, что $\mu(A_1) = \mathbf{1}$, данная система моделью теории $\mathcal{K}$ не является.

ПРИМЕР 2. Для теории $\mathcal{K}$ первого порядка, заданной своей сигнатурой $\Sigma(\mathcal{K})$ и собственными аксиомами A_1, A_2, выяснить, будет ли моделью этой теории алгебраическая система $\mathfrak{M}$:

(1) $\Sigma(\mathcal{K}) = \{P^{(2)}, f^{(1)}\}$, $A_1 = \forall x P^{(2)}(x, x)$, $A_2 = \forall x P^{(2)}(x, f^{(1)}(x))$;
$\mathfrak{M} = \langle \mathbf{R}, P, f, \mu \rangle$, где $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел, $P(x, y) = \mathbf{1} \iff x \leq y$, $f(x) = x + 1$ и $\mu(P^{(2)}) = P$, $\mu(f^{(1)}) = f$.

(2) $\Sigma(\mathcal{K}) = \{P^{(2)}, f^{(2)}\}$,
$A_1 = \forall x \forall y \forall z (P^{(2)}(x, y) \longrightarrow P^{(2)}(f^{(2)}(x, z), f^{(2)}(y, z)))$, $A_2 = \exists x \forall y P^{(2)}(x, y)$;
$\mathfrak{M} = \langle \mathbf{Z}, P, f, \mu \rangle$, где $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел, $P(x, y) = \mathbf{1} \iff x \leq y$, $f(x, y) = x + y$ и $\mu(P^{(2)}) = P$, $\mu(f^{(2)}) = f$.

В первом лучае аксиомам A_1 и A_2 соответствуют истинные высказывания: “для любого $x \in \mathbf{R} : x \leq x$” и “для любого $x \in \mathbf{R} : x \leq x + 1$”. Поэтому $\mu(A_1) = \mathbf{1}$ и $\mu(A_2) = \mathbf{1}$, а значит, система $\mathfrak{M}$ является моделью теории $\mathcal{K}$.

Во втором случае аксиомы A_1 и A_2 заданной интерпретацией переводятся соответственно в высказывания “для любых $x, y, z \in \mathbf{Z}$ условие $x \leq y$ влечет за собой $x + z \leq y + z$” и “существует $x \in \mathbf{Z}$ такой, что для любого $y \in \mathbf{Z} : \ x \leq y$”. Второе высказывание о наличии наименьшего целого числа неверно. Поэтому $\mu(A_2) = \mathbf{0}$ и, несмотря на то, что $\mu(A_1) = \mathbf{1}$, данная система моделью теории $\mathcal{K}$ не является.

ПРИМЕР 2. Для теории $\mathcal{K}$ первого порядка, заданной своей сигнатурой $\Sigma(\mathcal{K})$ и собственными аксиомами A_1, A_2, выяснить, будет ли моделью этой теории алгебраическая система $\mathfrak{M}$:

(1) $\Sigma(\mathcal{K}) = \{P^{(2)}, f^{(1)}\}$, $A_1 = \forall x P^{(2)}(x, x)$, $A_2 = \forall x P^{(2)}(x, f^{(1)}(x))$;
$\mathfrak{M} = \langle \mathbf{R}, P, f, \mu \rangle$, где $\mathbf{R}$ – множество действительных чисел, $P(x, y) = \mathbf{1} \iff x \leq y$, $f(x) = x + 1$ и $\mu(P^{(2)}) = P$, $\mu(f^{(1)}) = f$.

(2) $\Sigma(\mathcal{K}) = \{P^{(2)}, f^{(2)}\}$,
$A_1 = \forall x \forall y \forall z (P^{(2)}(x, y) \longrightarrow P^{(2)}(f^{(2)}(x, z), f^{(2)}(y, z)))$, $A_2 = \exists x \forall y P^{(2)}(x, y)$;
$\mathfrak{M} = \langle \mathbf{Z}, P, f, \mu \rangle$, где $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел, $P(x, y) = \mathbf{1} \iff x \leq y$, $f(x, y) = x + y$ и $\mu(P^{(2)}) = P$, $\mu(f^{(2)}) = f$.

В первом лучае аксиомам A_1 и A_2 соответствуют истинные высказывания: “для любого $x \in \mathbf{R} : x \leq x$” и “для любого $x \in \mathbf{R} : x \leq x + 1$”. Поэтому $\mu(A_1) = \mathbf{1}$ и $\mu(A_2) = \mathbf{1}$, а значит, система $\mathfrak{M}$ является моделью теории $\mathcal{K}$.

Во втором случае аксиомы A_1 и A_2 заданной интерпретацией переводятся соответственно в высказывания “для любых $x, y, z \in \mathbf{Z}$ условие $x \leq y$ влечет за собой $x + z \leq y + z$” и “существует $x \in \mathbf{Z}$ такой, что для любого $y \in \mathbf{Z}$: $x \leq y$”. Второе высказывание о наличии наименьшего целого числа неверно. Поэтому $\mu(A_2) = \mathbf{0}$ и, несмотря на то, что $\mu(A_1) = \mathbf{1}$, данная система моделью теории $\mathcal{K}$ не является.

Приведем теперь ряд важных примеров теорий первого порядка, а также укажем, какие системы будут для них моделями.

ПРИМЕР 3. *Теория $\mathcal{T}$ исчисления высказываний* может быть задана как теория первого порядка. Ее сигнатура – это счетное множество нульарных предикатных символов, которые мы раньше называли логическими переменными. Собственных аксиом $\mathcal{T}$ не имеет. Так как формулы этой теории не содержат предметных переменных, отпадает необходимость в кванторах, и потому в определении $\mathcal{T}$ достаточно было ограничиться тремя схемами $(A1)$–$(A3)$ логических аксиом. Моделью теории $\mathcal{T}$ является любое непустое множество с заданными на нем нульместными предикатами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$.

ПРИМЕР 4. *Теория исчисления предикатов* – это теория первого порядка без собственных аксиом, сигнатура которой содержит счетные наборы предикатных и функциональных символов любой арности. Ее модели – это модели логики предикатов данной сигнатуры, а формулы суть ФЛП.

Приведем теперь ряд важных примеров теорий первого порядка, а также укажем, какие системы будут для них моделями.

ПРИМЕР 3. *Теория $\mathcal{T}$ исчисления высказываний* может быть задана как теория первого порядка. Ее сигнатура – это счетное множество нульарных предикатных символов, которые мы раньше называли логическими переменными. Собственных аксиом $\mathcal{T}$ не имеет. Так как формулы этой теории не содержат предметных переменных, отпадает необходимость в кванторах, и потому в определении $\mathcal{T}$ достаточно было ограничиться тремя схемами $(A1)$–$(A3)$ логических аксиом. Моделью теории $\mathcal{T}$ является любое непустое множество с заданными на нем нульместными предикатами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$.

ПРИМЕР 4. *Теория исчисления предикатов* – это теория первого порядка без собственных аксиом, сигнатура которой содержит счетные наборы предикатных и функциональных символов любой арности. Ее модели – это модели логики предикатов данной сигнатуры, а формулы суть ФЛП.

ПРИМЕР 5. *Теория (строго) частично упорядоченных множеств.* Ее сигнатура состоит из одного предикатного символа строгого порядка "$<$". Данная теория имеет две собственные аксиомы:

(а) $\forall x (x \not< x)$ (аксиома антирефлексивности);

(б) $\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \longrightarrow x < z)$ (аксиома транзитивности).

Моделями данной теории являются строго частично упорядоченные множества.

ПРИМЕР 6. *Теория орграфов*. Ее сигнатура состоит из единственного предикатного символа $P^{(2)}$ арности два, функциональных символов нет. Собственных аксиом эта теория так же не имеет. Модели – это множества элементов, называемых вершинами, с единственным бинарным отношением $P(x, y)$. При этом если вершины u и v находятся в отношении $P(u, v)$, то от u к v ведет дуга.

ПРИМЕР 7. *Теория (неориентированных) графов*. Ее сигнатура тоже состоит из единственного предикатного символа $P^{(2)}$ арности два, функциональных символов нет. Собственная аксиома одна:

$$\forall x \forall y (P^{(2)}(x, y) \longrightarrow P^{(2)}(y, x))$$

Модели – это множества вершин с единственным симметричным бинарным отношением $P(x, y)$. При этом если вершины u и v находятся в отношении $P(u, v)$, то они соединены ребром.

ПРИМЕР 6. *Теория орграфов*. Ее сигнатура состоит из единственного предикатного символа $P^{(2)}$ арности два, функциональных символов нет. Собственных аксиом эта теория так же не имеет. Модели – это множества элементов, называемых вершинами, с единственным бинарным отношением $P(x, y)$. При этом если вершины u и v находятся в отношении $P(u, v)$, то от u к v ведет дуга.

ПРИМЕР 7. *Теория (неориентированных) графов*. Ее сигнатура тоже состоит из единственного предикатного символа $P^{(2)}$ арности два, функциональных символов нет. Собственная аксиома одна:

$$\forall x \forall y (P^{(2)}(x, y) \longrightarrow P^{(2)}(y, x))$$

Модели – это множества вершин с единственным симметричным бинарным отношением $P(x, y)$. При этом если вершины u и v находятся в отношении $P(u, v)$, то они соединены ребром.

ПРИМЕР 6. *Теория орграфов*. Ее сигнатура состоит из единственного предикатного символа $P^{(2)}$ арности два, функциональных символов нет. Собственных аксиом эта теория так же не имеет. Модели – это множества элементов, называемых вершинами, с единственным бинарным отношением $P(x, y)$. При этом если вершины u и v находятся в отношении $P(u, v)$, то от u к v ведет дуга.

ПРИМЕР 7. *Теория (неориентированных) графов*. Ее сигнатура тоже состоит из единственного предикатного символа $P^{(2)}$ арности два, функциональных символов нет. Собственная аксиома одна:

$$\forall x \forall y (P^{(2)}(x, y) \longrightarrow P^{(2)}(y, x))$$

Модели – это множества вершин с единственным симметричным бинарным отношением $P(x, y)$. При этом если вершины u и v находятся в отношении $P(u, v)$, то они соединены ребром.

В дальнейшем через $\mathcal{K}$ мы всегда будем обозначать некоторую теорию первого порядка.

Обобщим теперь понятие логического следования, введенное для ФЛП, на формулы произвольной теории $\mathcal{K}$. Будем говорить, что формула F *логически следует в* $\mathcal{K}$ из множества формул Γ, если для любой модели $\mathfrak{M}$ теории $\mathcal{K}$ из того, что все формулы из Γ тождественно истинны на $\mathfrak{M}$, вытекает, что и F тождественно истинна на $\mathfrak{M}$. В этом случае так же будем писать $\Gamma \models F$ (или $\Gamma \models_{\mathcal{K}} F$, если мы хотим подчеркнуть, что речь идет о теории $\mathcal{K}$).

Формула F называется *логически общезначимой в* $\mathcal{K}$, если она тождественно истинна на любой модели теории $\mathcal{K}$. Это равносильно тому, что F логически следует в $\mathcal{K}$ из пустого множества формул, т.е. выполнено $\models_{\mathcal{K}} F$. Данное понятие обобщает понятие логической общезначимости, которое мы вводили для ФЛП. Из определения модели теории $\mathcal{K}$ непосредственно видно, что *все аксиомы теории* $\mathcal{K}$ *логически общезначимы в ней.*

В дальнейшем через $\mathcal{K}$ мы всегда будем обозначать некоторую теорию первого порядка.

Обобщим теперь понятие логического следования, введенное для ФЛП, на формулы произвольной теории $\mathcal{K}$. Будем говорить, что формула F *логически следует в* $\mathcal{K}$ из множества формул Γ, если для любой модели $\mathfrak{M}$ теории $\mathcal{K}$ из того, что все формулы из Γ тождественно истинны на $\mathfrak{M}$, вытекает, что и F тождественно истинна на $\mathfrak{M}$. В этом случае так же будем писать $\Gamma \models F$ (или $\Gamma \models_{\mathcal{K}} F$, если мы хотим подчеркнуть, что речь идет о теории $\mathcal{K}$).

Формула F называется *логически общезначимой в* $\mathcal{K}$, если она тождественно истинна на любой модели теории $\mathcal{K}$. Это равносильно тому, что F логически следует в $\mathcal{K}$ из пустого множества формул, т.е. выполнено $\models_{\mathcal{K}} F$. Данное понятие обобщает понятие логической общезначимости, которое мы вводили для ФЛП. Из определения модели теории $\mathcal{K}$ непосредственно видно, что *все аксиомы теории* $\mathcal{K}$ *логически общезначимы в ней*.

Заметим, что формула F тождественно истинна на системе $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда формула вида $\forall x F$ тождественно истинна на $\mathfrak{M}$. Отсюда, навешивая последовательно кванторы общности на свободные переменные из F, получаем, что F тождественно истинна на $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда ее замыкание $\bar{F}$ истинно на $\mathfrak{M}$. Поэтому *логическая общезначимость формулы F в теории $\mathcal{K}$ равносильна логической общезначимости в $\mathcal{K}$ формулы $\bar{F}$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* Γ *– некоторое множество формул теории* $\mathcal{K}$ *и* F *– произвольная формула. Тогда условие* $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$ *влечет за собой* $\Gamma \models_{\mathcal{K}} F$.

Доказательство. Пусть $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$, т.е. существует последовательность формул $F_1, \ldots, F_n$ такая, что $F_n = F$ и каждая формула F_i есть либо аксиома теории $\mathcal{K}$, либо гипотеза, либо непосредственное следствие формул с меньшими номерами по одному из правил вывода – МР или ПО. Надо установить, что для любой модели $\mathfrak{M}$ теории $\mathcal{K}$ формула F тождественно истинна на $\mathfrak{M}$, как только все гипотезы из Γ тождественно истинны на $\mathfrak{M}$. Докажем это индукцией по длине n вывода F из Γ. Поскольку F_1 является либо аксиомой (и потому логически общезначимой в $\mathcal{K}$ формулой), либо гипотезой, формула F_1 тождественно истинна на $\mathfrak{M}$. Предположим, что утверждение доказано для всех $i < n$ и проверим истинность на $\mathfrak{M}$ формулы F_n. При этом достаточно разобрать случай, когда F_n получается из предыдущих формул по МР или ПО. Пусть, например, $\frac{F_i, F_j}{F_n}$ (МР), где $i, j < n$ и формула F_j имеет вид $F_i \longrightarrow F_n$. Тогда, по предположению индукции, для интерпретации ϕ формул F_i и $F_i \longrightarrow F_n$ в модели $\mathfrak{M}$ предикаты $\phi(F_i)$ и $\phi(F_i \longrightarrow F_n)$ тождественно истинны, а значит, тождественно истинен и предикат $\phi(F_n)$, т.е. формула F_n тождественно истинна на $\mathfrak{M}$. Если же $\frac{F_i}{F_n}$ (ПО), где $i < n$ и $F_n = \forall x F_i$, то из истинности F_i на $\mathfrak{M}$ следует истинность на $\mathfrak{M}$ и формулы F_n. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть* Γ *– некоторое множество формул теории* $\mathcal{K}$ *и* F *– произвольная формула. Тогда условие* $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$ *влечет за собой* $\Gamma \models_{\mathcal{K}} F$.

Доказательство. Пусть $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$, т.е. существует последовательность формул $F_1, \ldots, F_n$ такая, что $F_n = F$ и каждая формула F_i есть либо аксиома теории $\mathcal{K}$, либо гипотеза, либо непосредственное следствие формул с меньшими номерами по одному из правил вывода – МР или ПО. Надо установить, что для любой модели $\mathfrak{M}$ теории $\mathcal{K}$ формула F тождественно истинна на $\mathfrak{M}$, как только все гипотезы из Γ тождественно истинны на $\mathfrak{M}$. Докажем это индукцией по длине n вывода F из Γ. Поскольку F_1 является либо аксиомой (и потому логически общезначимой в $\mathcal{K}$ формулой), либо гипотезой, формула F_1 тождественно истинна на $\mathfrak{M}$. Предположим, что утверждение доказано для всех $i < n$ и проверим истинность на $\mathfrak{M}$ формулы F_n. При этом достаточно разобрать случай, когда F_n получается из предыдущих формул по МР или ПО. Пусть, например, $\frac{F_i, F_j}{F_n}$ (МР), где $i, j < n$ и формула F_j имеет вид $F_i \longrightarrow F_n$. Тогда, по предположению индукции, для интерпретации ϕ формул F_i и $F_i \longrightarrow F_n$ в модели $\mathfrak{M}$ предикаты $\phi(F_i)$ и $\phi(F_i \longrightarrow F_n)$ тождественно истинны, а значит, тождественно истинен и предикат $\phi(F_n)$, т.е. формула F_n тождественно истинна на $\mathfrak{M}$. Если же $\frac{F_i}{F_n}$ (ПО), где $i < n$ и $F_n = \forall x F_i$, то из истинности F_i на $\mathfrak{M}$ следует истинность на $\mathfrak{M}$ и формулы F_n. Предложение доказано.

Полагая в условии предложения $\Gamma = \emptyset$, получим

СЛЕДСТВИЕ. *Любая теорема теории первого порядка логически общезначима: если* $\vdash F$, *то* $\models F$.

Говорят, что *множество* Γ *формул теории* $\mathcal{K}$ *имеет модель в* $\mathcal{K}$, если все формулы из Γ тождественно истинны на некоторой модели теории $\mathcal{K}$.

Множество Γ формул теории $\mathcal{K}$ называется *противоречивым в* $\mathcal{K}$, если существует замкнутая формула F этой теории такая, что $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$ и, одновременно, $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg F$. В противном случае говорят, что Γ *непротиворечиво в* $\mathcal{K}$.

Полагая в условии предложения $\Gamma = \emptyset$, получим

СЛЕДСТВИЕ. *Любая теорема теории первого порядка логически общезначима: если* $\vdash F$, *то* $\models F$.

Говорят, что *множество* Γ *формул теории* $\mathcal{K}$ *имеет модель в* $\mathcal{K}$, если все формулы из Γ тождественно истинны на некоторой модели теории $\mathcal{K}$.

Множество Γ формул теории $\mathcal{K}$ называется *противоречивым в* $\mathcal{K}$, если существует замкнутая формула F этой теории такая, что $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$ и, одновременно, $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg F$. В противном случае говорят, что Γ *непротиворечиво в* $\mathcal{K}$.

Полагая в условии предложения $\Gamma = \emptyset$, получим

СЛЕДСТВИЕ. *Любая теорема теории первого порядка логически общезначима: если* $\vdash F$, *то* $\models F$.

Говорят, что *множество* Γ *формул теории* $\mathcal{K}$ *имеет модель в* $\mathcal{K}$, если все формулы из Γ тождественно истинны на некоторой модели теории $\mathcal{K}$.

Множество Γ формул теории $\mathcal{K}$ называется *противоречивым в* $\mathcal{K}$, если существует замкнутая формула F этой теории такая, что $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$ и, одновременно, $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg F$. В противном случае говорят, что Γ *непротиворечиво в* $\mathcal{K}$.

Следующая теорема дает важное достаточное условие непротиворечивости.

ТЕОРЕМА О НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ. *Если множество формул теории первого порядка имеет модель, то оно непротиворечиво.*

Доказательство. Пусть множество формул Γ имеет модель $\mathfrak{M}$ в теории $\mathcal{K}$. Если бы Γ было противоречивым, то нашлась бы замкнутая формула F в $\mathcal{K}$ такая, что $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$ и $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg F$. Отсюда, в силу доказанного выше предложения, выполнялось бы $\Gamma \models_{\mathcal{K}} F$ и $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \neg F$. Тогда, поскольку формулы из Γ тождественно истинны на модели $\mathfrak{M}$, истинными на $\mathfrak{M}$ должны быть обе формулы F и $\neg F$. Получили противоречие, доказывающее теорему.

Установленная в этом параграфе зависимость между понятиями выводимости и логического следования и, в частности, между понятиями теоремы и логически общезначимой формулы помогает оправдать выбор набора логических аксиом и правил вывода для теорий первого порядка. Мы полностью обоснуем его, если докажем, что в любой теории первого порядка класс теорем совпадает с классом общезначимых формул и, более того, понятие логического следования совпадает с понятием выводимости. Этому и посвящены следующие параграфы.

Следующая теорема дает важное достаточное условие непротиворечивости.

ТЕОРЕМА О НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ. *Если множество формул теории первого порядка имеет модель, то оно непротиворечиво.*

Доказательство. Пусть множество формул Γ имеет модель $\mathfrak{M}$ в теории $\mathcal{K}$. Если бы Γ было противоречивым, то нашлась бы замкнутая формула F в $\mathcal{K}$ такая, что $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$ и $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg F$. Отсюда, в силу доказанного выше предложения, выполнялось бы $\Gamma \models_{\mathcal{K}} F$ и $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \neg F$. Тогда, поскольку формулы из Γ тождественно истинны на модели $\mathfrak{M}$, истинными на $\mathfrak{M}$ должны быть обе формулы F и $\neg F$. Получили противоречие, доказывающее теорему.

Установленная в этом параграфе зависимость между понятиями выводимости и логического следования и, в частности, между понятиями теоремы и логически общезначимой формулы помогает оправдать выбор набора логических аксиом и правил вывода для теорий первого порядка. Мы полностью обоснуем его, если докажем, что в любой теории первого порядка класс теорем совпадает с классом общезначимых формул и, более того, понятие логического следования совпадает с понятием выводимости. Этому и посвящены следующие параграфы.

Следующая теорема дает важное достаточное условие непротиворечивости.

ТЕОРЕМА О НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ. *Если множество формул теории первого порядка имеет модель, то оно непротиворечиво.*

Доказательство. Пусть множество формул Γ имеет модель $\mathfrak{M}$ в теории $\mathcal{K}$. Если бы Γ было противоречивым, то нашлась бы замкнутая формула F в $\mathcal{K}$ такая, что $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$ и $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg F$. Отсюда, в силу доказанного выше предложения, выполнялось бы $\Gamma \models_{\mathcal{K}} F$ и $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \neg F$. Тогда, поскольку формулы из Γ тождественно истинны на модели $\mathfrak{M}$, истинными на $\mathfrak{M}$ должны быть обе формулы F и $\neg F$. Получили противоречие, доказывающее теорему.

Установленная в этом параграфе зависимость между понятиями выводимости и логического следования и, в частности, между понятиями теоремы и логически общезначимой формулы помогает оправдать выбор набора логических аксиом и правил вывода для теорий первого порядка. Мы полностью обоснуем его, если докажем, что в любой теории первого порядка класс теорем совпадает с классом общезначимых формул и, более того, понятие логического следования совпадает с понятием выводимости. Этому и посвящены следующие параграфы.

Теорема о дедукции, доказанная французским математиком *Жаком Эрбраном* в 1930 году, является первым существенным шагом, приближающим нас к поставленной цели. Из логики предикатов мы знаем, что условие $F \models G$ равносильно общезначимости формулы $F \longrightarrow G$, т.е. условию $\models F \longrightarrow G$; здесь F – замкнутая формула. Очевидно, этим свойством обладают формулы любой теории первого порядка. Оказывается, нечто подобное имеет место и в том случае, если знак $\models$ логического следования заменить на знак $\vdash$ выводимости, а именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ. *Пусть Γ – некоторое множество формул теории первого порядка и F, G – какие-то формулы, причем F замкнута. Тогда $\Gamma \cup \{F\} \vdash G$ в том и только в том случае, если $\Gamma \vdash F \longrightarrow G$.*

Доказательство. Довольно легко проверяется, что условие $\Gamma \vdash F \longrightarrow G$ влечет за собой $\Gamma \cup \{F\} \vdash G$. В самом деле, если $\Gamma \vdash F \longrightarrow G$, то существует вывод $F_1, \ldots, F_n$ формулы $F \longrightarrow G$ из Γ. Добавив к нему две новые формулы $F_{n+1} = F$ и $F_{n+2} = G$, получим вывод $F_1, \ldots, F_n = F \longrightarrow G, F_{n+1} = F, F_{n+2} = G$ формулы G из множества формул $\Gamma \cup \{F\}$; здесь F_{n+1} – гипотеза, а F_{n+2} – непосредственное следствие формул F_n, F_{n+1} по правилу MP.

Теорема о дедукции, доказанная французским математиком *Жаком Эрбраном* в 1930 году, является первым существенным шагом, приближающим нас к поставленной цели. Из логики предикатов мы знаем, что условие $F \models G$ равносильно общезначимости формулы $F \longrightarrow G$, т.е. условию $\models F \longrightarrow G$; здесь F – замкнутая формула. Очевидно, этим свойством обладают формулы любой теории первого порядка. Оказывается, нечто подобное имеет место и в том случае, если знак $\models$ логического следования заменить на знак $\vdash$ выводимости, а именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ. *Пусть Γ – некоторое множество формул теории первого порядка и F, G – какие-то формулы, причем F замкнута. Тогда $\Gamma \cup \{F\} \vdash G$ в том и только в том случае, если $\Gamma \vdash F \longrightarrow G$.*

Доказательство. Довольно легко проверяется, что условие $\Gamma \vdash F \longrightarrow G$ влечет за собой $\Gamma \cup \{F\} \vdash G$. В самом деле, если $\Gamma \vdash F \longrightarrow G$, то существует вывод $F_1, \ldots, F_n$ формулы $F \longrightarrow G$ из Γ. Добавив к нему две новые формулы $F_{n+1} = F$ и $F_{n+2} = G$, получим вывод $F_1, \ldots, F_n = F \longrightarrow G, F_{n+1} = F, F_{n+2} = G$ формулы G из множества формул $\Gamma \cup \{F\}$; здесь F_{n+1} – гипотеза, а F_{n+2} – непосредственное следствие формул F_n, F_{n+1} по правилу MP.

Теорема о дедукции, доказанная французским математиком *Жаком Эрбраном* в 1930 году, является первым существенным шагом, приближающим нас к поставленной цели. Из логики предикатов мы знаем, что условие $F \models G$ равносильно общезначимости формулы $F \longrightarrow G$, т.е. условию $\models F \longrightarrow G$; здесь F – замкнутая формула. Очевидно, этим свойством обладают формулы любой теории первого порядка. Оказывается, нечто подобное имеет место и в том случае, если знак $\models$ логического следования заменить на знак $\vdash$ выводимости, а именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА О ДЕДУКЦИИ. *Пусть* Γ *– некоторое множество формул теории первого порядка и* F, G *– какие-то формулы, причем* F *замкнута. Тогда* $\Gamma \cup \{F\} \vdash G$ *в том и только в том случае, если* $\Gamma \vdash F \longrightarrow G$.

Доказательство. Довольно легко проверяется, что условие $\Gamma \vdash \ F \longrightarrow G$ влечет за собой $\Gamma \cup \{F\} \vdash G$. В самом деле, если $\Gamma \vdash F \longrightarrow G$, то существует вывод $F_1, \ldots, F_n$ формулы $F \longrightarrow G$ из Γ. Добавив к нему две новые формулы $F_{n+1} = F$ и $F_{n+2} = G$, получим вывод $F_1, \ldots, F_n = F \longrightarrow G, F_{n+1} = F, F_{n+2} = G$ формулы G из множества формул $\Gamma \cup \{F\}$; здесь F_{n+1} – гипотеза, а F_{n+2} – непосредственное следствие формул F_n, F_{n+1} по правилу MP.

Обратное утверждение менее тривиально. Пусть $\Gamma \cup \{F\} \vdash G$, т.е. существует последовательность формул $F_1, \ldots, F_n$ такая, что $F_n = G$ и для любого i формула F_i есть либо аксиома, либо гипотеза (т.е. $F_i \in \Gamma$ или $F_i = F$), либо непосредственное следствие каких-то предыдущих формул по одному из правил вывода. Докажем индукцией по i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, что $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_i$.

БАЗА ИНДУКЦИИ: $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_1$. Действительно, имеем одну из трех возможностей F_1 – аксиома или $F_1 \in \Gamma$, или $F_1 = F$. В первых двух случаях последовательность формул $F_1, F_1 \longrightarrow (F \longrightarrow F_1), F \longrightarrow F_1$ является выводом $F \longrightarrow F_1$ из Γ; здесь $F_1 \longrightarrow (F \longrightarrow F_1)$ есть аксиома из схемы (A1) и $F \longrightarrow F_1$ получается из формул $F_1, F_1 \longrightarrow (F \longrightarrow F_1)$ по MP. Пусть $F_1 = F$. Тогда заметим, что формула $F \longrightarrow F$ будет теоремой (ее вывод аналогичен выводу в теории $\mathcal{T}$; см. пример 4 в первом параграфе “Формальные теории”), и потому $\Gamma \vdash F \longrightarrow F$.

Обратное утверждение менее тривиально. Пусть $\Gamma \cup \{F\} \vdash G$, т.е. существует последовательность формул $F_1, \ldots, F_n$ такая, что $F_n = G$ и для любого i формула F_i есть либо аксиома, либо гипотеза (т.е. $F_i \in \Gamma$ или $F_i = F$), либо непосредственное следствие каких-то предыдущих формул по одному из правил вывода. Докажем индукцией по i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, что $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_i$.

БАЗА ИНДУКЦИИ: $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_1$. Действительно, имеем одну из трех возможностей F_1 – аксиома или $F_1 \in \Gamma$, или $F_1 = F$. В первых двух случаях последовательность формул $F_1, F_1 \longrightarrow (F \longrightarrow F_1), F \longrightarrow F_1$ является выводом $F \longrightarrow F_1$ из Γ; здесь $F_1 \longrightarrow (F \longrightarrow F_1)$ есть аксиома из схемы (A1) и $F \longrightarrow F_1$ получается из формул $F_1, F_1 \longrightarrow (F \longrightarrow F_1)$ по MP. Пусть $F_1 = F$. Тогда заметим, что формула $F \longrightarrow F$ будет теоремой (ее вывод аналогичен выводу в теории $\mathcal{T}$; см. пример 4 в первом параграфе "Формальные теории"), и потому $\Gamma \vdash F \longrightarrow F$.

ШАГ ИНДУКЦИИ: пусть для всех $i < k$ уже доказано $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_i$; проверим, что $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_k$. Если F_k – аксиома или $F_k \in \Gamma$, или $F_k = F$, то выводимость $F \longrightarrow F_k$ из Γ устанавливается так же как и в базе индукции. Поэтому остается разобрать два случая: $\frac{F_i, F_j}{F_k}$ (MP) и $\frac{F_i}{F_k}$ (ПО), где $i, j < k$.

Пусть $\frac{F_i, F_j}{F_k}$ (MP) и $F_j = F_i \longrightarrow F_k$. Тогда $F \longrightarrow F_i,\ F \longrightarrow F_j \vdash F \longrightarrow F_k$. В самом деле, ниже указан искомый вывод:
(1) $F \longrightarrow F_i$ (гипотеза)
(2) $F \longrightarrow (F_i \longrightarrow F_k)$ (гипотеза)
(3) $(F \longrightarrow (F_i \longrightarrow F_k)) \longrightarrow ((F \longrightarrow F_i) \longrightarrow (F \longrightarrow F_k))$ (схема аксиом (A2))
(4) $(F \longrightarrow F_i) \longrightarrow (F \longrightarrow F_k)$ (из (2), (3) по MP)
(5) $F \longrightarrow F_k$ (из (1), (4) по MP)

По предположению индукции имеем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_i$ и $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_j$, а поскольку $F \longrightarrow F_i,\ F \longrightarrow F_j \vdash F \longrightarrow F_k$, получаем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_k$ (см. Предложение о свойствах выводимости в первом параграфе “Формальные теории”).

ШАГ ИНДУКЦИИ: пусть для всех $i < k$ уже доказано $\Gamma \vdash \ F \longrightarrow F_i$; проверим, что $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_k$. Если F_k – аксиома или $F_k \in \Gamma$, или $F_k = F$, то выводимость $F \longrightarrow F_k$ из Γ устанавливается так же как и в базе индукции. Поэтому остается разобрать два случая: $\frac{F_i, F_j}{F_k}$ (MP) и $\frac{F_i}{F_k}$ (ПО), где $i, j < k$.

Пусть $\frac{F_i, F_j}{F_k}$ (MP) и $F_j = F_i \longrightarrow F_k$. Тогда $F \longrightarrow F_i,\ F \longrightarrow F_j \vdash F \longrightarrow F_k$. В самом деле, ниже указан искомый вывод:
(1) $F \longrightarrow F_i$ (гипотеза)
(2) $F \longrightarrow (F_i \longrightarrow F_k)$ (гипотеза)
(3) $(F \longrightarrow (F_i \longrightarrow F_k)) \longrightarrow ((F \longrightarrow F_i) \longrightarrow (F \longrightarrow F_k))$ (схема аксиом (A2))
(4) $(F \longrightarrow F_i) \longrightarrow (F \longrightarrow F_k)$ (из (2), (3) по MP)
(5) $F \longrightarrow F_k$ (из (1), (4) по MP)

По предположению индукции имеем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_i$ и $\Gamma \vdash F \longrightarrow \ F_j$, а поскольку $F \longrightarrow F_i,\ F \longrightarrow F_j \vdash F \longrightarrow F_k$, получаем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_k$ (см. Предложение о свойствах выводимости в первом параграфе “Формальные теории”).

ШАГ ИНДУКЦИИ: пусть для всех $i < k$ уже доказано $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_i$; проверим, что $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_k$. Если F_k – аксиома или $F_k \in \Gamma$, или $F_k = F$, то выводимость $F \longrightarrow F_k$ из Γ устанавливается так же как и в базе индукции. Поэтому остается разобрать два случая: $\frac{F_i, F_j}{F_k}$ (MP) и $\frac{F_i}{F_k}$ (ПО), где $i, j < k$.

Пусть $\frac{F_i, F_j}{F_k}$ (MP) и $F_j = F_i \longrightarrow F_k$. Тогда $F \longrightarrow F_i,\ F \longrightarrow F_j \vdash F \longrightarrow F_k$. В самом деле, ниже указан искомый вывод:
(1) $F \longrightarrow F_i$ (гипотеза)
(2) $F \longrightarrow (F_i \longrightarrow F_k)$ (гипотеза)
(3) $(F \longrightarrow (F_i \longrightarrow F_k)) \longrightarrow ((F \longrightarrow F_i) \longrightarrow (F \longrightarrow F_k))$ (схема аксиом (A2))
(4) $(F \longrightarrow F_i) \longrightarrow (F \longrightarrow F_k)$ (из (2), (3) по MP)
(5) $F \longrightarrow F_k$ (из (1), (4) по MP)

По предположению индукции имеем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_i$ и $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_j$, а поскольку $F \longrightarrow F_i,\ F \longrightarrow F_j \vdash F \longrightarrow F_k$, получаем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_k$ (см. Предложение о свойствах выводимости в первом параграфе "Формальные теории").

Пусть $\frac{F_i}{F_k}$ (ПО) и $F_k = \forall x F_i$. Тогда построим сначала вывод $F \longrightarrow F_k$ из $F \longrightarrow F_i$:

(1) $F \longrightarrow F_i$ (гипотеза)
(2) $\forall x(F \longrightarrow F_i)$ (из (1) по ПО)
(3) $\forall x(F \longrightarrow F_i) \longrightarrow (F \longrightarrow \forall x F_i)$ (схема аксиом (A4))
(4) $F \longrightarrow \forall x F_i$, т.е. $F \longrightarrow F_k$ (из (2), (3) по MP)

Заметим, что формула (3) этого вывода действительно является аксиомой, т.к. переменная x не входит свободно в F; это единственное место в доказательстве, где используется замкнутость формулы F.

По предположению индукции имеем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_i$, и в силу того, что $F \longrightarrow F_i \vdash F \longrightarrow F_k$, получаем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_k$.
Итак, мы установили, что $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_i$ для любого индекса i от 1 до n. Полагая теперь $i = n$, заключаем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_n$, т.е. $\Gamma \vdash F \longrightarrow G$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть F, G – формулы теории первого порядка, причем F замкнута. Тогда $F \vdash G$ в том и только в том случае, если $\vdash F \longrightarrow G$.*

Пусть $\frac{F_i}{F_k}$ (ПО) и $F_k = \forall x F_i$. Тогда построим сначала вывод $F \longrightarrow F_k$ из $F \longrightarrow F_i$:

(1) $F \longrightarrow F_i$ (гипотеза)
(2) $\forall x(F \longrightarrow F_i)$ (из (1) по ПО)
(3) $\forall x(F \longrightarrow F_i) \longrightarrow (F \longrightarrow \forall x F_i)$ (схема аксиом (A4))
(4) $F \longrightarrow \forall x F_i$, т.е. $F \longrightarrow F_k$ (из (2), (3) по MP)

Заметим, что формула (3) этого вывода действительно является аксиомой, т.к. переменная x не входит свободно в F; это единственное место в доказательстве, где используется замкнутость формулы F.

По предположению индукции имеем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_i$, и в силу того, что $F \longrightarrow F_i \vdash F \longrightarrow F_k$, получаем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_k$.
Итак, мы установили, что $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_i$ для любого индекса i от 1 до n. Полагая теперь $i = n$, заключаем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_n$, т.е. $\Gamma \vdash F \longrightarrow G$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть F, G – формулы теории первого порядка, причем F замкнута. Тогда $F \vdash G$ в том и только в том случае, если $\vdash F \longrightarrow G$.*

Пусть $\frac{F_i}{F_k}$ (ПО) и $F_k = \forall x F_i$. Тогда построим сначала вывод $F \longrightarrow F_k$ из $F \longrightarrow F_i$:

(1) $F \longrightarrow F_i$ (гипотеза)
(2) $\forall x(F \longrightarrow F_i)$ (из (1) по ПО)
(3) $\forall x(F \longrightarrow F_i) \longrightarrow (F \longrightarrow \forall x F_i)$ (схема аксиом (A4))
(4) $F \longrightarrow \forall x F_i$, т.е. $F \longrightarrow F_k$ (из (2), (3) по MP)

Заметим, что формула (3) этого вывода действительно является аксиомой, т.к. переменная x не входит свободно в F; это единственное место в доказательстве, где используется замкнутость формулы F.

По предположению индукции имеем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_i$, и в силу того, что $F \longrightarrow F_i \vdash F \longrightarrow F_k$, получаем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_k$.
Итак, мы установили, что $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_i$ для любого индекса i от 1 до n. Полагая теперь $i = n$, заключаем $\Gamma \vdash F \longrightarrow F_n$, т.е. $\Gamma \vdash F \longrightarrow G$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть F, G – формулы теории первого порядка, причем F замкнута. Тогда $F \vdash G$ в том и только в том случае, если $\vdash F \longrightarrow G$.*

Приведем примеры того, как использование теоремы о дедукции значительно упрощает доказательства некоторых утверждений на выводимость в теориях первого порядка.

ПРИМЕР 1. *Если формула F замкнута, то*

$$F \longrightarrow (G \longrightarrow H),\ G \vdash F \longrightarrow H.$$

Покажем сначала, что $F \longrightarrow (G \longrightarrow H),\ G,\ F \vdash H$. Для этого строим соответствующий вывод:

(1) F (гипотеза)
(2) $F \longrightarrow (G \longrightarrow H)$ (гипотеза)
(3) $G \longrightarrow H$ (из (1), (2) по MP)
(4) G (гипотеза)
(5) H (из (3), (4) по MP)

Применяя теперь к утверждению $F \longrightarrow (G \longrightarrow H),\ G,\ F \vdash H$ теорему о дедукции, получаем $F \longrightarrow (G \longrightarrow H),\ G \vdash F \longrightarrow H$.

Приведем примеры того, как использование теоремы о дедукции значительно упрощает доказательства некоторых утверждений на выводимость в теориях первого порядка.

ПРИМЕР 1. *Если формула F замкнута, то*

$$F \longrightarrow (G \longrightarrow H),\ G \vdash F \longrightarrow H.$$

Покажем сначала, что $F \longrightarrow (G \longrightarrow H),\ G,\ F \vdash H$. Для этого строим соответствующий вывод:

(1) F (гипотеза)
(2) $F \longrightarrow (G \longrightarrow H)$ (гипотеза)
(3) $G \longrightarrow H$ (из (1), (2) по MP)
(4) G (гипотеза)
(5) H (из (3), (4) по MP)

Применяя теперь к утверждению $F \longrightarrow (G \longrightarrow H),\ G,\ F \vdash H$ теорему о дедукции, получаем $F \longrightarrow (G \longrightarrow H),\ G \vdash F \longrightarrow H$.

Приведем примеры того, как использование теоремы о дедукции значительно упрощает доказательства некоторых утверждений на выводимость в теориях первого порядка.

ПРИМЕР 1. *Если формула F замкнута, то*

$$F \longrightarrow (G \longrightarrow H),\ G \vdash F \longrightarrow H.$$

Покажем сначала, что $F \longrightarrow (G \longrightarrow H),\ G,\ F \vdash H$. Для этого строим соответствующий вывод:

(1) F (гипотеза)
(2) $F \longrightarrow (G \longrightarrow H)$ (гипотеза)
(3) $G \longrightarrow H$ (из (1), (2) по MP)
(4) G (гипотеза)
(5) H (из (3), (4) по MP)

Применяя теперь к утверждению $F \longrightarrow (G \longrightarrow H),\ G,\ F \vdash H$ теорему о дедукции, получаем $F \longrightarrow (G \longrightarrow H),\ G \vdash F \longrightarrow H$.

ПРИМЕР 2. *Если формула F замкнута, то*

$$F \longrightarrow G,\ G \longrightarrow H \vdash F \longrightarrow H.$$

Укажем прежде вывод H из формул $F \longrightarrow G$, $G \longrightarrow H$, F:
(1) F (гипотеза)
(2) $F \longrightarrow G$ (гипотеза)
(3) G (из (1), (2) по MP)
(4) $G \longrightarrow H$ (гипотеза)
(5) H (из (3), (4) по MP)

Таким образом, имеем $F \longrightarrow G,\ G \longrightarrow H,\ F \vdash H$ и, по теореме о дедукции, $F \longrightarrow G,\ G \longrightarrow H \vdash F \longrightarrow H$.

ПРИМЕР 2. *Если формула F замкнута, то*

$$F \longrightarrow G,\ G \longrightarrow H \vdash F \longrightarrow H.$$

Укажем прежде вывод H из формул $F \longrightarrow G,\ G \longrightarrow H,\ F$:
(1) F (гипотеза)
(2) $F \longrightarrow G$ (гипотеза)
(3) G (из (1), (2) по MP)
(4) $G \longrightarrow H$ (гипотеза)
(5) H (из (3), (4) по MP)
Таким образом, имеем $F \longrightarrow G,\ G \longrightarrow H,\ F \vdash H$ и, по теореме о дедукции, $F \longrightarrow G,\ G \longrightarrow H \vdash F \longrightarrow H$.

ПРИМЕР 2. *Если формула F замкнута, то*

$$F \longrightarrow G,\ G \longrightarrow H \vdash F \longrightarrow H.$$

Укажем прежде вывод H из формул $F \longrightarrow G$, $G \longrightarrow H$, F:
(1) F (гипотеза)
(2) $F \longrightarrow G$ (гипотеза)
(3) G (из (1), (2) по MP)
(4) $G \longrightarrow H$ (гипотеза)
(5) H (из (3), (4) по MP)

Таким образом, имеем $F \longrightarrow G,\ G \longrightarrow H,\ F \vdash H$ и, по теореме о дедукции, $F \longrightarrow G,\ G \longrightarrow H \vdash F \longrightarrow H$.

ПРИМЕР 3. Для любых замкнутых формул F и G следующие формулы являются теоремами (в произвольной теории первого порядка):

(а) $\neg\neg F \longrightarrow F$;
(б) $F \longrightarrow \neg\neg F$;
(в) $(\neg F \longrightarrow \neg G) \longrightarrow (G \longrightarrow F)$;
(г) $(G \longrightarrow F) \longrightarrow (\neg F \longrightarrow \neg G)$;
(д) $G \longrightarrow (\neg F \longrightarrow \neg(G \longrightarrow F))$;
(е) $\neg(G \longrightarrow F) \longrightarrow \neg F$.

(a) Вывод теоремы $\neg\neg F \longrightarrow F$:

(1) $(\neg F \longrightarrow \neg\neg F) \longrightarrow ((\neg F \longrightarrow \neg F) \longrightarrow F)$ (схема аксиом (A3))
(2) $\neg F \longrightarrow \neg F$ (это теорема; см. пример 4 из пар. “Формальные теории”)
(3) $(\neg F \longrightarrow \neg\neg F) \longrightarrow F$ (из (1), (2) ввиду примера 1)
(4) $\neg\neg F \longrightarrow (\neg F \longrightarrow \neg\neg F)$ (схема аксиом (A1))
(5) $\neg\neg F \longrightarrow F$ (из (3), (4) ввиду примера 2)

(б) Вывод теоремы $F \longrightarrow \neg\neg F$:

(1) $(\neg\neg\neg F \longrightarrow \neg F) \longrightarrow ((\neg\neg\neg F \longrightarrow F) \longrightarrow \neg\neg F)$ (схема аксиом (A3))
(2) $\neg\neg\neg F \longrightarrow \neg F$ (теорема по пункту (а), рассмотренному выше)
(3) $(\neg\neg\neg F \longrightarrow F) \longrightarrow \neg\neg F$ (из (1), (2) по MP)
(4) $F \longrightarrow (\neg\neg\neg F \longrightarrow F)$ (схема аксиом (A1))
(5) $F \longrightarrow \neg\neg F$ (из (3), (4) ввиду примера 2)

(в) Вывод теоремы $(\neg F \longrightarrow \neg G) \longrightarrow (G \longrightarrow F)$.

Сначала установим, что $\neg F \longrightarrow \neg G,\ G \vdash F$:

(1) $\neg F \longrightarrow \neg G$ (гипотеза)
(2) G (гипотеза)
(3) $(\neg F \longrightarrow \neg G) \longrightarrow ((\neg F \longrightarrow G) \longrightarrow F)$ (схема аксиом (A3))
(4) $(\neg F \longrightarrow G) \longrightarrow F$ (из (1), (3) по MP)
(5) $G \longrightarrow (\neg F \longrightarrow G)$ (схема аксиом (A1))
(6) $G \longrightarrow F$ (из (4), (5) ввиду примера 2)
(7) F (из (2), (6) по MP)

Применив теперь дважды к утверждению $\neg F \longrightarrow \neg G,\ G \vdash F$ теорему о дедукции, получим окончательно $\vdash (\neg F \longrightarrow \neg G) \longrightarrow (G \longrightarrow F)$.

(г) Вывод теоремы $(G \longrightarrow F) \longrightarrow (\neg F \longrightarrow \neg G)$.

Покажем прежде, что $G \longrightarrow F \vdash \neg F \longrightarrow \neg G$:

(1) $G \longrightarrow F$ (гипотеза)
(2) $\neg\neg G \longrightarrow G$ (теорема по пункту (а))
(3) $\neg\neg G \longrightarrow F$ (из (1), (2) ввиду примера 2)
(4) $F \longrightarrow \neg\neg F$ (теорема по пункту (б))
(5) $\neg\neg G \longrightarrow \neg\neg F$ (из (3), (4) ввиду примера 2)
(6) $(\neg\neg G \longrightarrow \neg\neg F) \longrightarrow (\neg F \longrightarrow \neg G)$ (теорема по пункту (в))
(7) $\neg F \longrightarrow \neg G$ (из (5), (6) по MP)

Применив к утверждению $G \longrightarrow F \vdash \neg F \longrightarrow \neg G$ теорему о дедукции, получим требуемый результат.

(д) Вывод теоремы $G \longrightarrow (\neg F \longrightarrow \neg(G \longrightarrow F))$.

По правилу MP имеем $G,\ G \longrightarrow F \vdash F$. Дважды пользуясь теоремой о дедукции, получаем $\vdash G \longrightarrow ((G \longrightarrow F) \longrightarrow F)$. В силу пункта (г) выполнено $\vdash ((G \longrightarrow F) \longrightarrow F) \longrightarrow (\neg F \longrightarrow \neg(G \longrightarrow F))$. Отсюда, учитывая пример 2, заключаем, что $\vdash G \longrightarrow (\neg F \longrightarrow \neg(G \longrightarrow F))$.

(е) Вывод теоремы $\neg(G \longrightarrow F) \longrightarrow \neg F$:

(1) $F \longrightarrow (G \longrightarrow F)$ (схема аксиом (A1))
(2) $(F \longrightarrow (G \longrightarrow F)) \longrightarrow (\neg(G \longrightarrow F) \longrightarrow \neg F)$ (теорема по пункту (г))
(3) $\neg(G \longrightarrow F) \longrightarrow \neg F$ (из (1), (2) по MP)

Приводимая в этом параграфе теорема является основным средством в обосновании адекватности выбранной нами аксиоматики в теориях первого порядка. Она представляет собой обращение теоремы о непротиворечивости.

ТЕОРЕМА. *Всякое непротиворечивое множество формул теории первого порядка имеет [счетную] модель.*[1]

[1] Для так называемых *теорий первого порядка с равенством*, которые мы рассмотрим чуть позже, эта теорема будет переформулирована в слегка модифицированном виде.

Доказательство этой теоремы мы разобьем на ряд лемм.

ЛЕММА 1. *Если формулы F и G замкнуты, то*
(а) $\neg F \longrightarrow G,\ \neg F \longrightarrow \neg G \vdash F$;
(б) $G,\ \neg F \vdash \neg(G \longrightarrow F)$;
(в) $\neg(G \longrightarrow F) \vdash \neg F$;
(г) $\neg(G \longrightarrow F) \vdash G$.

Доказательство пункта (а) состоит в построении соответствующего вывода:

(1) $(\neg F \longrightarrow \neg G) \longrightarrow ((\neg F \longrightarrow G) \longrightarrow F)$ (схема аксиом (A3))
(2) $\neg F \longrightarrow G$ (гипотеза)
(3) $(\neg F \longrightarrow \neg G) \longrightarrow F$ (из (1), (2) ввиду примера 1 из параграфа "Теорема о дедукции")
(4) $\neg F \longrightarrow \neg G$ (гипотеза)
(5) F (из (3), (4) по MP)

(б) В силу примера 3(д) параграфа "Теорема о дедукции" имеем $\vdash G \longrightarrow (\neg F \longrightarrow \neg(G \longrightarrow F))$. Применив дважды теорему о дедукции, получим последовательно $G \vdash \neg F \longrightarrow \neg(G \longrightarrow F)$ и $G, \neg F \vdash \neg(G \longrightarrow F)$.

Доказательство этой теоремы мы разобьем на ряд лемм.

ЛЕММА 1. *Если формулы F и G замкнуты, то*
(а) $\neg F \longrightarrow G,\ \neg F \longrightarrow \neg G \vdash F$;
(б) $G,\ \neg F \vdash \neg(G \longrightarrow F)$;
(в) $\neg(G \longrightarrow F) \vdash \neg F$;
(г) $\neg(G \longrightarrow F) \vdash G$.

Доказательство пункта (а) состоит в построении соответствующего вывода:

(1) $(\neg F \longrightarrow \neg G) \longrightarrow ((\neg F \longrightarrow G) \longrightarrow F)$ (схема аксиом (A3))
(2) $\neg F \longrightarrow G$ (гипотеза)
(3) $(\neg F \longrightarrow \neg G) \longrightarrow F$ (из (1), (2) ввиду примера 1 из параграфа "Теорема о дедукции")
(4) $\neg F \longrightarrow \neg G$ (гипотеза)
(5) F (из (3), (4) по MP)

(б) В силу примера 3(д) параграфа "Теорема о дедукции" имеем $\vdash G \longrightarrow (\neg F \longrightarrow \neg(G \longrightarrow F))$. Применив дважды теорему о дедукции, получим последовательно $G \vdash \neg F \longrightarrow \neg(G \longrightarrow F)$ и $G, \neg F \vdash \neg(G \longrightarrow F)$.

Доказательство этой теоремы мы разобьем на ряд лемм.

ЛЕММА 1. *Если формулы F и G замкнуты, то*
(а) $\neg F \longrightarrow G,\ \neg F \longrightarrow \neg G \vdash F$;
(б) $G,\ \neg F \vdash \neg(G \longrightarrow F)$;
(в) $\neg(G \longrightarrow F) \vdash \neg F$;
(г) $\neg(G \longrightarrow F) \vdash G$.

Доказательство пункта (а) состоит в построении соответствующего вывода:

(1) $(\neg F \longrightarrow \neg G) \longrightarrow ((\neg F \longrightarrow G) \longrightarrow F)$ (схема аксиом (А3))
(2) $\neg F \longrightarrow G$ (гипотеза)
(3) $(\neg F \longrightarrow \neg G) \longrightarrow F$ (из (1), (2) ввиду примера 1 из параграфа "Теорема о дедукции")
(4) $\neg F \longrightarrow \neg G$ (гипотеза)
(5) F (из (3), (4) по MP)

(б) В силу примера 3(д) параграфа "Теорема о дедукции" имеем $\vdash G \longrightarrow (\neg F \longrightarrow \neg(G \longrightarrow F))$. Применив дважды теорему о дедукции, получим последовательно $G \vdash \neg F \longrightarrow \neg(G \longrightarrow F)$ и $G, \neg F \vdash \neg(G \longrightarrow F)$.

(в) Ввиду пункта (е) того же примера выполнено $\vdash \neg(G \longrightarrow F) \longrightarrow \neg F$, откуда по теореме о дедукции получаем $\neg(G \longrightarrow F) \vdash \neg F$.

(г) Покажем сначала, что $\neg G, G \vdash F$:

(1) $\neg G$ (гипотеза)
(2) G (гипотеза)
(3) $G \longrightarrow (\neg F \longrightarrow G)$ (схема аксиом (A1))
(4) $\neg G \longrightarrow (\neg F \longrightarrow \neg G)$ (схема аксиом (A1))
(5) $\neg F \longrightarrow \neg G$ (из (1), (4) по MP)
(6) $\neg F \longrightarrow G$ (из (2), (3) по MP)
(7) F (из (5), (6) по пункту (а), рассмотренному выше)

(в) Ввиду пункта (е) того же примера выполнено $\vdash\ \neg(G \longrightarrow\ F) \longrightarrow \neg F$, откуда по теореме о дедукции получаем $\neg(G \longrightarrow F) \vdash \neg F$.

(г) Покажем сначала, что $\neg G, G \vdash F$:

(1) $\neg G$ (гипотеза)
(2) G (гипотеза)
(3) $G \longrightarrow (\neg F \longrightarrow G)$ (схема аксиом (A1))
(4) $\neg G \longrightarrow (\neg F \longrightarrow \neg G)$ (схема аксиом (A1))
(5) $\neg F \longrightarrow \neg G$ (из (1), (4) по MP)
(6) $\neg F \longrightarrow G$ (из (2), (3) по MP)
(7) F (из (5), (6) по пункту (а), рассмотренному выше)

Итак, имеем $\neg G, G \vdash F$. Отсюда по теореме о дедукции выполнено $\neg G \vdash G \longrightarrow F$ и, снова по той же теореме, $\vdash \neg G \longrightarrow (G \longrightarrow F)$. Теперь построим искомый вывод формулы G из $\neg(G \longrightarrow F)$:

(1) $\neg G \longrightarrow (G \longrightarrow F)$ (теорема)
(2) $\neg(G \longrightarrow F)$ (гипотеза)
(3) $(\neg G \longrightarrow (G \longrightarrow F)) \longrightarrow (\neg(G \longrightarrow F) \longrightarrow \neg\neg G)$ (теорема по пункту (г) примера 3 параграфа “Теорема о дедукции”)
(4) $\neg\neg G \longrightarrow G$ (теорема по пункту (а) того же примера)
(5) $\neg(G \longrightarrow F) \longrightarrow \neg\neg G$ (из (1), (3) по MP)
(6) $\neg(G \longrightarrow F) \longrightarrow G$ (из (4), (5) ввиду примера 2 параграфа “Теорема о дедукции”)
(7) G (из (2), (6) по MP)

Итак, имеем $\neg G, G \vdash F$. Отсюда по теореме о дедукции выполнено $\neg G \vdash G \longrightarrow F$ и, снова по той же теореме, $\vdash \neg G \longrightarrow (G \longrightarrow F)$. Теперь построим искомый вывод формулы G из $\neg(G \longrightarrow F)$:

(1) $\neg G \longrightarrow (G \longrightarrow F)$ (теорема)
(2) $\neg(G \longrightarrow F)$ (гипотеза)
(3) $(\neg G \longrightarrow (G \longrightarrow F)) \longrightarrow (\neg(G \longrightarrow F) \longrightarrow \neg\neg G)$ (теорема по пункту (г) примера 3 параграфа "Теорема о дедукции")
(4) $\neg\neg G \longrightarrow G$ (теорема по пункту (а) того же примера)
(5) $\neg(G \longrightarrow F) \longrightarrow \neg\neg G$ (из (1), (3) по MP)
(6) $\neg(G \longrightarrow F) \longrightarrow G$ (из (4), (5) ввиду примера 2 параграфа "Теорема о дедукции")
(7) G (из (2), (6) по MP)

ЛЕММА 2. *Пусть* Γ *– некоторое множество формул теории первого порядка и* F *– замкнутая формула этой теории. Тогда если множество формул* $\Gamma \cup \{\neg F\}$ *противоречиво, то* $\Gamma \vdash F$.

Доказательство. Пусть $\Gamma \cup \{\neg F\}$ противоречиво, т.е. существует замкнутая формула G такая, что $\Gamma \cup \{\neg F\} \vdash G$ и $\Gamma \cup \{\neg F\} \vdash \neg G$. Учитывая теорему о дедукции, получаем $\Gamma \vdash \neg F \longrightarrow G$ и $\Gamma \vdash \neg F \longrightarrow \neg G$. Отсюда и из установленного в пункте (a) леммы 1 следования $\neg F \longrightarrow G, \neg F \longrightarrow \neg G \vdash F$ заключаем, что $\Gamma \vdash F$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 2 вытекает следующий полезный факт: *если множество формул противоречиво, то из него выводится любая формула* (это утверждение есть синтаксический аналог известного нам тезиса о том, что из лжи следует все, что угодно). В самом деле, пусть Γ противоречиво и F – произвольная формула. Тогда противоречиво и множество формул $\Gamma \cup \{\neg \bar{F}\}$, откуда в силу леммы 2 имеем $\Gamma \vdash \bar{F}$, т.к. формула $\bar{F}$ замкнута. Поэтому, принимая во внимание пример 1 из параграфа “Теорема о непротиворечивости”, получаем $\Gamma \vdash F$.

ЛЕММА 2. *Пусть* Γ *– некоторое множество формул теории первого порядка и* F *– замкнутая формула этой теории. Тогда если множество формул* $\Gamma \cup \{\neg F\}$ *противоречиво, то* $\Gamma \vdash F$.

Доказательство. Пусть $\Gamma \cup \{\neg F\}$ противоречиво, т.е. существует замкнутая формула G такая, что $\Gamma \cup \{\neg F\} \vdash G$ и $\Gamma \cup \{\neg F\} \vdash \neg G$. Учитывая теорему о дедукции, получаем $\Gamma \vdash \neg F \longrightarrow G$ и $\Gamma \vdash \neg F \longrightarrow \neg G$. Отсюда и из установленного в пункте (a) леммы 1 следования $\neg F \longrightarrow G,\ \neg F \longrightarrow \neg G \vdash F$ заключаем, что $\Gamma \vdash F$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 2 вытекает следующий полезный факт: *если множество формул противоречиво, то из него выводится любая формула* (это утверждение есть синтаксический аналог известного нам тезиса о том, что из лжи следует все, что угодно). В самом деле, пусть Γ противоречиво и F – произвольная формула. Тогда противоречиво и множество формул $\Gamma \cup \{\neg \bar{F}\}$, откуда в силу леммы 2 имеем $\Gamma \vdash \bar{F}$, т.к. формула $\bar{F}$ замкнута. Поэтому, принимая во внимание пример 1 из параграфа “Теорема о непротиворечивости”, получаем $\Gamma \vdash F$.

ЛЕММА 2. *Пусть* Γ *– некоторое множество формул теории первого порядка и* F *– замкнутая формула этой теории. Тогда если множество формул* $\Gamma \cup \{\neg F\}$ *противоречиво, то* $\Gamma \vdash F$.

Доказательство. Пусть $\Gamma \cup \{\neg F\}$ противоречиво, т.е. существует замкнутая формула G такая, что $\Gamma \cup \{\neg F\} \vdash G$ и $\Gamma \cup \{\neg F\} \vdash \neg G$. Учитывая теорему о дедукции, получаем $\Gamma \vdash \neg F \longrightarrow G$ и $\Gamma \vdash \neg F \longrightarrow \neg G$. Отсюда и из установленного в пункте (а) леммы 1 следования $\neg F \longrightarrow G, \ \neg F \longrightarrow \neg G \vdash F$ заключаем, что $\Gamma \vdash F$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 2 вытекает следующий полезный факт: *если множество формул противоречиво, то из него выводится любая формула* (это утверждение есть синтаксический аналог известного нам тезиса о том, что из лжи следует все, что угодно). В самом деле, пусть Γ противоречиво и F – произвольная формула. Тогда противоречиво и множество формул $\Gamma \cup \{\neg \bar{F}\}$, откуда в силу леммы 2 имеем $\Gamma \vdash \bar{F}$, т.к. формула $\bar{F}$ замкнута. Поэтому, принимая во внимание пример 1 из параграфа “Теорема о непротиворечивости”, получаем $\Gamma \vdash F$.

Множество Γ формул произвольной теории $\mathcal{K}$ называется *полным в* $\mathcal{K}$, если $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$ или $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg F$ для любой замкнутой формулы F теории $\mathcal{K}$.

Следующее вспомогательное утверждение в честь его автора носит название *леммы Линденбаума*.

ЛЕММА 3. *Всякое непротиворечивое множество формул теории первого порядка содержится в некотором полном непротиворечивом множестве формул этой теории.*

Доказательство. Пусть Γ – непротиворечивое множество формул теории $\mathcal{K}$. Поскольку алфавит теории $\mathcal{K}$ счетен, счетным будет и множество всех ее выражений. Поэтому мы можем перенумеровать все замкнутые формулы в $\mathcal{K}$; пусть $F_1, F_2, \ldots$ – какой-нибудь их пересчет. Следующим образом определим теперь последовательность $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ множеств, состоящих из формул теории $\mathcal{K}$. Считаем $\Gamma_0 = \Gamma$. Предположим далее, что множество Γ_n $(n \geq 0)$ определено. Тогда полагаем $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{F_{n+1}\}$, если $\Gamma_n \nvdash \neg F_{n+1}$, и $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}\}$, если $\Gamma_n \nvdash F_{n+1}$ (заметим, что корректность пошагового построения Γ_{n+1} по множеству формул Γ_n вытекает из непротиворечивости Γ_n, что проверяется ниже; если при этом выполнено одновременно как $\Gamma_n \nvdash \neg F_{n+1}$, так и $\Gamma_n \nvdash F_{n+1}$, то выбираем любую из двух возможностей).

Множество Γ формул произвольной теории $\mathcal{K}$ называется *полным в* $\mathcal{K}$, если $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$ или $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg F$ для любой замкнутой формулы F теории $\mathcal{K}$.

Следующее вспомогательное утверждение в честь его автора носит название *леммы Линденбаума*.

ЛЕММА 3. *Всякое непротиворечивое множество формул теории первого порядка содержится в некотором полном непротиворечивом множестве формул этой теории.*

Доказательство. Пусть Γ – непротиворечивое множество формул теории $\mathcal{K}$. Поскольку алфавит теории $\mathcal{K}$ счетен, счетным будет и множество всех ее выражений. Поэтому мы можем перенумеровать все замкнутые формулы в $\mathcal{K}$; пусть $F_1, F_2, \ldots$ – какой-нибудь их пересчет. Следующим образом определим теперь последовательность $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ множеств, состоящих из формул теории $\mathcal{K}$. Считаем $\Gamma_0 = \Gamma$. Предположим далее, что множество Γ_n ($n \geq 0$) определено. Тогда полагаем $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{F_{n+1}\}$, если $\Gamma_n \nvdash \neg F_{n+1}$, и $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}\}$, если $\Gamma_n \nvdash F_{n+1}$ (заметим, что корректность пошагового построения Γ_{n+1} по множеству формул Γ_n вытекает из непротиворечивости Γ_n, что проверяется ниже; если при этом выполнено одновременно как $\Gamma_n \nvdash \neg F_{n+1}$, так и $\Gamma_n \nvdash F_{n+1}$, то выбираем любую из двух возможностей).

Множество Γ формул произвольной теории $\mathcal{K}$ называется *полным в* $\mathcal{K}$, если $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} F$ или $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg F$ для любой замкнутой формулы F теории $\mathcal{K}$.

Следующее вспомогательное утверждение в честь его автора носит название *леммы Линденбаума*.

ЛЕММА 3. *Всякое непротиворечивое множество формул теории первого порядка содержится в некотором полном непротиворечивом множестве формул этой теории.*

Доказательство. Пусть Γ – непротиворечивое множество формул теории $\mathcal{K}$. Поскольку алфавит теории $\mathcal{K}$ счетен, счетным будет и множество всех ее выражений. Поэтому мы можем перенумеровать все замкнутые формулы в $\mathcal{K}$; пусть $F_1, F_2, \ldots$ – какой-нибудь их пересчет. Следующим образом определим теперь последовательность $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ множеств, состоящих из формул теории $\mathcal{K}$. Считаем $\Gamma_0 = \Gamma$. Предположим далее, что множество Γ_n $(n \geq 0)$ определено. Тогда полагаем $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{F_{n+1}\}$, если $\Gamma_n \nvdash \neg F_{n+1}$, и $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}\}$, если $\Gamma_n \nvdash F_{n+1}$ (заметим, что корректность пошагового построения Γ_{n+1} по множеству формул Γ_n вытекает из непротиворечивости Γ_n, что проверяется ниже; если при этом выполнено одновременно как $\Gamma_n \nvdash \neg F_{n+1}$, так и $\Gamma_n \nvdash F_{n+1}$, то выбираем любую из двух возможностей).

Положим $\Gamma_\infty = \bigcup_n \Gamma_n$. По построению, $\Gamma_\infty \supseteq \Gamma$ и для любой замкнутой формулы F теории $\mathcal{K}$ имеем $\Gamma_\infty \vdash F$ или $\Gamma_\infty \vdash \neg F$, т.е. множество формул Γ_∞ является полным. Действительно, $F = F_{n+1}$ для некоторого натурального n и либо $\Gamma_\infty \supseteq \Gamma_{n+1} \supseteq \{F_{n+1}\}$, либо $\Gamma_\infty \supseteq \Gamma_{n+1} \supseteq \{\neg F_{n+1}\}$.

Для доказательства непротиворечивости Γ_∞ достаточно доказать непротиворечивость каждого из множеств Γ_n, т.к. всякий вывод противоречия из Γ_∞ использует лишь конечное число гипотез и, следовательно, является выводом противоречия уже из некоторого множества Γ_n. Непротиворечивость множества формул Γ_n докажем индукцией по номеру n. По условию, множество $\Gamma_0 = \Gamma$ непротиворечиво. Допустим, что множество Γ_n непротиворечиво и рассмотрим два случая, один из которых обязательно имеет место.

Положим $\Gamma_\infty = \bigcup_n \Gamma_n$. По построению, $\Gamma_\infty \supseteq \Gamma$ и для любой замкнутой формулы F теории $\mathcal{K}$ имеем $\Gamma_\infty \vdash F$ или $\Gamma_\infty \vdash \neg F$, т.е. множество формул Γ_∞ является полным. Действительно, $F = F_{n+1}$ для некоторого натурального n и либо $\Gamma_\infty \supseteq \Gamma_{n+1} \supseteq \{F_{n+1}\}$, либо $\Gamma_\infty \supseteq \Gamma_{n+1} \supseteq \{\neg F_{n+1}\}$.

Для доказательства непротиворечивости Γ_∞ достаточно доказать непротиворечивость каждого из множеств Γ_n, т.к. всякий вывод противоречия из Γ_∞ использует лишь конечное число гипотез и, следовательно, является выводом противоречия уже из некоторого множества Γ_n. Непротиворечивость множества формул Γ_n докажем индукцией по номеру n. По условию, множество $\Gamma_0 = \Gamma$ непротиворечиво. Допустим, что множество Γ_n непротиворечиво и рассмотрим два случая, один из которых обязательно имеет место.

Случай 1: $\Gamma_n \nvdash F_{n+1}$. Тогда в силу леммы 2 множество формул $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}\}$ непротиворечиво.

Случай 2: $\Gamma_n \nvdash \neg F_{n+1}$. Тогда множество формул $\Gamma_n \cup \{\neg\neg F_{n+1}\}$ непротиворечиво в силу той же леммы. Следовательно, поскольку $\neg\neg F_{n+1} \vdash F_{n+1}$ (см. пример 3(a) из параграфа "Теорема о дедукции"), непротиворечивым будет и множество формул $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{F_{n+1}\}$.

Итак, непротиворечивость Γ_n влечет за собой непротиворечивость Γ_{n+1}. Отсюда вытекает непротиворечивость всех формул Γ_n, а потому и множества формул $\Gamma_\infty = \bigcup_n \Gamma_n$. Лемма доказана.

Случай 1: $\Gamma_n \nvdash F_{n+1}$. Тогда в силу леммы 2 множество формул $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}\}$ непротиворечиво.

Случай 2: $\Gamma_n \nvdash \neg F_{n+1}$. Тогда множество формул $\Gamma_n \cup \{\neg\neg F_{n+1}\}$ непротиворечиво в силу той же леммы. Следовательно, поскольку $\neg\neg F_{n+1} \vdash F_{n+1}$ (см. пример 3(a) из параграфа “Теорема о дедукции”), непротиворечивым будет и множество формул $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{F_{n+1}\}$.

Итак, непротиворечивость Γ_n влечет за собой непротиворечивость Γ_{n+1}. Отсюда вытекает непротиворечивость всех формул Γ_n, а потому и множества формул $\Gamma_\infty = \bigcup_n \Gamma_n$. Лемма доказана.

Случай 1: $\Gamma_n \nvdash F_{n+1}$. Тогда в силу леммы 2 множество формул $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}\}$ непротиворечиво.

Случай 2: $\Gamma_n \nvdash \neg F_{n+1}$. Тогда множество формул $\Gamma_n \cup \{\neg\neg F_{n+1}\}$ непротиворечиво в силу той же леммы. Следовательно, поскольку $\neg\neg F_{n+1} \vdash F_{n+1}$ (см. пример 3(a) из параграфа "Теорема о дедукции"), непротиворечивым будет и множество формул $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{F_{n+1}\}$.

Итак, непротиворечивость Γ_n влечет за собой непротиворечивость Γ_{n+1}. Отсюда вытекает непротиворечивость всех формул Γ_n, а потому и множества формул $\Gamma_\infty = \bigcup_n \Gamma_n$. Лемма доказана.

Пусть теория $\mathcal{K}'$ получена из $\mathcal{K}$ добавлением к сигнатуре $\Sigma(\mathcal{K})$ новых символов. В этом случае будем говорить, что $\mathcal{K}'$ является *расширением* теории $\mathcal{K}$.

Назовем всякий терм *замкнутым*, если он не содержит предметных переменных. Очевидно, нульарные функциональные символы суть замкнутые термы.

ЛЕММА 4. *Для любого непротиворечивого множества Γ формул теории $\mathcal{K}$ существует непротиворечивое множество Γ' формул расширения $\mathcal{K}'$ теории $\mathcal{K}$, содержащее Γ и такое, что если $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg\forall x F(x)$, где x – единственная свободная переменная в $F(x)$, то в Γ' найдется формула вида $\neg F(t)$, где t – некоторый замкнутый терм теории $\mathcal{K}'$.*

Пусть теория $\mathcal{K}'$ получена из $\mathcal{K}$ добавлением к сигнатуре $\Sigma(\mathcal{K})$ новых символов. В этом случае будем говорить, что $\mathcal{K}'$ является *расширением* теории $\mathcal{K}$.

Назовем всякий терм *замкнутым*, если он не содержит предметных переменных. Очевидно, нульарные функциональные символы суть замкнутые термы.

ЛЕММА 4. *Для любого непротиворечивого множества Γ формул теории $\mathcal{K}$ существует непротиворечивое множество Γ' формул расширения $\mathcal{K}'$ теории $\mathcal{K}$, содержащее Γ и такое, что если $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg\forall x F(x)$, где x – единственная свободная переменная в $F(x)$, то в Γ' найдется формула вида $\neg F(t)$, где t – некоторый замкнутый терм теории $\mathcal{K}'$.*

Пусть теория $\mathcal{K}'$ получена из $\mathcal{K}$ добавлением к сигнатуре $\Sigma(\mathcal{K})$ новых символов. В этом случае будем говорить, что $\mathcal{K}'$ является *расширением* теории $\mathcal{K}$.

Назовем всякий терм *замкнутым*, если он не содержит предметных переменных. Очевидно, нульарные функциональные символы суть замкнутые термы.

ЛЕММА 4. *Для любого непротиворечивого множества Γ формул теории $\mathcal{K}$ существует непротиворечивое множество Γ' формул расширения $\mathcal{K}'$ теории $\mathcal{K}$, содержащее Γ и такое, что если $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg\forall x F(x)$, где x – единственная свободная переменная в $F(x)$, то в Γ' найдется формула вида $\neg F(t)$, где t – некоторый замкнутый терм теории $\mathcal{K}'$.*

Доказательство. Пусть $F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots$ – какой-нибудь пересчет всех формул теории $\mathcal{K}$, содержащих не более одной свободной переменной и таких, что формулы $\neg\forall x_1 F(x_1), \neg\forall x_2 F(x_2), \ldots$ выводятся из Γ.

Выберем последовательность $t_1, t_2, \ldots$ нульарных функциональных символов таким образом, чтобы $t_k \notin \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}\}$ для всякого k.

Обозначим через $\mathcal{K}'$ (соответственно $\mathcal{K}_n$) расширение теории $\mathcal{K}$, для которого $\Sigma(\mathcal{K}') = \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots\}$ (соответственно $\Sigma(\mathcal{K}_n) = \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$), а через Γ' (соответственно Γ_n) – множество формул $\Gamma \cup \{\neg F_1(t_1), \neg F_2(t_2), \ldots\}$ (соответственно $\Gamma \cup \{\neg F_1(t_1), \neg F_2(t_2), \ldots, \neg F_n(t_n)\}$); при этом считаем $K_0 = \mathcal{K}$ и $\Gamma_0 = \Gamma$.

Покажем, что Γ' непротиворечиво в $\mathcal{K}'$. Действительно, ввиду очевидных равенств $\Gamma' = \bigcup_n \Gamma_n$ и $\Sigma(\mathcal{K}') = \bigcup_n \Sigma(\mathcal{K}_n)$ достаточно установить непротиворечивость каждого множества формул Γ_n в расширении $\mathcal{K}_n$.

Доказательство. Пусть $F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots$ – какой-нибудь пересчет всех формул теории $\mathcal{K}$, содержащих не более одной свободной переменной и таких, что формулы $\neg\forall x_1 F(x_1), \neg\forall x_2 F(x_2), \ldots$ выводятся из Γ.

Выберем последовательность $t_1, t_2, \ldots$ нульарных функциональных символов таким образом, чтобы $t_k \notin \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}\}$ для всякого k.

Обозначим через $\mathcal{K}'$ (соответственно $\mathcal{K}_n$) расширение теории $\mathcal{K}$, для которого $\Sigma(\mathcal{K}') = \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots\}$ (соответственно $\Sigma(\mathcal{K}_n) = \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$), а через Γ' (соответственно Γ_n) – множество формул $\Gamma \cup \{\neg F_1(t_1), \neg F_2(t_2), \ldots\}$ (соответственно $\Gamma \cup \{\neg F_1(t_1), \neg F_2(t_2), \ldots, \neg F_n(t_n)\}$); при этом считаем $K_0 = \mathcal{K}$ и $\Gamma_0 = \Gamma$.

Покажем, что Γ' непротиворечиво в $\mathcal{K}'$. Действительно, ввиду очевидных равенств $\Gamma' = \bigcup_n \Gamma_n$ и $\Sigma(\mathcal{K}') = \bigcup_n \Sigma(\mathcal{K}_n)$ достаточно установить непротиворечивость каждого множества формул Γ_n в расширении $\mathcal{K}_n$.

Доказательство. Пусть $F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots$ – какой-нибудь пересчет всех формул теории $\mathcal{K}$, содержащих не более одной свободной переменной и таких, что формулы $\neg\forall x_1 F(x_1), \neg\forall x_2 F(x_2), \ldots$ выводятся из Γ.

Выберем последовательность $t_1, t_2, \ldots$ нульарных функциональных символов таким образом, чтобы $t_k \notin \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}\}$ для всякого k.

Обозначим через $\mathcal{K}'$ (соответственно $\mathcal{K}_n$) расширение теории $\mathcal{K}$, для которого $\Sigma(\mathcal{K}') = \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots\}$ (соответственно $\Sigma(\mathcal{K}_n) = \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$), а через Γ' (соответственно Γ_n) – множество формул $\Gamma \cup \{\neg F_1(t_1), \neg F_2(t_2), \ldots\}$ (соответственно $\Gamma \cup \{\neg F_1(t_1), \neg F_2(t_2), \ldots, \neg F_n(t_n)\}$); при этом считаем $K_0 = \mathcal{K}$ и $\Gamma_0 = \Gamma$.

Покажем, что Γ' непротиворечиво в $\mathcal{K}'$. Действительно, ввиду очевидных равенств $\Gamma' = \bigcup_n \Gamma_n$ и $\Sigma(\mathcal{K}') = \bigcup_n \Sigma(\mathcal{K}_n)$ достаточно установить непротиворечивость каждого множества формул Γ_n в расширении $\mathcal{K}_n$.

Доказательство. Пусть $F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots$ – какой-нибудь пересчет всех формул теории $\mathcal{K}$, содержащих не более одной свободной переменной и таких, что формулы $\neg\forall x_1 F(x_1), \neg\forall x_2 F(x_2), \ldots$ выводятся из Γ.

Выберем последовательность $t_1, t_2, \ldots$ нульарных функциональных символов таким образом, чтобы $t_k \notin \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}\}$ для всякого k.

Обозначим через $\mathcal{K}'$ (соответственно $\mathcal{K}_n$) расширение теории $\mathcal{K}$, для которого $\Sigma(\mathcal{K}') = \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots\}$ (соответственно $\Sigma(\mathcal{K}_n) = \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$), а через Γ' (соответственно Γ_n) – множество формул $\Gamma \cup \{\neg F_1(t_1), \neg F_2(t_2), \ldots\}$ (соответственно $\Gamma \cup \{\neg F_1(t_1), \neg F_2(t_2), \ldots, \neg F_n(t_n)\}$); при этом считаем $K_0 = \mathcal{K}$ и $\Gamma_0 = \Gamma$.

Покажем, что Γ' непротиворечиво в $\mathcal{K}'$. Действительно, ввиду очевидных равенств $\Gamma' = \bigcup_n \Gamma_n$ и $\Sigma(\mathcal{K}') = \bigcup_n \Sigma(\mathcal{K}_n)$ достаточно установить непротиворечивость каждого множества формул Γ_n в расширении $\mathcal{K}_n$.

Проведем индукцию по n. По условию множество $\Gamma_0 = \Gamma$ непротиворечиво в $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$. Пусть доказана непротиворечивость Γ_n в $\mathcal{K}_n$ и допустим от противного, что множество формул Γ_{n+1} противоречиво в $\mathcal{K}_{n+1}$.
Тогда, поскольку $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}(t_{n+1})\}$ и формула $F_{n+1}(t_{n+1})$ замкнута, применение леммы 2 дает $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_{n+1}} F_{n+1}(t_{n+1})$.
Заменим теперь в последовательности формул, являющейся выводом $F_{n+1}(t_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_{n+1}$, каждое вхождение символа t_{n+1} переменной x_{n+1}.
Так как $t_{n+1} \notin \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, мы получим, очевидно, последовательность формул, которая будет выводом $F_{n+1}(x_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$.
Таким образом, будем иметь $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} F_{n+1}(x_{n+1})$ и, учитывая правило обобщения, $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$.
С другой стороны, имеем $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$, т.к. $\Gamma_n \supseteq \Gamma$ и $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$. Но этого не может быть, поскольку множество формул Γ_n непротиворечиво.
Итак, мы доказали для любого n непротиворечивость Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$, а следовательно, и непротиворечивость Γ' в теории $\mathcal{K}'$.
Из определения множества формул Γ' непосредственно вытекает, что оно подчиняется указанному в лемме условию. Лемма доказана.

Проведем индукцию по n. По условию множество $\Gamma_0 = \Gamma$ непротиворечиво в $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$. Пусть доказана непротиворечивость Γ_n в $\mathcal{K}_n$ и допустим от противного, что множество формул Γ_{n+1} противоречиво в $\mathcal{K}_{n+1}$.
Тогда, поскольку $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}(t_{n+1})\}$ и формула $F_{n+1}(t_{n+1})$ замкнута, применение леммы 2 дает $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_{n+1}} F_{n+1}(t_{n+1})$.
Заменим теперь в последовательности формул, являющейся выводом $F_{n+1}(t_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_{n+1}$, каждое вхождение символа t_{n+1} переменной x_{n+1}.
Так как $t_{n+1} \notin \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, мы получим, очевидно, последовательность формул, которая будет выводом $F_{n+1}(x_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$.
Таким образом, будем иметь $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} F_{n+1}(x_{n+1})$ и, учитывая правило обобщения, $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$.
С другой стороны, имеем $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$, т.к. $\Gamma_n \supseteq \Gamma$ и $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$. Но этого не может быть, поскольку множество формул Γ_n непротиворечиво.
Итак, мы доказали для любого n непротиворечивость Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$, а следовательно, и непротиворечивость Γ' в теории $\mathcal{K}'$.
Из определения множества формул Γ' непосредственно вытекает, что оно подчиняется указанному в лемме условию. Лемма доказана.

Проведем индукцию по n. По условию множество $\Gamma_0 = \Gamma$ непротиворечиво в $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$. Пусть доказана непротиворечивость Γ_n в $\mathcal{K}_n$ и допустим от противного, что множество формул Γ_{n+1} противоречиво в $\mathcal{K}_{n+1}$.
Тогда, поскольку $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}(t_{n+1})\}$ и формула $F_{n+1}(t_{n+1})$ замкнута, применение леммы 2 дает $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_{n+1}} F_{n+1}(t_{n+1})$.
Заменим теперь в последовательности формул, являющейся выводом $F_{n+1}(t_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_{n+1}$, каждое вхождение символа t_{n+1} переменной x_{n+1}.
Так как $t_{n+1} \notin \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, мы получим, очевидно, последовательность формул, которая будет выводом $F_{n+1}(x_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$.
Таким образом, будем иметь $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} F_{n+1}(x_{n+1})$ и, учитывая правило обобщения, $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$.
С другой стороны, имеем $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$, т.к. $\Gamma_n \supseteq \Gamma$ и $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$. Но этого не может быть, поскольку множество формул Γ_n непротиворечиво.
Итак, мы доказали для любого n непротиворечивость Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$, а следовательно, и непротиворечивость Γ' в теории $\mathcal{K}'$.
Из определения множества формул Γ' непосредственно вытекает, что оно подчиняется указанному в лемме условию. Лемма доказана.

Проведем индукцию по n. По условию множество $\Gamma_0 = \Gamma$ непротиворечиво в $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$. Пусть доказана непротиворечивость Γ_n в $\mathcal{K}_n$ и допустим от противного, что множество формул Γ_{n+1} противоречиво в $\mathcal{K}_{n+1}$.
Тогда, поскольку $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}(t_{n+1})\}$ и формула $F_{n+1}(t_{n+1})$ замкнута, применение леммы 2 дает $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_{n+1}} F_{n+1}(t_{n+1})$.
Заменим теперь в последовательности формул, являющейся выводом $F_{n+1}(t_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_{n+1}$, каждое вхождение символа t_{n+1} переменной x_{n+1}.
Так как $t_{n+1} \notin \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, мы получим, очевидно, последовательность формул, которая будет выводом $F_{n+1}(x_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$.
Таким образом, будем иметь $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} F_{n+1}(x_{n+1})$ и, учитывая правило обобщения, $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$.
С другой стороны, имеем $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$, т.к. $\Gamma_n \supseteq \Gamma$ и $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$. Но этого не может быть, поскольку множество формул Γ_n непротиворечиво.
Итак, мы доказали для любого n непротиворечивость Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$, а следовательно, и непротиворечивость Γ' в теории $\mathcal{K}'$.
Из определения множества формул Γ' непосредственно вытекает, что оно подчиняется указанному в лемме условию. Лемма доказана.

Проведем индукцию по n. По условию множество $\Gamma_0 = \Gamma$ непротиворечиво в $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$. Пусть доказана непротиворечивость Γ_n в $\mathcal{K}_n$ и допустим от противного, что множество формул Γ_{n+1} противоречиво в $\mathcal{K}_{n+1}$.
Тогда, поскольку $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}(t_{n+1})\}$ и формула $F_{n+1}(t_{n+1})$ замкнута, применение леммы 2 дает $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_{n+1}} F_{n+1}(t_{n+1})$.
Заменим теперь в последовательности формул, являющейся выводом $F_{n+1}(t_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_{n+1}$, каждое вхождение символа t_{n+1} переменной x_{n+1}.
Так как $t_{n+1} \notin \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, мы получим, очевидно, последовательность формул, которая будет выводом $F_{n+1}(x_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$.
Таким образом, будем иметь $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} F_{n+1}(x_{n+1})$ и, учитывая правило обобщения, $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$.
С другой стороны, имеем $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$, т.к. $\Gamma_n \supseteq \Gamma$ и $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$. Но этого не может быть, поскольку множество формул Γ_n непротиворечиво.
Итак, мы доказали для любого n непротиворечивость Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$, а следовательно, и непротиворечивость Γ' в теории $\mathcal{K}'$.
Из определения множества формул Γ' непосредственно вытекает, что оно подчиняется указанному в лемме условию. Лемма доказана.

Проведем индукцию по n. По условию множество $\Gamma_0 = \Gamma$ непротиворечиво в $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$. Пусть доказана непротиворечивость Γ_n в $\mathcal{K}_n$ и допустим от противного, что множество формул Γ_{n+1} противоречиво в $\mathcal{K}_{n+1}$.

Тогда, поскольку $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}(t_{n+1})\}$ и формула $F_{n+1}(t_{n+1})$ замкнута, применение леммы 2 дает $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_{n+1}} F_{n+1}(t_{n+1})$.

Заменим теперь в последовательности формул, являющейся выводом $F_{n+1}(t_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_{n+1}$, каждое вхождение символа t_{n+1} переменной x_{n+1}.

Так как $t_{n+1} \notin \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, мы получим, очевидно, последовательность формул, которая будет выводом $F_{n+1}(x_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$.

Таким образом, будем иметь $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} F_{n+1}(x_{n+1})$ и, учитывая правило обобщения, $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$.

С другой стороны, имеем $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$, т.к. $\Gamma_n \supseteq \Gamma$ и $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$. Но этого не может быть, поскольку множество формул Γ_n непротиворечиво.

Итак, мы доказали для любого n непротиворечивость Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$, а следовательно, и непротиворечивость Γ' в теории $\mathcal{K}'$.

Из определения множества формул Γ' непосредственно вытекает, что оно подчиняется указанному в лемме условию. Лемма доказана.

Проведем индукцию по n. По условию множество $\Gamma_0 = \Gamma$ непротиворечиво в $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$. Пусть доказана непротиворечивость Γ_n в $\mathcal{K}_n$ и допустим от противного, что множество формул Γ_{n+1} противоречиво в $\mathcal{K}_{n+1}$.
Тогда, поскольку $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}(t_{n+1})\}$ и формула $F_{n+1}(t_{n+1})$ замкнута, применение леммы 2 дает $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_{n+1}} F_{n+1}(t_{n+1})$.
Заменим теперь в последовательности формул, являющейся выводом $F_{n+1}(t_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_{n+1}$, каждое вхождение символа t_{n+1} переменной x_{n+1}.
Так как $t_{n+1} \notin \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, мы получим, очевидно, последовательность формул, которая будет выводом $F_{n+1}(x_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$.
Таким образом, будем иметь $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} F_{n+1}(x_{n+1})$ и, учитывая правило обобщения, $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$.
С другой стороны, имеем $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$, т.к. $\Gamma_n \supseteq \Gamma$ и $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$. Но этого не может быть, поскольку множество формул Γ_n непротиворечиво.
Итак, мы доказали для любого n непротиворечивость Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$, а следовательно, и непротиворечивость Γ' в теории $\mathcal{K}'$.
Из определения множества формул Γ' непосредственно вытекает, что оно подчиняется указанному в лемме условию. Лемма доказана.

Проведем индукцию по n. По условию множество $\Gamma_0 = \Gamma$ непротиворечиво в $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}$. Пусть доказана непротиворечивость Γ_n в $\mathcal{K}_n$ и допустим от противного, что множество формул Γ_{n+1} противоречиво в $\mathcal{K}_{n+1}$.
Тогда, поскольку $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg F_{n+1}(t_{n+1})\}$ и формула $F_{n+1}(t_{n+1})$ замкнута, применение леммы 2 дает $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_{n+1}} F_{n+1}(t_{n+1})$.
Заменим теперь в последовательности формул, являющейся выводом $F_{n+1}(t_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_{n+1}$, каждое вхождение символа t_{n+1} переменной x_{n+1}.
Так как $t_{n+1} \notin \Sigma(\mathcal{K}) \cup \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, мы получим, очевидно, последовательность формул, которая будет выводом $F_{n+1}(x_{n+1})$ из Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$.
Таким образом, будем иметь $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} F_{n+1}(x_{n+1})$ и, учитывая правило обобщения, $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$.
С другой стороны, имеем $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{K}_n} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$, т.к. $\Gamma_n \supseteq \Gamma$ и $\Gamma \vdash_{\mathcal{K}} \neg\forall x_{n+1} F_{n+1}(x_{n+1})$. Но этого не может быть, поскольку множество формул Γ_n непротиворечиво.
Итак, мы доказали для любого n непротиворечивость Γ_n в теории $\mathcal{K}_n$, а следовательно, и непротиворечивость Γ' в теории $\mathcal{K}'$.
Из определения множества формул Γ' непосредственно вытекает, что оно подчиняется указанному в лемме условию. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Для любого непротиворечивого множества* Γ *формул теории* $\mathcal{K}$ *существует полное непротиворечивое множество* Γ' *формул расширения* $\mathcal{K}'$ *теории* $\mathcal{K}$, *содержащее* Γ *и такое, что если* $\Gamma' \vdash_{\mathcal{K}'} \neg\forall x F(x)$, *где* x *– единственная свободная переменная в* $F(x)$, *то в* Γ' *найдется формула вида* $\neg F(t)$, *где* t *– некоторый замкнутый терм теории* $\mathcal{K}'$.

Доказательство. Применяя поочерёдно леммы 3 и 4, построим возрастающую по включению последовательность $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Phi_1 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq \ldots$ множеств формул и возрастающую по включению сигнатур последовательность $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots$ теорий, обладающие следующими свойствами: для всякого $n \geq 1$ множества формул Γ_n и Φ_n непротиворечивы в $\mathcal{K}_n$, причем Γ_n – полное в $\mathcal{K}_n$ множество, и если $\Gamma_{n-1} \vdash_{\mathcal{K}_{n-1}} \neg\forall x F(x)$, где $F(x)$ содержит не более одной свободной переменной, то в Φ_n существует формула вида $\neg F(t)$ для некоторого замкнутого терма t из $\mathcal{K}_n$.

Положим $\Gamma' = \bigcup_n \Gamma_n = \bigcup_n \Phi_n$, а в качестве $\mathcal{K}'$ возьмем расширение теории $\mathcal{K}$ такое, что $\Sigma(\mathcal{K}') = \bigcup_n \Sigma(\mathcal{K}_n)$. Тогда легко видеть, что множество формул Γ' и теория $\mathcal{K}'$ удовлетворяют приведенным в условии леммы требованиям. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Для любого непротиворечивого множества* Γ *формул теории* $\mathcal{K}$ *существует полное непротиворечивое множество* Γ' *формул расширения* $\mathcal{K}'$ *теории* $\mathcal{K}$, *содержащее* Γ *и такое, что если* $\Gamma' \vdash_{\mathcal{K}'} \neg\forall x F(x)$, *где* x – *единственная свободная переменная в* $F(x)$, *то в* Γ' *найдется формула вида* $\neg F(t)$, *где* t – *некоторый замкнутый терм теории* $\mathcal{K}'$.

Доказательство. Применяя поочерёдно леммы 3 и 4, построим возрастающую по включению последовательность $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Phi_1 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq \ldots$ множеств формул и возрастающую по включению сигнатур последовательность $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots$ теорий, обладающие следующими свойствами: для всякого $n \geq 1$ множества формул Γ_n и Φ_n непротиворечивы в $\mathcal{K}_n$, причем Γ_n – полное в $\mathcal{K}_n$ множество, и если $\Gamma_{n-1} \vdash_{\mathcal{K}_{n-1}} \neg\forall x F(x)$, где $F(x)$ содержит не более одной свободной переменной, то в Φ_n существует формула вида $\neg F(t)$ для некоторого замкнутого терма t из $\mathcal{K}_n$.

Положим $\Gamma' = \bigcup_n \Gamma_n = \bigcup_n \Phi_n$, а в качестве $\mathcal{K}'$ возьмем расширение теории $\mathcal{K}$ такое, что $\Sigma(\mathcal{K}') = \bigcup_n \Sigma(\mathcal{K}_n)$. Тогда легко видеть, что множество формул Γ' и теория $\mathcal{K}'$ удовлетворяют приведенным в условии леммы требованиям. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Для любого непротиворечивого множества* Γ *формул теории* $\mathcal{K}$ *существует полное непротиворечивое множество* Γ' *формул расширения* $\mathcal{K}'$ *теории* $\mathcal{K}$, *содержащее* Γ *и такое, что если* $\Gamma' \vdash_{\mathcal{K}'} \neg\forall x F(x)$, *где* x *– единственная свободная переменная в* $F(x)$, *то в* Γ' *найдется формула вида* $\neg F(t)$, *где* t *– некоторый замкнутый терм теории* $\mathcal{K}'$.

Доказательство. Применяя поочерёдно леммы 3 и 4, построим возрастающую по включению последовательность $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Phi_1 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq \ldots$ множеств формул и возрастающую по включению сигнатур последовательность $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots$ теорий, обладающие следующими свойствами: для всякого $n \geq 1$ множества формул Γ_n и Φ_n непротиворечивы в $\mathcal{K}_n$, причем Γ_n – полное в $\mathcal{K}_n$ множество, и если $\Gamma_{n-1} \vdash_{\mathcal{K}_{n-1}} \neg\forall x F(x)$, где $F(x)$ содержит не более одной свободной переменной, то в Φ_n существует формула вида $\neg F(t)$ для некоторого замкнутого терма t из $\mathcal{K}_n$.

Положим $\Gamma' = \bigcup_n \Gamma_n = \bigcup_n \Phi_n$, а в качестве $\mathcal{K}'$ возьмем расширение теории $\mathcal{K}$ такое, что $\Sigma(\mathcal{K}') = \bigcup_n \Sigma(\mathcal{K}_n)$. Тогда легко видеть, что множество формул Γ' и теория $\mathcal{K}'$ удовлетворяют приведенным в условии леммы требованиям. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА (обратная к теореме о непротиворечивости). *Всякое непротиворечивое множество формул теории первого порядка имеет [счетную] модель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ – непротиворечивое множество формул теории $\mathcal{K}$. Мы хотим указать модель теории $\mathcal{K}$, на которой истинны все формулы из Γ. Ясно, что такую модель достаточно построить для множества формул Γ', существование которого с заданными свойствами в некотором расширении $\mathcal{K}'$ теории $\mathcal{K}$ обеспечивается леммой 5.

В качестве основного множества искомой модели мы возьмем множество M *всех замкнутых термов* теории $\mathcal{K}'$. Каждому функциональному символу $f^{(n)} \in \Sigma(\mathcal{K}')$ в M соответствует операция f_n, вычисляющая по любым $t_1, t_2, \ldots, t_n \in M$ элемент $f^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in M$; при $n = 0$ символу $f^{(0)}$ соответствует выделенный элемент $f^{(0)} \in M$. Каждый предикатный символ $P^{(n)} \in \Sigma(\mathcal{K}')$ интерпретируется в M предикатом P_n, который определяется следующим образом: для любых $t_1, t_2, \ldots, t_n \in M$ выполнено:

$$P_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{если} \quad \Gamma' \vdash P^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ \mathbf{0}, & \text{если} \quad \Gamma' \nvdash P^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n). \end{cases} \qquad (*)$$

ТЕОРЕМА (обратная к теореме о непротиворечивости). *Всякое непротиворечивое множество формул теории первого порядка имеет [счетную] модель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ – непротиворечивое множество формул теории $\mathcal{K}$. Мы хотим указать модель теории $\mathcal{K}$, на которой истинны все формулы из Γ. Ясно, что такую модель достаточно построить для множества формул Γ', существование которого с заданными свойствами в некотором расширении $\mathcal{K}'$ теории $\mathcal{K}$ обеспечивается леммой 5.

В качестве основного множества искомой модели мы возьмем множество M *всех замкнутых термов* теории $\mathcal{K}'$. Каждому функциональному символу $f^{(n)} \in \Sigma(\mathcal{K}')$ в M соответствует операция f_n, вычисляющая по любым $t_1, t_2, \ldots, t_n \in M$ элемент $f^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in M$; при $n = 0$ символу $f^{(0)}$ соответствует выделенный элемент $f^{(0)} \in M$. Каждый предикатный символ $P^{(n)} \in \Sigma(\mathcal{K}')$ интерпретируется в M предикатом P_n, который определяется следующим образом: для любых $t_1, t_2, \ldots, t_n \in M$ выполнено:

$$P_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{если} \quad \Gamma' \vdash P^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ \mathbf{0}, & \text{если} \quad \Gamma' \nvdash P^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n). \end{cases} \qquad (*)$$

ТЕОРЕМА (обратная к теореме о непротиворечивости). *Всякое непротиворечивое множество формул теории первого порядка имеет [счетную] модель.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ – непротиворечивое множество формул теории $\mathcal{K}$. Мы хотим указать модель теории $\mathcal{K}$, на которой истинны все формулы из Γ. Ясно, что такую модель достаточно построить для множества формул Γ', существование которого с заданными свойствами в некотором расширении $\mathcal{K}'$ теории $\mathcal{K}$ обеспечивается леммой 5.

В качестве основного множества искомой модели мы возьмем множество M *всех замкнутых термов* теории $\mathcal{K}'$. Каждому функциональному символу $f^{(n)} \in \Sigma(\mathcal{K}')$ в M соответствует операция f_n, вычисляющая по любым $t_1, t_2, \ldots, t_n \in M$ элемент $f^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in M$; при $n = 0$ символу $f^{(0)}$ соответствует выделенный элемент $f^{(0)} \in M$. Каждый предикатный символ $P^{(n)} \in \Sigma(\mathcal{K}')$ интерпретируется в M предикатом P_n, который определяется следующим образом: для любых $t_1, t_2, \ldots, t_n \in M$ выполнено:

$$P_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{если} \quad \Gamma' \vdash P^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ \mathbf{0}, & \text{если} \quad \Gamma' \nvdash P^{(n)}(t_1, t_2, \ldots, t_n). \end{cases} \qquad (*)$$

Множество M с указанными операциями и предикатами образует алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ сигнатуры $\Sigma(\mathcal{K}')$. Чтобы доказать, что $\mathfrak{M}$ является моделью $\mathcal{K}'$, на которой истинна всякая формула из Γ', докажем сначала, что *произвольная замкнутая формула F теории $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma' \vdash F$ в теории $\mathcal{K}'$*. Доказательство будем вести индукцией по числу связок и кванторов в F.

Если F есть замкнутая атомарная формула, то, согласно определению $(*)$, она истинна в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma' \vdash F$. Допустим далее, что это утверждение верно для всех замкнутых формул с меньшим, чем у F, числом связок и кванторов. Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1: $F = \neg G$. Если F истинна в $\mathfrak{M}$, то G ложна в $\mathfrak{M}$ и, следовательно, в силу предположения индукции $\Gamma' \nvdash G$. Так как Γ' является полным в $\mathcal{K}'$ множеством формул и G замкнута, имеем $\Gamma' \vdash \neg G$, т.е. $\Gamma' \vdash F$. С другой стороны, если F ложна в $\mathfrak{M}$, то G истинна в $\mathfrak{M}$, и тогда $\Gamma' \vdash G$, а поскольку Γ' непротиворечиво, получаем $\Gamma' \nvdash \neg G$, т.е. $\Gamma' \nvdash F$.

Множество M с указанными операциями и предикатами образует алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ сигнатуры $\Sigma(\mathcal{K}')$. Чтобы доказать, что $\mathfrak{M}$ является моделью $\mathcal{K}'$, на которой истинна всякая формула из Γ', докажем сначала, что *произвольная замкнутая формула F теории $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma' \vdash F$ в теории $\mathcal{K}'$*. Доказательство будем вести индукцией по числу связок и кванторов в F.

Если F есть замкнутая атомарная формула, то, согласно определению $(*)$, она истинна в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma' \vdash F$. Допустим далее, что это утверждение верно для всех замкнутых формул с меньшим, чем у F, числом связок и кванторов. Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1: $F = \neg G$. Если F истинна в $\mathfrak{M}$, то G ложна в $\mathfrak{M}$ и, следовательно, в силу предположения индукции $\Gamma' \nvdash G$. Так как Γ' является полным в $\mathcal{K}'$ множеством формул и G замкнута, имеем $\Gamma' \vdash \neg G$, т.е. $\Gamma' \vdash F$. С другой стороны, если F ложна в $\mathfrak{M}$, то G истинна в $\mathfrak{M}$, и тогда $\Gamma' \vdash G$, а поскольку Γ' непротиворечиво, получаем $\Gamma' \nvdash \neg G$, т.е. $\Gamma' \nvdash F$.

Множество M с указанными операциями и предикатами образует алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ сигнатуры $\Sigma(\mathcal{K}')$. Чтобы доказать, что $\mathfrak{M}$ является моделью $\mathcal{K}'$, на которой истинна всякая формула из Γ', докажем сначала, что *произвольная замкнутая формула F теории $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma' \vdash F$ в теории $\mathcal{K}'$*. Доказательство будем вести индукцией по числу связок и кванторов в F.

Если F есть замкнутая атомарная формула, то, согласно определению $(*)$, она истинна в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma' \vdash F$. Допустим далее, что это утверждение верно для всех замкнутых формул с меньшим, чем у F, числом связок и кванторов. Рассмотрим три возможных случая.

Случай 1: $F = \neg G$. Если F истинна в $\mathfrak{M}$, то G ложна в $\mathfrak{M}$ и, следовательно, в силу предположения индукции $\Gamma' \nvdash G$. Так как Γ' является полным в $\mathcal{K}'$ множеством формул и G замкнута, имеем $\Gamma' \vdash \neg G$, т.е. $\Gamma' \vdash F$. С другой стороны, если F ложна в $\mathfrak{M}$, то G истинна в $\mathfrak{M}$, и тогда $\Gamma' \vdash G$, а поскольку Γ' непротиворечиво, получаем $\Gamma' \nvdash \neg G$, т.е. $\Gamma' \nvdash F$.

Случай 2: $F = G \longrightarrow H$. Из замкнутости F вытекает замкнутость формул G и H. Если F ложна в $\mathfrak{M}$, то G истинна и H ложна в $\mathfrak{M}$. Тогда согласно индуктивному предположению $\Gamma' \vdash G$ и $\Gamma' \nvdash H$. Из полноты Γ' имеем $\Gamma' \vdash \neg H$. Поэтому ввиду того, что $G, \neg H \vdash \neg(G \longrightarrow H)$ по лемме 1(б), справедливо $\Gamma' \vdash \neg(G \longrightarrow H)$, т.е. $\Gamma' \vdash \neg F$ и, в силу непротиворечивости Γ', имеем $\Gamma' \nvdash F$. Обратно, если $\Gamma' \nvdash F$, то из полноты Γ' получаем $\Gamma' \vdash \neg F$, т.е. $\Gamma' \vdash \neg(G \longrightarrow H)$. Тогда, поскольку $\neg(G \longrightarrow H) \vdash G$ и $\neg(G \longrightarrow H) \vdash \neg H$ по лемме 1(в,г), имеем $\Gamma' \vdash G$, $\Gamma' \vdash \neg H$ и, ввиду непротиворечивости Γ', выполнено $\Gamma' \nvdash H$. Отсюда, учитывая предположение индукции, делаем вывод, что G истинна, а H ложна в $\mathfrak{M}$, и значит, формула $F = G \longrightarrow H$ также ложна в $\mathfrak{M}$.

Случай 3: $F = \forall x G$. Если x не входит свободно в G, т.е. G замкнута, то F истинна в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{M}$ истинна G. Принимая во внимание тот факт, что $\Gamma' \vdash F$ тогда и только тогда, когда $\Gamma' \vdash G$, получаем интересующее нас утверждение для F из соответствующего утверждения о G. Поэтому далее считаем, что $G = G(x)$, где x – единственная свободная переменная в G.

Случай 2: $F = G \longrightarrow H$. Из замкнутости F вытекает замкнутость формул G и H. Если F ложна в $\mathfrak{M}$, то G истинна и H ложна в $\mathfrak{M}$. Тогда согласно индуктивному предположению $\Gamma' \vdash G$ и $\Gamma' \nvdash H$. Из полноты Γ' имеем $\Gamma' \vdash \neg H$. Поэтому ввиду того, что $G, \neg H \vdash \neg(G \longrightarrow H)$ по лемме 1(б), справедливо $\Gamma' \vdash \neg(G \longrightarrow H)$, т.е. $\Gamma' \vdash \neg F$ и, в силу непротиворечивости Γ', имеем $\Gamma' \nvdash F$. Обратно, если $\Gamma' \nvdash F$, то из полноты Γ' получаем $\Gamma' \vdash \neg F$, т.е. $\Gamma' \vdash \neg(G \longrightarrow H)$. Тогда, поскольку $\neg(G \longrightarrow H) \vdash G$ и $\neg(G \longrightarrow H) \vdash \neg H$ по лемме 1(в,г), имеем $\Gamma' \vdash G$, $\Gamma' \vdash \neg H$ и, ввиду непротиворечивости Γ', выполнено $\Gamma' \nvdash H$. Отсюда, учитывая предположение индукции, делаем вывод, что G истинна, а H ложна в $\mathfrak{M}$, и значит, формула $F = G \longrightarrow H$ также ложна в $\mathfrak{M}$.

Случай 3: $F = \forall x G$. Если x не входит свободно в G, т.е. G замкнута, то F истинна в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{M}$ истинна G. Принимая во внимание тот факт, что $\Gamma' \vdash F$ тогда и только тогда, когда $\Gamma' \vdash G$, получаем интересующее нас утверждение для F из соответствующего утверждения о G. Поэтому далее считаем, что $G = G(x)$, где x – единственная свободная переменная в G.

Предположим, что F истинна в $\mathfrak{M}$ и тем не менее $\Gamma' \nvdash F$. В силу полноты Γ' имеем $\Gamma' \vdash \neg F$, т.е. $\Gamma' \vdash \neg\forall x G(x)$. Отсюда по известному свойству множества формул Γ' вытекает наличие замкнутого терма t теории $\mathcal{K}'$, для которого $\neg G(t) \in \Gamma'$ и, в частности, $\Gamma' \vdash \neg G(t)$. Так как формула $F = \forall x G(x)$ истинна в $\mathfrak{M}$, то истинна в $\mathfrak{M}$ и формула $G(t)$, откуда по индуктивному предположению получаем $\Gamma' \vdash G(t)$. Но этого быть не может, поскольку $\Gamma' \vdash \neg G(t)$, а Γ' непротиворечиво. Итак, из истинности F в $\mathfrak{M}$ следует $\Gamma' \vdash F$.

Обратно, допустим теперь, что $\Gamma' \vdash F$ и вместе с тем F ложна в $\mathfrak{M}$. Из ложности формулы $\forall x G(x)$ в $\mathfrak{M}$ и из определения основного множества системы $\mathfrak{M}$ как множества M всех замкнутых термов теории $\mathcal{K}'$ вытекает, что для некоторого замкнутого терма t из $\mathcal{K}'$ формула $G(t)$ ложна. С другой стороны, имеем по условию $\Gamma' \vdash \forall x G(x)$. Учитывая аксиому (A5) $\forall x G(x) \longrightarrow G(t)$, получаем $\forall x G(x) \vdash G(t)$ и, следовательно, $\Gamma' \vdash G(t)$. Поэтому в силу индуктивного предположения формула $G(t)$ должна быть истинной в $\mathfrak{M}$, а это не так. Данное противоречие доказывает, что условие $\Gamma' \vdash F$ влечет за собой истинность формулы F в системе $\mathfrak{M}$.

Предположим, что F истинна в $\mathfrak{M}$ и тем не менее $\Gamma' \nvdash F$. В силу полноты Γ' имеем $\Gamma' \vdash \neg F$, т.е. $\Gamma' \vdash \neg\forall x G(x)$. Отсюда по известному свойству множества формул Γ' вытекает наличие замкнутого терма t теории $\mathcal{K}'$, для которого $\neg G(t) \in \Gamma'$ и, в частности, $\Gamma' \vdash \neg G(t)$. Так как формула $F = \forall x G(x)$ истинна в $\mathfrak{M}$, то истинна в $\mathfrak{M}$ и формула $G(t)$, откуда по индуктивному предположению получаем $\Gamma' \vdash G(t)$. Но этого быть не может, поскольку $\Gamma' \vdash \neg G(t)$, а Γ' непротиворечиво. Итак, из истинности F в $\mathfrak{M}$ следует $\Gamma' \vdash F$.

Обратно, допустим теперь, что $\Gamma' \vdash F$ и вместе с тем F ложна в $\mathfrak{M}$. Из ложности формулы $\forall x G(x)$ в $\mathfrak{M}$ и из определения основного множества системы $\mathfrak{M}$ как множества M всех замкнутых термов теории $\mathcal{K}'$ вытекает, что для некоторого замкнутого терма t из $\mathcal{K}'$ формула $G(t)$ ложна. С другой стороны, имеем по условию $\Gamma' \vdash \forall x G(x)$. Учитывая аксиому (A5) $\forall x G(x) \longrightarrow G(t)$, получаем $\forall x G(x) \vdash G(t)$ и, следовательно, $\Gamma' \vdash G(t)$. Поэтому в силу индуктивного предположения формула $G(t)$ должна быть истинной в $\mathfrak{M}$, а это не так. Данное противоречие доказывает, что условие $\Gamma' \vdash F$ влечет за собой истинность формулы F в системе $\mathfrak{M}$.

Таким образом, установлено, что любая замкнутая формула F из $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, если $\Gamma' \vdash F$.

Рассмотрим теперь произвольную формулу G из Γ'. Согласно примеру 1 из параграфа "Теорема о непротиворечивости" имеем $\Gamma' \vdash \bar{G}$, где $\bar{G}$ – замыкание G. По доказанному выше формула $\bar{G}$ истинна в $\mathfrak{M}$, а значит и формула G истинна в $\mathfrak{M}$.

Аналогично проверяется, что всякая аксиома теории $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$, т.е. система $\mathfrak{M}$ является моделью для $\mathcal{K}'$.

Отсюда, поскольку $\Gamma' \supseteq \Gamma$ и $\mathcal{K}'$ есть расширение теории $\mathcal{K}$, получаем, что $\mathfrak{M}$ – модель теории $\mathcal{K}$, на которой истинны все формулы из Γ.

Осталось заметить, что $\mathfrak{M}$ счетна, так как счетно множество всех замкнутых термов теории $\mathcal{K}'$, являющееся по построению основным множеством для $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Таким образом, установлено, что любая замкнутая формула F из $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, если $\Gamma' \vdash F$.

Рассмотрим теперь произвольную формулу G из Γ'. Согласно примеру 1 из параграфа "Теорема о непротиворечивости" имеем $\Gamma' \vdash \bar{G}$, где $\bar{G}$ – замыкание G. По доказанному выше формула $\bar{G}$ истинна в $\mathfrak{M}$, а значит и формула G истинна в $\mathfrak{M}$.

Аналогично проверяется, что всякая аксиома теории $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$, т.е. система $\mathfrak{M}$ является моделью для $\mathcal{K}'$.

Отсюда, поскольку $\Gamma' \supseteq \Gamma$ и $\mathcal{K}'$ есть расширение теории $\mathcal{K}$, получаем, что $\mathfrak{M}$ – модель теории $\mathcal{K}$, на которой истинны все формулы из Γ.

Осталось заметить, что $\mathfrak{M}$ счетна, так как счетно множество всех замкнутых термов теории $\mathcal{K}'$, являющееся по построению основным множеством для $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Таким образом, установлено, что любая замкнутая формула F из $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, если $\Gamma' \vdash F$.

Рассмотрим теперь произвольную формулу G из Γ'. Согласно примеру 1 из параграфа "Теорема о непротиворечивости" имеем $\Gamma' \vdash \bar{G}$, где $\bar{G}$ – замыкание G. По доказанному выше формула $\bar{G}$ истинна в $\mathfrak{M}$, а значит и формула G истинна в $\mathfrak{M}$.

Аналогично проверяется, что всякая аксиома теории $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$, т.е. система $\mathfrak{M}$ является моделью для $\mathcal{K}'$.

Отсюда, поскольку $\Gamma' \supseteq \Gamma$ и $\mathcal{K}'$ есть расширение теории $\mathcal{K}$, получаем, что $\mathfrak{M}$ – модель теории $\mathcal{K}$, на которой истинны все формулы из Γ.

Осталось заметить, что $\mathfrak{M}$ счетна, так как счетно множество всех замкнутых термов теории $\mathcal{K}'$, являющееся по построению основным множеством для $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Таким образом, установлено, что любая замкнутая формула F из $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, если $\Gamma' \vdash F$.

Рассмотрим теперь произвольную формулу G из Γ'. Согласно примеру 1 из параграфа "Теорема о непротиворечивости" имеем $\Gamma' \vdash \bar{G}$, где $\bar{G}$ – замыкание G. По доказанному выше формула $\bar{G}$ истинна в $\mathfrak{M}$, а значит и формула G истинна в $\mathfrak{M}$.

Аналогично проверяется, что всякая аксиома теории $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$, т.е. система $\mathfrak{M}$ является моделью для $\mathcal{K}'$.

Отсюда, поскольку $\Gamma' \supseteq \Gamma$ и $\mathcal{K}'$ есть расширение теории $\mathcal{K}$, получаем, что $\mathfrak{M}$ – модель теории $\mathcal{K}$, на которой истинны все формулы из Γ.

Осталось заметить, что $\mathfrak{M}$ счетна, так как счетно множество всех замкнутых термов теории $\mathcal{K}'$, являющееся по построению основным множеством для $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Таким образом, установлено, что любая замкнутая формула F из $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, если $\Gamma' \vdash F$.

Рассмотрим теперь произвольную формулу G из Γ'. Согласно примеру 1 из параграфа "Теорема о непротиворечивости" имеем $\Gamma' \vdash \bar{G}$, где $\bar{G}$ – замыкание G. По доказанному выше формула $\bar{G}$ истинна в $\mathfrak{M}$, а значит и формула G истинна в $\mathfrak{M}$.

Аналогично проверяется, что всякая аксиома теории $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$, т.е. система $\mathfrak{M}$ является моделью для $\mathcal{K}'$.

Отсюда, поскольку $\Gamma' \supseteq \Gamma$ и $\mathcal{K}'$ есть расширение теории $\mathcal{K}$, получаем, что $\mathfrak{M}$ – модель теории $\mathcal{K}$, на которой истинны все формулы из Γ.

Осталось заметить, что $\mathfrak{M}$ счетна, так как счетно множество всех замкнутых термов теории $\mathcal{K}'$, являющееся по построению основным множеством для $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Таким образом, установлено, что любая замкнутая формула F из $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, если $\Gamma' \vdash F$.

Рассмотрим теперь произвольную формулу G из Γ'. Согласно примеру 1 из параграфа "Теорема о непротиворечивости" имеем $\Gamma' \vdash \bar{G}$, где $\bar{G}$ – замыкание G. По доказанному выше формула $\bar{G}$ истинна в $\mathfrak{M}$, а значит и формула G истинна в $\mathfrak{M}$.

Аналогично проверяется, что всякая аксиома теории $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$, т.е. система $\mathfrak{M}$ является моделью для $\mathcal{K}'$.

Отсюда, поскольку $\Gamma' \supseteq \Gamma$ и $\mathcal{K}'$ есть расширение теории $\mathcal{K}$, получаем, что $\mathfrak{M}$ – модель теории $\mathcal{K}$, на которой истинны все формулы из Γ.

Осталось заметить, что $\mathfrak{M}$ счетна, так как счетно множество всех замкнутых термов теории $\mathcal{K}'$, являющееся по построению основным множеством для $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Таким образом, установлено, что любая замкнутая формула F из $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, если $\Gamma' \vdash F$.

Рассмотрим теперь произвольную формулу G из Γ'. Согласно примеру 1 из параграфа "Теорема о непротиворечивости" имеем $\Gamma' \vdash \bar{G}$, где $\bar{G}$ – замыкание G. По доказанному выше формула $\bar{G}$ истинна в $\mathfrak{M}$, а значит и формула G истинна в $\mathfrak{M}$.

Аналогично проверяется, что всякая аксиома теории $\mathcal{K}'$ истинна в $\mathfrak{M}$, т.е. система $\mathfrak{M}$ является моделью для $\mathcal{K}'$.

Отсюда, поскольку $\Gamma' \supseteq \Gamma$ и $\mathcal{K}'$ есть расширение теории $\mathcal{K}$, получаем, что $\mathfrak{M}$ – модель теории $\mathcal{K}$, на которой истинны все формулы из Γ.

Осталось заметить, что $\mathfrak{M}$ счетна, так как счетно множество всех замкнутых термов теории $\mathcal{K}'$, являющееся по построению основным множеством для $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает равноправность синтаксического понятия выводимости и семантического понятия логического следования.

ТЕОРЕМА ОБ АДЕКВАТНОСТИ. *Пусть Γ – некоторое множество формул теории первого порядка и F – произвольная формула. Тогда $\Gamma \vdash F$ в том и только в том случае, если $\Gamma \models F$.*

Доказательство. В параграфе "Теорема о непротиворечивости" было показано, что условие $\Gamma \vdash F$ влечет за собой $\Gamma \models F$. Обратно, пусть $\Gamma \models F$. Это означает, что для любой модели $\mathfrak{M}$ данной теории из того, что все формулы из Γ истинны на $\mathfrak{M}$, следует истинность на $\mathfrak{M}$ формулы F, а потому и ее замыкания $\bar{F}$. Тогда формулы из множества $\Gamma \cup \{\neg \bar{F}\}$ не могут быть одновременно истинными ни на какой модели. Отсюда ввиду доказанной нами теоремы, являющейся обращением теоремы о непротиворечивости, получаем, что множество формул $\Gamma \cup \{\neg \bar{F}\}$ противоречиво. Поэтому в силу леммы 2 предыдущего параграфа имеем $\Gamma \vdash \bar{F}$, так как формула $\bar{F}$ замкнута. Осталось вспомнить, что из условия$\Gamma \vdash \bar{F}$ следует $\Gamma \vdash F$. Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает равноправность синтаксического понятия выводимости и семантического понятия логического следования.

ТЕОРЕМА ОБ АДЕКВАТНОСТИ. *Пусть* Γ *– некоторое множество формул теории первого порядка и* F *– произвольная формула. Тогда* $\Gamma \vdash F$ *в том и только в том случае, если* $\Gamma \models F$.

Доказательство. В параграфе "Теорема о непротиворечивости" было показано, что условие $\Gamma \vdash F$ влечет за собой $\Gamma \models F$. Обратно, пусть $\Gamma \models F$. Это означает, что для любой модели $\mathfrak{M}$ данной теории из того, что все формулы из Γ истинны на $\mathfrak{M}$, следует истинность на $\mathfrak{M}$ формулы F, а потому и ее замыкания $\bar{F}$. Тогда формулы из множества $\Gamma \cup \{\neg \bar{F}\}$ не могут быть одновременно истинными ни на какой модели. Отсюда ввиду доказанной нами теоремы, являющейся обращением теоремы о непротиворечивости, получаем, что множество формул $\Gamma \cup \{\neg \bar{F}\}$ противоречиво. Поэтому в силу леммы 2 предыдущего параграфа имеем $\Gamma \vdash \bar{F}$, так как формула $\bar{F}$ замкнута. Осталось вспомнить, что из условия$\Gamma \vdash \bar{F}$ следует $\Gamma \vdash F$. Теорема доказана.

Полагая в теореме об адекватности $\Gamma = \emptyset$, получаем равноправность условий $\vdash F$ и $\models F$. Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ. *Во всякой теории первого порядка теоремами являются все те и только те формулы, которые логически общезначимы.*

Эта теорема впервые была доказана австрийским математиком *Куртом Гёделем* в 1930 году для классического случая теории исчисления предикатов. Суть ее заключается в том, что указанных пяти схем логических аксиом и двух правил вывода – modus ponens и правила обобщения – вполне достаточно для того, чтобы каждая логически общезначимая формула в теории первого порядка была выводима. В этом смысле *список логических аксиом и правил вывода является полным.*

Так как в теории $\mathcal{T}$ исчисления высказываний логически общезначимые формулы – это в точности тавтологии, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *В теории исчисления высказываний класс теорем совпадает с классом тавтологий.*

Полагая в теореме об адекватности $\Gamma = \emptyset$, получаем равноправность условий $\vdash F$ и $\models F$. Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ. *Во всякой теории первого порядка теоремами являются все те и только те формулы, которые логически общезначимы.*

Эта теорема впервые была доказана австрийским математиком *Куртом Гёделем* в 1930 году для классического случая теории исчисления предикатов. Суть ее заключается в том, что указанных пяти схем логических аксиом и двух правил вывода – modus ponens и правила обобщения – вполне достаточно для того, чтобы каждая логически общезначимая формула в теории первого порядка была выводима. В этом смысле *список логических аксиом и правил вывода является полным.*

Так как в теории $\mathcal{T}$ исчисления высказываний логически общезначимые формулы – это в точности тавтологии, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *В теории исчисления высказываний класс теорем совпадает с классом тавтологий.*

Полагая в теореме об адекватности $\Gamma = \emptyset$, получаем равноправность условий $\vdash F$ и $\models F$. Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ. *Во всякой теории первого порядка теоремами являются все те и только те формулы, которые логически общезначимы.*

Эта теорема впервые была доказана австрийским математиком *Куртом Гёделем* в 1930 году для классического случая теории исчисления предикатов. Суть ее заключается в том, что указанных пяти схем логических аксиом и двух правил вывода – modus ponens и правила обобщения – вполне достаточно для того, чтобы каждая логически общезначимая формула в теории первого порядка была выводима. В этом смысле *список логических аксиом и правил вывода является полным*.

Так как в теории $\mathcal{T}$ исчисления высказываний логически общезначимые формулы – это в точности тавтологии, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *В теории исчисления высказываний класс теорем совпадает с классом тавтологий.*

Полагая в теореме об адекватности $\Gamma = \emptyset$, получаем равноправность условий $\vdash F$ и $\models F$. Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ. *Во всякой теории первого порядка теоремами являются все те и только те формулы, которые логически общезначимы.*

Эта теорема впервые была доказана австрийским математиком *Куртом Гёделем* в 1930 году для классического случая теории исчисления предикатов. Суть ее заключается в том, что указанных пяти схем логических аксиом и двух правил вывода – modus ponens и правила обобщения – вполне достаточно для того, чтобы каждая логически общезначимая формула в теории первого порядка была выводима. В этом смысле *список логических аксиом и правил вывода является полным*.

Так как в теории $\mathcal{T}$ исчисления высказываний логически общезначимые формулы – это в точности тавтологии, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *В теории исчисления высказываний класс теорем совпадает с классом тавтологий.*

В качестве другого следствия развитой нами техники отметим теорему о компактности, доказанную в полной общности в 1936 году советским математиком *Анатолием Ивановичем Мальцевым*.

ТЕОРЕМА О КОМПАКТНОСТИ. *Пусть* Γ *– некоторое множество формул теории первого порядка и* F *– произвольная формула. Тогда* $\Gamma \models F$ *в том и только в том случае, если* $\Delta \models F$ *для некоторого конечного подмножества* Δ *множества* Γ.

В самом деле, заменив в данном утверждении знак $\models$ логического следования знаком $\vdash$ выводимости, мы получим ввиду теоремы об адекватности равносильное ему утверждение, которое, как известно, справедливо (см. предложение о свойствах выводимости, доказанное в первом параграфе аксиоматического метода “Формальные теории”).

В качестве другого следствия развитой нами техники отметим теорему о компактности, доказанную в полной общности в 1936 году советским математиком *Анатолием Ивановичем Мальцевым*.

ТЕОРЕМА О КОМПАКТНОСТИ. *Пусть* Γ *– некоторое множество формул теории первого порядка и* F *– произвольная формула. Тогда* $\Gamma \models F$ *в том и только в том случае, если* $\Delta \models F$ *для некоторого конечного подмножества* Δ *множества* Γ.

В самом деле, заменив в данном утверждении знак $\models$ логического следования знаком $\vdash$ выводимости, мы получим ввиду теоремы об адекватности равносильное ему утверждение, которое, как известно, справедливо (см. предложение о свойствах выводимости, доказанное в первом параграфе аксиоматического метода “Формальные теории”).

Заметим, что если F – логически противоречивая формула (т.е. она ложна при любой интерпретации), то условие $\Gamma \models F$ эквивалентно тому, что Γ не имеет модели. Отсюда и из теоремы о компактности легко вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Множество формул теории первого порядка имеет модель тогда и только тогда, когда каждое его конечное подмножество имеет модель.*

В действительности, это утверждение равносильно теореме о компактности и является одной из ее модификаций.

Заметим, что если F – логически противоречивая формула (т.е. она ложна при любой интерпретации), то условие $\Gamma \models F$ эквивалентно тому, что Γ не имеет модели. Отсюда и из теоремы о компактности легко вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Множество формул теории первого порядка имеет модель тогда и только тогда, когда каждое его конечное подмножество имеет модель.*

В действительности, это утверждение равносильно теореме о компактности и является одной из ее модификаций.

Заметим, что если F – логически противоречивая формула (т.е. она ложна при любой интерпретации), то условие $\Gamma \models F$ эквивалентно тому, что Γ не имеет модели. Отсюда и из теоремы о компактности легко вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Множество формул теории первого порядка имеет модель тогда и только тогда, когда каждое его конечное подмножество имеет модель.*

В действительности, это утверждение равносильно теореме о компактности и является одной из ее модификаций.

В заключение же данного параграфа в качестве еще одного следствия из теоремы о непротиворечивости и из ее обращения отметим такое полезное утверждение:

ТЕОРЕМА ЛЁВЕНГЕЙМА-СКОЛЕМА (1915, 1919). *Если множество формул теории первого порядка имеет модель, то оно имеет и счетную модель.*

Доказательство. Если множество формул Γ имеет модель в теории $\mathcal{K}$, то Γ непротиворечиво в $\mathcal{K}$ (см. параграф "Теорема о непротиворечивости"). Следовательно, в силу обращения теоремы о непротиворечивости Γ имеет счетную модель.

Оказывается, справедливо и более сильное утверждение, доказательство которого мы опускаем (его также называют иногда теоремой Лёвенгейма-Сколема):

Если множество формул теории первого порядка имеет модель, то оно имеет модель любой бесконечной мощности.

Заметим, что здесь требование бесконечности модели существенно.

Как мы увидим, для теорий первого порядка с равенством формулировка этой теоремы будет выглядеть несколько иначе.

В заключение же данного параграфа в качестве еще одного следствия из теоремы о непротиворечивости и из ее обращения отметим такое полезное утверждение:

ТЕОРЕМА ЛЁВЕНГЕЙМА-СКОЛЕМА (1915, 1919). *Если множество формул теории первого порядка имеет модель, то оно имеет и счетную модель.*

Доказательство. Если множество формул Γ имеет модель в теории $\mathcal{K}$, то Γ непротиворечиво в $\mathcal{K}$ (см. параграф "Теорема о непротиворечивости"). Следовательно, в силу обращения теоремы о непротиворечивости Γ имеет счетную модель.

Оказывается, справедливо и более сильное утверждение, доказательство которого мы опускаем (его также называют иногда теоремой Лёвенгейма-Сколема):

Если множество формул теории первого порядка имеет модель, то оно имеет модель любой бесконечной мощности.

Заметим, что здесь требование бесконечности модели существенно.

Как мы увидим, для теорий первого порядка с равенством формулировка этой теоремы будет выглядеть несколько иначе.

В заключение же данного параграфа в качестве еще одного следствия из теоремы о непротиворечивости и из ее обращения отметим такое полезное утверждение:

ТЕОРЕМА ЛЁВЕНГЕЙМА-СКОЛЕМА (1915, 1919). *Если множество формул теории первого порядка имеет модель, то оно имеет и счетную модель.*

Доказательство. Если множество формул Γ имеет модель в теории $\mathcal{K}$, то Γ непротиворечиво в $\mathcal{K}$ (см. параграф "Теорема о непротиворечивости"). Следовательно, в силу обращения теоремы о непротиворечивости Γ имеет счетную модель.

Оказывается, справедливо и более сильное утверждение, доказательство которого мы опускаем (его также называют иногда теоремой Лёвенгейма-Сколема):

Если множество формул теории первого порядка имеет модель, то оно имеет модель любой бесконечной мощности.

Заметим, что здесь требование бесконечности модели существенно.

Как мы увидим, для теорий первого порядка с равенством формулировка этой теоремы будет выглядеть несколько иначе.

В заключение же данного параграфа в качестве еще одного следствия из теоремы о непротиворечивости и из ее обращения отметим такое полезное утверждение:

ТЕОРЕМА ЛЁВЕНГЕЙМА-СКОЛЕМА (1915, 1919). *Если множество формул теории первого порядка имеет модель, то оно имеет и счетную модель.*

Доказательство. Если множество формул Γ имеет модель в теории $\mathcal{K}$, то Γ непротиворечиво в $\mathcal{K}$ (см. параграф "Теорема о непротиворечивости"). Следовательно, в силу обращения теоремы о непротиворечивости Γ имеет счетную модель.

Оказывается, справедливо и более сильное утверждение, доказательство которого мы опускаем (его также называют иногда теоремой Лёвенгейма-Сколема):

Если множество формул теории первого порядка имеет модель, то оно имеет модель любой бесконечной мощности.

Заметим, что здесь требование бесконечности модели существенно.

Как мы увидим, для теорий первого порядка с равенством формулировка этой теоремы будет выглядеть несколько иначе.

В заключение же данного параграфа в качестве еще одного следствия из теоремы о непротиворечивости и из ее обращения отметим такое полезное утверждение:

ТЕОРЕМА ЛЁВЕНГЕЙМА-СКОЛЕМА (1915, 1919). *Если множество формул теории первого порядка имеет модель, то оно имеет и счетную модель.*

Доказательство. Если множество формул Γ имеет модель в теории $\mathcal{K}$, то Γ непротиворечиво в $\mathcal{K}$ (см. параграф "Теорема о непротиворечивости"). Следовательно, в силу обращения теоремы о непротиворечивости Γ имеет счетную модель.

Оказывается, справедливо и более сильное утверждение, доказательство которого мы опускаем (его также называют иногда теоремой Лёвенгейма-Сколема):

Если множество формул теории первого порядка имеет модель, то оно имеет модель любой бесконечной мощности.

Заметим, что здесь требование бесконечности модели существенно.

Как мы увидим, для теорий первого порядка с равенством формулировка этой теоремы будет выглядеть несколько иначе.

Пусть $\mathcal{K}$ – теория первого порядка, сигнатура которой содержит двухместный предикатный символ $E^{(2)}$. Будем сокращенно писать $t = s$ вместо $E^{(2)}(t, s)$ и $t \neq s$ вместо $\neg E^{(2)}(t, s)$. Теория $\mathcal{K}$ называется *теорией первого порядка с равенством*, если следующие формулы являются теоремами $\mathcal{K}$:

(1) $\forall x(x = x)$ (рефлексивность равенства);
(2) $\forall x \forall y(x = y \longrightarrow y = x)$ (симметричность равенства);
(3) $\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z)$ (транзитивность равенства);
(4) $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n(x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \wedge F(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow F(y_1, \dots, y_n))$ (подстановочность равенства);
здесь $F(x_1, \dots, x_n)$ – произвольная формула в $\mathcal{K}$.

ПРИМЕР 1. *Теория абелевых групп*. Ее сигнатура имеет один предикатный символ $=$ и два функциональных символа: $+$ (двухместный) и 0 (нульместный). Собственные аксиомы имеют вид:

(а) $\forall x \forall y \forall z(x + (y + z) = (x + y) + z)$;
(б) $\forall x(x + 0 = x)$;
(в) $\forall x \exists y(x + y = 0)$;
(г) $\forall x \forall y(x + y = y + x)$;
(д) $\forall x(x = x)$;
(е) $\forall x \forall y(x = y \longrightarrow y = x)$;
(ж) $\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z$;
(з) $\forall x \forall y \forall z(x = y \longrightarrow x + z = y + z)$.

ПРИМЕР 2. *Теория полей*. Ее сигнатура содержит один предикатный символ $=$ и четыре функциональных символа: двухместные $+$ и $\cdot$, нульместные 0 и 1. Собственные аксиомы имеют вид:

(а)–(з) из примера 1;
(и) $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$;
(к) $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$;
(л)$\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$;
(м) $\forall x(x \cdot 1 = x)$;
(н) $\forall x(x \neq 0 \longrightarrow \exists y(x \cdot y = 1))$.

Заметим, что аксиомы (а)–(м) определяют *теорию коммутативных ассоциативных колец с единицей*.

ПРИМЕР 1. *Теория абелевых групп*. Ее сигнатура имеет один предикатный символ $=$ и два функциональных символа: $+$ (двухместный) и 0 (нульместный). Собственные аксиомы имеют вид:

(а) $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$;
(б) $\forall x (x + 0 = x)$;
(в) $\forall x \exists y (x + y = 0)$;
(г) $\forall x \forall y (x + y = y + x)$;
(д) $\forall x (x = x)$;
(е) $\forall x \forall y (x = y \longrightarrow y = x)$;
(ж) $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z$;
(з) $\forall x \forall y \forall z (x = y \longrightarrow x + z = y + z)$.

ПРИМЕР 2. *Теория полей*. Ее сигнатура содержит один предикатный символ $=$ и четыре функциональных символа: двухместные $+$ и $\cdot$, нульместные 0 и 1. Собственные аксиомы имеют вид:

(а)–(з) из примера 1;
(и) $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$;
(к) $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$;
(л) $\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$;
(м) $\forall x (x \cdot 1 = x)$;
(н) $\forall x (x \neq 0 \longrightarrow \exists y (x \cdot y = 1))$.

Заметим, что аксиомы (а)–(м) определяют *теорию коммутативных ассоциативных колец с единицей*.

ПРИМЕР 1. *Теория абелевых групп*. Ее сигнатура имеет один предикатный символ $=$ и два функциональных символа: $+$ (двухместный) и 0 (нульместный). Собственные аксиомы имеют вид:

(а) $\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$;
(б) $\forall x (x + 0 = x)$;
(в) $\forall x \exists y (x + y = 0)$;
(г) $\forall x \forall y (x + y = y + x)$;
(д) $\forall x (x = x)$;
(е) $\forall x \forall y (x = y \longrightarrow y = x)$;
(ж) $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z$;
(з) $\forall x \forall y \forall z (x = y \longrightarrow x + z = y + z)$.

ПРИМЕР 2. *Теория полей*. Ее сигнатура содержит один предикатный символ $=$ и четыре функциональных символа: двухместные $+$ и $\cdot$, нульместные 0 и 1. Собственные аксиомы имеют вид:

(а)–(з) из примера 1;
(и) $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$;
(к) $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$;
(л) $\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$;
(м) $\forall x (x \cdot 1 = x)$;
(н) $\forall x (x \neq 0 \longrightarrow \exists y (x \cdot y = 1))$.

Заметим, что аксиомы (а)–(м) определяют *теорию коммутативных ассоциативных колец с единицей*.

Для всякой модели теории первого порядка $\mathcal{K}$ с равенством отношение E, соответствующее в этой модели предикатному символу $=$, является отношением эквивалентности. Если на основном множестве некоторой модели это отношение E оказывается отношением тождества, то такая модель называется *нормальной*.

В силу отмеченной выше *теоремы* (4) *подстановочности равенства* отношение E является стабильным в модели относительно применения операций и предикатов, т.е. является *конгруэнцией* на данной модели. Поэтому всякой модели $\mathfrak{M}$ теории $\mathcal{K}$ можно сопоставить некоторую нормальную модель $\mathfrak{M}'$ теории $\mathcal{K}$. Для этого в качестве основного множества M' новой модели $\mathfrak{M}'$ возьмем множество классов эквивалентности, определяемых отношением E на основном множестве M модели $\mathfrak{M}$. Каждой операции f и каждому предикату P, действующим на M, естественным образом поставим в соответствие операцию f^* и предикат P^* на фактор-множестве M':

$$f^*(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = \overline{f(a_1, \ldots, a_n)} \text{ и } P^*(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = \mathbf{1} \iff P(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{1};$$

здесь $\bar{a}$ – класс эквивалентности, содержащий элемент a. Это определение операций и предикатов на M' не зависит от выбора представителей $a_1, \ldots, a_n$ соответствующих классов эквивалентности. Множество M' с так заданными не нем операциями и предикатами образует систему $\mathfrak{M}'$; она называется *фактор-системой* алгебраической системы $\mathfrak{M}$ по конгруэнции E. Легко понять, что всякая формула, истинная на $\mathfrak{M}$, будет истинна и на $\mathfrak{M}'$, а поскольку $\mathfrak{M}$ есть модель $\mathcal{K}$, моделью теории $\mathcal{K}$ будет и система $\mathfrak{M}'$. Из построения ясно, что для любых элементов $\bar{a}, \bar{b} \in M'$ выполнено $(a, b) \in E \iff \bar{a} = \bar{b}$ и, следовательно, $\mathfrak{M}'$ – нормальная модель теории $\mathcal{K}$.

В силу отмеченной выше *теоремы* (4) *подстановочности равенства* отношение E является стабильным в модели относительно применения операций и предикатов, т.е. является *конгруэнцией* на данной модели. Поэтому всякой модели $\mathfrak{M}$ теории $\mathcal{K}$ можно сопоставить некоторую нормальную модель $\mathfrak{M}'$ теории $\mathcal{K}$. Для этого в качестве основного множества M' новой модели $\mathfrak{M}'$ возьмем множество классов эквивалентности, определяемых отношением E на основном множестве M модели $\mathfrak{M}$. Каждой операции f и каждому предикату P, действующим на M, естественным образом поставим в соответствие операцию f^* и предикат P^* на фактор-множестве M':

$$f^*(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = \overline{f(a_1, \ldots, a_n)} \text{ и } P^*(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = \mathbf{1} \iff P(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{1};$$

здесь $\bar{a}$ – класс эквивалентности, содержащий элемент a. Это определение операций и предикатов на M' не зависит от выбора представителей $a_1, \ldots, a_n$ соответствующих классов эквивалентности. Множество M' с так заданными не нем операциями и предикатами образует систему $\mathfrak{M}'$; она называется *фактор-системой* алгебраической системы $\mathfrak{M}$ по конгруэнции E. Легко понять, что всякая формула, истинная на $\mathfrak{M}$, будет истинна и на $\mathfrak{M}'$, а поскольку $\mathfrak{M}$ есть модель $\mathcal{K}$, моделью теории $\mathcal{K}$ будет и система $\mathfrak{M}'$. Из построения ясно, что для любых элементов $\bar{a}, \bar{b} \in M'$ выполнено $(a, b) \in E \iff \bar{a} = \bar{b}$ и, следовательно, $\mathfrak{M}'$ – нормальная модель теории $\mathcal{K}$.

В силу отмеченной выше *теоремы* (4) *подстановочности равенства* отношение E является стабильным в модели относительно применения операций и предикатов, т.е. является *конгруэнцией* на данной модели. Поэтому всякой модели $\mathfrak{M}$ теории $\mathcal{K}$ можно сопоставить некоторую нормальную модель $\mathfrak{M}'$ теории $\mathcal{K}$. Для этого в качестве основного множества M' новой модели $\mathfrak{M}'$ возьмем множество классов эквивалентности, определяемых отношением E на основном множестве M модели $\mathfrak{M}$. Каждой операции f и каждому предикату P, действующим на M, естественным образом поставим в соответствие операцию f^* и предикат P^* на фактор-множестве M':

$$f^*(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = \overline{f(a_1, \ldots, a_n)} \text{ и } P^*(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = \mathbf{1} \iff P(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{1};$$

здесь $\bar{a}$ – класс эквивалентности, содержащий элемент a. Это определение операций и предикатов на M' не зависит от выбора представителей $a_1, \ldots, a_n$ соответствующих классов эквивалентности. Множество M' с так заданными не нем операциями и предикатами образует систему $\mathfrak{M}'$; она называется *фактор-системой* алгебраической системы $\mathfrak{M}$ по конгруэнции E. Легко понять, что всякая формула, истинная на $\mathfrak{M}$, будет истинна и на $\mathfrak{M}'$, а поскольку $\mathfrak{M}$ есть модель $\mathcal{K}$, моделью теории $\mathcal{K}$ будет и система $\mathfrak{M}'$. Из построения ясно, что для любых элементов $\bar{a}, \bar{b} \in M'$ выполнено $(a, b) \in E \iff \bar{a} = \bar{b}$ и, следовательно, $\mathfrak{M}'$ – нормальная модель теории $\mathcal{K}$.

В силу отмеченной выше *теоремы* (4) *подстановочности равенства* отношение E является стабильным в модели относительно применения операций и предикатов, т.е. является *конгруэнцией* на данной модели. Поэтому всякой модели $\mathfrak{M}$ теории $\mathcal{K}$ можно сопоставить некоторую нормальную модель $\mathfrak{M}'$ теории $\mathcal{K}$. Для этого в качестве основного множества M' новой модели $\mathfrak{M}'$ возьмем множество классов эквивалентности, определяемых отношением E на основном множестве M модели $\mathfrak{M}$. Каждой операции f и каждому предикату P, действующим на M, естественным образом поставим в соответствие операцию f^* и предикат P^* на фактор-множестве M':

$$f^*(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = \overline{f(a_1, \ldots, a_n)} \text{ и } P^*(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = \mathbf{1} \Longleftrightarrow P(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{1};$$

здесь $\bar{a}$ – класс эквивалентности, содержащий элемент a. Это определение операций и предикатов на M' не зависит от выбора представителей $a_1, \ldots, a_n$ соответствующих классов эквивалентности. Множество M' с так заданными не нем операциями и предикатами образует систему $\mathfrak{M}'$; она называется *фактор-системой* алгебраической системы $\mathfrak{M}$ по конгруэнции E. Легко понять, что всякая формула, истинная на $\mathfrak{M}$, будет истинна и на $\mathfrak{M}'$, а поскольку $\mathfrak{M}$ есть модель $\mathcal{K}$, моделью теории $\mathcal{K}$ будет и система $\mathfrak{M}'$.
Из построения ясно, что для любых элементов $\bar{a}, \bar{b} \in M'$ выполнено $(a, b) \in E \Longleftrightarrow \bar{a} = \bar{b}$ и, следовательно, $\mathfrak{M}'$ – нормальная модель теории $\mathcal{K}$.

В силу отмеченной выше *теоремы* (4) *подстановочности равенства* отношение E является стабильным в модели относительно применения операций и предикатов, т.е. является *конгруэнцией* на данной модели. Поэтому всякой модели $\mathfrak{M}$ теории $\mathcal{K}$ можно сопоставить некоторую нормальную модель $\mathfrak{M}'$ теории $\mathcal{K}$. Для этого в качестве основного множества M' новой модели $\mathfrak{M}'$ возьмем множество классов эквивалентности, определяемых отношением E на основном множестве M модели $\mathfrak{M}$. Каждой операции f и каждому предикату P, действующим на M, естественным образом поставим в соответствие операцию f^* и предикат P^* на фактор-множестве M':

$$f^*(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = \overline{f(a_1, \dots, a_n)} \text{ и } P^*(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = \mathbf{1} \iff P(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{1};$$

здесь $\bar{a}$ – класс эквивалентности, содержащий элемент a. Это определение операций и предикатов на M' не зависит от выбора представителей $a_1, \dots, a_n$ соответствующих классов эквивалентности. Множество M' с так заданными не нем операциями и предикатами образует систему $\mathfrak{M}'$; она называется *фактор-системой* алгебраической системы $\mathfrak{M}$ по конгруэнции E. Легко понять, что всякая формула, истинная на $\mathfrak{M}$, будет истинна и на $\mathfrak{M}'$, а поскольку $\mathfrak{M}$ есть модель $\mathcal{K}$, моделью теории $\mathcal{K}$ будет и система $\mathfrak{M}'$. Из построения ясно, что для любых элементов $\bar{a}, \bar{b} \in M'$ выполнено $(a, b) \in E \iff \bar{a} = \bar{b}$ и, следовательно, $\mathfrak{M}'$ – нормальная модель теории $\mathcal{K}$.

Для теорий первого порядка с равенством формулировки некоторых теорем, доказанных в предыдущих параграфах, можно модифицировать, используя понятие нормальной модели. Так, обращение теоремы о непротиворечивости примет следующий вид:

Всякое непротиворечивое множество формул теории первого порядка с равенством имеет конечную или счетную нормальную модель.

Действительно, мы знаем, что любое такое множество формул имеет счетную модель. Очевидно, что факторизация этой модели по соответствующей конгруэнции приводит к нормальной конечной или счетной модели.

Для теорий первого порядка с равенством формулировки некоторых теорем, доказанных в предыдущих параграфах, можно модифицировать, используя понятие нормальной модели. Так, обращение теоремы о непротиворечивости примет следующий вид:

Всякое непротиворечивое множество формул теории первого порядка с равенством имеет конечную или счетную нормальную модель.

Действительно, мы знаем, что любое такое множество формул имеет счетную модель. Очевидно, что факторизация этой модели по соответствующей конгруэнции приводит к нормальной конечной или счетной модели.

Для теорий первого порядка с равенством формулировки некоторых теорем, доказанных в предыдущих параграфах, можно модифицировать, используя понятие нормальной модели. Так, обращение теоремы о непротиворечивости примет следующий вид:

Всякое непротиворечивое множество формул теории первого порядка с равенством имеет конечную или счетную нормальную модель.

Действительно, мы знаем, что любое такое множество формул имеет счетную модель. Очевидно, что факторизация этой модели по соответствующей конгруэнции приводит к нормальной конечной или счетной модели.

Теорема Лёвенгейма-Сколема будет иметь такой вид:

Если множество формул теории первого порядка с равенством имеет бесконечную нормальную модель, то оно имеет и счетную нормальную модель.

В самом деле, пусть множество формул Γ имеет бесконечную нормальную модель $\mathfrak{M}$ в теории $\mathcal{K}$ с равенством. Обозначим через $\mathcal{K}'$ теорию, получающуюся из $\mathcal{K}$ добавлением списка $(*)$ собственных аксиом:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \cdots x_{n-1} \neq x_n),$$

где $n = 2, 3, \ldots$. Так как $\mathfrak{M}$ бесконечна, она является моделью и теории $\mathcal{K}'$. Тогда, как известно, Γ имеет счетную модель $\mathfrak{M}'$ в $\mathcal{K}'$. Пусть $\mathfrak{M}''$ – нормальная модель, полученная из модели $\mathfrak{M}'$ описанным выше способом. Поскольку $\mathfrak{M}''$ удовлетворяет аксиомам $(*)$, она не может быть конечной. Следовательно, $\mathfrak{M}''$ – искомая счетная нормальная модель, на которой истинны все формулы из Γ.

Теорема Лёвенгейма-Сколема будет иметь такой вид:

Если множество формул теории первого порядка с равенством имеет бесконечную нормальную модель, то оно имеет и счетную нормальную модель.

В самом деле, пусть множество формул Γ имеет бесконечную нормальную модель $\mathfrak{M}$ в теории $\mathcal{K}$ с равенством. Обозначим через $\mathcal{K}'$ теорию, получающуюся из $\mathcal{K}$ добавлением списка $(*)$ собственных аксиом:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \cdots x_{n-1} \neq x_n),$$

где $n = 2, 3, \ldots$. Так как $\mathfrak{M}$ бесконечна, она является моделью и теории $\mathcal{K}'$. Тогда, как известно, Γ имеет счетную модель $\mathfrak{M}'$ в $\mathcal{K}'$. Пусть $\mathfrak{M}''$ – нормальная модель, полученная из модели $\mathfrak{M}'$ описанным выше способом. Поскольку $\mathfrak{M}''$ удовлетворяет аксиомам $(*)$, она не может быть конечной. Следовательно, $\mathfrak{M}''$ – искомая счетная нормальная модель, на которой истинны все формулы из Γ.

Усиленная формулировка теоремы Лёвенгейма-Сколема для теорий с равенством примет следующий вид (соответствующее доказательство требует чуть более сложных рассуждений):

Если множество формул теории первого порядка с равенством имеет бесконечную нормальную модель, то оно имеет и нормальную модель любой бесконечной мощности.

Заметим, что в теориях первого порядка с равенством под моделью, как правило, принято понимать то, что мы называем нормальной моделью.

Усиленная формулировка теоремы Лёвенгейма-Сколема для теорий с равенством примет следующий вид (соответствующее доказательство требует чуть более сложных рассуждений):

Если множество формул теории первого порядка с равенством имеет бесконечную нормальную модель, то оно имеет и нормальную модель любой бесконечной мощности.

Заметим, что в теориях первого порядка с равенством под моделью, как правило, принято понимать то, что мы называем нормальной моделью.

Теория $\mathcal{K}$ называется *противоречивой*, если в $\mathcal{K}$ существует замкнутая формула F такая, что как F, так и $\neg F$ суть теоремы теории $\mathcal{K}$. В противном случае $\mathcal{K}$ называется *непротиворечивой*. Если класс моделей теории $\mathcal{K}$ не пуст, то говорят, что $\mathcal{K}$ *имеет модель*.

Ясно, что теория $\mathcal{K}$ непротиворечива (соответственно имеет модель) тогда и только тогда, когда система аксиом $\mathcal{K}$ непротиворечива (соответственно имеет модель).

Поэтому из теоремы о непротиворечивости и ее обращения непосредственно получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Произвольная теория первого порядка непротиворечива в том и только в том случае, если она имеет модель.*

Из этой теоремы вытекает непротиворечивость всех теорий первого порядка, упомянутых нами в предыдущих разделах, и в частности, теорий исчисления высказываний и исчисления предикатов. Приведем более специфический пример, демонстрирующий силу данной теоремы.

Теория $\mathcal{K}$ называется *противоречивой*, если в $\mathcal{K}$ существует замкнутая формула F такая, что как F, так и $\neg F$ суть теоремы теории $\mathcal{K}$. В противном случае $\mathcal{K}$ называется *непротиворечивой*. Если класс моделей теории $\mathcal{K}$ не пуст, то говорят, что $\mathcal{K}$ *имеет модель*.

Ясно, что теория $\mathcal{K}$ непротиворечива (соответственно имеет модель) тогда и только тогда, когда система аксиом $\mathcal{K}$ непротиворечива (соответственно имеет модель).

Поэтому из теоремы о непротиворечивости и ее обращения непосредственно получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Произвольная теория первого порядка непротиворечива в том и только в том случае, если она имеет модель.*

Из этой теоремы вытекает непротиворечивость всех теорий первого порядка, упомянутых нами в предыдущих разделах, и в частности, теорий исчисления высказываний и исчисления предикатов. Приведем более специфический пример, демонстрирующий силу данной теоремы.

Теория $\mathcal{K}$ называется *противоречивой*, если в $\mathcal{K}$ существует замкнутая формула F такая, что как F, так и $\neg F$ суть теоремы теории $\mathcal{K}$. В противном случае $\mathcal{K}$ называется *непротиворечивой*. Если класс моделей теории $\mathcal{K}$ не пуст, то говорят, что $\mathcal{K}$ *имеет модель*.

Ясно, что теория $\mathcal{K}$ непротиворечива (соответственно имеет модель) тогда и только тогда, когда система аксиом $\mathcal{K}$ непротиворечива (соответственно имеет модель).

Поэтому из теоремы о непротиворечивости и ее обращения непосредственно получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Произвольная теория первого порядка непротиворечива в том и только в том случае, если она имеет модель.*

Из этой теоремы вытекает непротиворечивость всех теорий первого порядка, упомянутых нами в предыдущих разделах, и в частности, теорий исчисления высказываний и исчисления предикатов. Приведем более специфический пример, демонстрирующий силу данной теоремы.

Теория $\mathcal{K}$ называется *противоречивой*, если в $\mathcal{K}$ существует замкнутая формула F такая, что как F, так и $\neg F$ суть теоремы теории $\mathcal{K}$. В противном случае $\mathcal{K}$ называется *непротиворечивой*. Если класс моделей теории $\mathcal{K}$ не пуст, то говорят, что $\mathcal{K}$ *имеет модель*.

Ясно, что теория $\mathcal{K}$ непротиворечива (соответственно имеет модель) тогда и только тогда, когда система аксиом $\mathcal{K}$ непротиворечива (соответственно имеет модель).

Поэтому из теоремы о непротиворечивости и ее обращения непосредственно получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Произвольная теория первого порядка непротиворечива в том и только в том случае, если она имеет модель.*

Из этой теоремы вытекает непротиворечивость всех теорий первого порядка, упомянутых нами в предыдущих разделах, и в частности, теорий исчисления высказываний и исчисления предикатов. Приведем более специфический пример, демонстрирующий силу данной теоремы.

ПРИМЕР 1. Доказать непротиворечивость теории $\mathcal{K}$ первого порядка, заданной сигнатурой $\Sigma(\mathcal{K}) = \{P^{(2)}, f^{(1)}\}$ и собственными аксиомами

$$A_1 = \forall x_1 \forall x_2 (P^{(2)}(x_1, x_2) \vee P^{(2)}(x_2, x_1)),$$
$$A_2 = \forall x_1 \forall x_2 (P^{(2)}(x_1, x_2) \longrightarrow P^{(2)}(f^{(1)}(x_2), f^{(1)}(x_1))).$$

Для доказательства непротиворечивости $\mathcal{K}$ нам достаточно указать хотя бы одну модель теории $\mathcal{K}$.

В качестве такой модели мы возьмем множество $\mathbf{R}^+$ положительных действительных чисел с двухместным предикатом естественного порядка $\leq$ и одноместной операцией $f(x) = 1/x$; легко проверяется, что аксиомы A_1 и A_2 истинны на данной системе. Следовательно, по теореме теория $\mathcal{K}$ непротиворечива.

ПРИМЕР 1. Доказать непротиворечивость теории $\mathcal{K}$ первого порядка, заданной сигнатурой $\Sigma(\mathcal{K}) = \{P^{(2)}, f^{(1)}\}$ и собственными аксиомами

$$A_1 = \forall x_1 \forall x_2 (P^{(2)}(x_1, x_2) \vee P^{(2)}(x_2, x_1)),$$
$$A_2 = \forall x_1 \forall x_2 (P^{(2)}(x_1, x_2) \longrightarrow P^{(2)}(f^{(1)}(x_2), f^{(1)}(x_1))).$$

Для доказательства непротиворечивости $\mathcal{K}$ нам достаточно указать хотя бы одну модель теории $\mathcal{K}$.

В качестве такой модели мы возьмем множество $\mathbf{R}^+$ положительных действительных чисел с двухместным предикатом естественного порядка $\leq$ и одноместной операцией $f(x) = 1/x$; легко проверяется, что аксиомы A_1 и A_2 истинны на данной системе. Следовательно, по теореме теория $\mathcal{K}$ непротиворечива.

ПРИМЕР 1. Доказать непротиворечивость теории $\mathcal{K}$ первого порядка, заданной сигнатурой $\Sigma(\mathcal{K}) = \{P^{(2)}, f^{(1)}\}$ и собственными аксиомами

$$A_1 = \forall x_1 \forall x_2 (P^{(2)}(x_1, x_2) \vee P^{(2)}(x_2, x_1)),$$
$$A_2 = \forall x_1 \forall x_2 (P^{(2)}(x_1, x_2) \longrightarrow P^{(2)}(f^{(1)}(x_2), f^{(1)}(x_1))).$$

Для доказательства непротиворечивости $\mathcal{K}$ нам достаточно указать хотя бы одну модель теории $\mathcal{K}$.

В качестве такой модели мы возьмем множество $\mathbf{R}^+$ положительных действительных чисел с двухместным предикатом естественного порядка $\leq$ и одноместной операцией $f(x) = 1/x$; легко проверяется, что аксиомы A_1 и A_2 истинны на данной системе. Следовательно, по теореме теория $\mathcal{K}$ непротиворечива.

Вопрос о непротиворечивости теорий привлек пристальное внимание в математике на рубеже XIX и XX столетий в связи с возникшими в теории множеств парадоксами, или, как их еще называют, *антиномиями*. Теория множеств в том виде, в каком мы ею пользуемся в данном пособии, именуемая ныне *наивной*, была разработана в 70–80-х годах XIX века немецким математиком *Георгом Кантором*. Она быстро получила почти всеобщее признание и стала широко применяться в различных разделах математики и ее приложениях. С первым парадоксом (*антиномией Бурали-Форти*), базирующимся на понятии порядкового числа, математики впервые столкнулись в 1895 году. За ним последовали и другие парадоксы теории множеств; приведем два из них.

АНТИНОМИЯ КАНТОРА (1899). Пусть $\mathbf{U}$ – множество всех множеств. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathbf{U})$ множество всех подмножеств из $\mathbf{U}$. По известной теореме Кантора, мощность множества $\mathbf{U}$ строго меньше мощности множества $\mathcal{B}(\mathbf{U})$. С другой стороны, $\mathcal{B}(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{U}$ по построению. Следовательно, мощность $\mathbf{U}$ не может быть меньше мощности $\mathcal{B}(\mathbf{U})$.

АНТИНОМИЯ РАССЕЛА (1902). Множество X назовем *обыкновенным*, если оно не содержит себя в качестве элемента, т.е. $X \notin X$, и *необыкновенным* – в противном случае. Например, обыкновенным является множество натуральных чисел $\mathbf{N}$, а необыкновенным – множество всех множеств $\mathbf{U}$. Обозначим через S множество всех обыкновенных множеств и поставим вопрос: каким является само S – обыкновенным или необыкновенным? Допустим, что S – обыкновенное множество, т.е. $S \notin S$. Тогда оно должно, как и все обыкновенные множества, быть элементом в S, т.е. $S \in S$. Таким образом, из допущения, что S – обыкновенное множество, вытекает, что оно необыкновенно. Предположим теперь, что S – необыкновенное множество, т.е. $S \in S$. Тогда, поскольку в S входят все и только все обыкновенные множества, делаем вывод, что S обыкновенно. Опять получили противоречие.

АНТИНОМИЯ РАССЕЛА (1902). Множество X назовем *обыкновенным*, если оно не содержит себя в качестве элемента, т.е. $X \notin X$, и *необыкновенным* – в противном случае. Например, обыкновенным является множество натуральных чисел $\mathbf{N}$, а необыкновенным – множество всех множеств $\mathbf{U}$. Обозначим через S множество всех обыкновенных множеств и поставим вопрос: каким является само S – обыкновенным или необыкновенным? Допустим, что S – обыкновенное множество, т.е. $S \notin S$. Тогда оно должно, как и все обыкновенные множества, быть элементом в S, т.е. $S \in S$. Таким образом, из допущения, что S – обыкновенное множество, вытекает, что оно необыкновенно. Предположим теперь, что S – необыкновенное множество, т.е. $S \in S$. Тогда, поскольку в S входят все и только все обыкновенные множества, делаем вывод, что S обыкновенно. Опять получили противоречие.

АНТИНОМИЯ РАССЕЛА (1902). Множество X назовем *обыкновенным*, если оно не содержит себя в качестве элемента, т.е. $X \notin X$, и *необыкновенным* – в противном случае. Например, обыкновенным является множество натуральных чисел $\mathbf{N}$, а необыкновенным – множество всех множеств $\mathbf{U}$. Обозначим через S множество всех обыкновенных множеств и поставим вопрос: каким является само S – обыкновенным или необыкновенным? Допустим, что S – обыкновенное множество, т.е. $S \notin S$. Тогда оно должно, как и все обыкновенные множества, быть элементом в S, т.е. $S \in S$. Таким образом, из допущения, что S – обыкновенное множество, вытекает, что оно необыкновенно. Предположим теперь, что S – необыкновенное множество, т.е. $S \in S$. Тогда, поскольку в S входят все и только все обыкновенные множества, делаем вывод, что S обыкновенно. Опять получили противоречие.

АНТИНОМИЯ РАССЕЛА (1902). Множество X назовем *обыкновенным*, если оно не содержит себя в качестве элемента, т.е. $X \notin X$, и *необыкновенным* – в противном случае. Например, обыкновенным является множество натуральных чисел $\mathbf{N}$, а необыкновенным – множество всех множеств $\mathbf{U}$. Обозначим через S множество всех обыкновенных множеств и поставим вопрос: каким является само S – обыкновенным или необыкновенным? Допустим, что S – обыкновенное множество, т.е. $S \notin S$. Тогда оно должно, как и все обыкновенные множества, быть элементом в S, т.е. $S \in S$. Таким образом, из допущения, что S – обыкновенное множество, вытекает, что оно необыкновенно. Предположим теперь, что S – необыкновенное множество, т.е. $S \in S$. Тогда, поскольку в S входят все и только все обыкновенные множества, делаем вывод, что S обыкновенно. Опять получили противоречие.

АНТИНОМИЯ РАССЕЛА (1902). Множество X назовем *обыкновенным*, если оно не содержит себя в качестве элемента, т.е. $X \notin X$, и *необыкновенным* – в противном случае. Например, обыкновенным является множество натуральных чисел $\mathbf{N}$, а необыкновенным – множество всех множеств $\mathbf{U}$. Обозначим через S множество всех обыкновенных множеств и поставим вопрос: каким является само S – обыкновенным или необыкновенным? Допустим, что S – обыкновенное множество, т.е. $S \notin S$. Тогда оно должно, как и все обыкновенные множества, быть элементом в S, т.е. $S \in S$. Таким образом, из допущения, что S – обыкновенное множество, вытекает, что оно необыкновенно. Предположим теперь, что S – необыкновенное множество, т.е. $S \in S$. Тогда, поскольку в S входят все и только все обыкновенные множества, делаем вывод, что S обыкновенно. Опять получили противоречие.

Появившиеся в теории множеств парадоксы создали кризисную ситуацию в математике. Один из способов устранения противоречий, и тем самым выхода из кризиса, был найден в формализации теории множеств, т.е. аксиоматизации ее на языке логики первого порядка. С помощью аксиом удалось ограничить понятие множества так, чтобы в обновленной теории отсутствовали логические образования, приводящие к противоречиям, такие, например, как множества, содержащие себя в качестве элемента и т.п. В начале прошлого века появилось несколько различных вариантов аксиоматизации теории множеств. Приведем ниже наиболее известную из них – *систему аксиом Цермело-Френкеля* (**ZF**). В ней два первичных понятия: множество и отношение принадлежности.

Появившиеся в теории множеств парадоксы создали кризисную ситуацию в математике. Один из способов устранения противоречий, и тем самым выхода из кризиса, был найден в формализации теории множеств, т.е. аксиоматизации ее на языке логики первого порядка. С помощью аксиом удалось ограничить понятие множества так, чтобы в обновленной теории отсутствовали логические образования, приводящие к противоречиям, такие, например, как множества, содержащие себя в качестве элемента и т.п. В начале прошлого века появилось несколько различных вариантов аксиоматизации теории множеств. Приведем ниже наиболее известную из них – *систему аксиом Цермело-Френкеля* (**ZF**). В ней два первичных понятия: множество и отношение принадлежности.

Появившиеся в теории множеств парадоксы создали кризисную ситуацию в математике. Один из способов устранения противоречий, и тем самым выхода из кризиса, был найден в формализации теории множеств, т.е. аксиоматизации ее на языке логики первого порядка. С помощью аксиом удалось ограничить понятие множества так, чтобы в обновленной теории отсутствовали логические образования, приводящие к противоречиям, такие, например, как множества, содержащие себя в качестве элемента и т.п. В начале прошлого века появилось несколько различных вариантов аксиоматизации теории множеств. Приведем ниже наиболее известную из них – *систему аксиом Цермело-Френкеля* (**ZF**). В ней два первичных понятия: множество и отношение принадлежности.

АКСИОМА ОБЪЁМНОСТИ. *Если всякий элемент множества x является элементом множества y и обратно, то $x = y$*:

$$\forall a(a \in x \longleftrightarrow a \in y) \longrightarrow x = y.$$

АКСИОМА ПУСТОГО МНОЖЕСТВА. *Существует множество, не содержащее элементов*:

$$\exists x \forall a(a \notin x).$$

Из аксиомы объёмности следует единственность такого множества; его обозначают символом $\emptyset$.

АКСИОМА ПАРЫ. *Для любых множеств a и b существует множество, единственными элементами которого являются a и b* (как обычно, оно обозначается $\{a, b\}$ при $a \neq b$ и $\{a\}$ при $a = b$):

$$\forall a \forall b \exists x(a \in x \wedge b \in x \wedge \forall c(c \in x \longrightarrow c = a \vee c = b)).$$

АКСИОМА СУММЫ. *Для всякого множества x существует множество y, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат некоторому множеству z, принадлежащему x*:

$$\forall x \exists y \forall a(a \in y \longleftrightarrow \exists z(z \in x \wedge a \in z)).$$

Это множество y является объединением семейства множеств x.

АКСИОМА ОБЪЁМНОСТИ. *Если всякий элемент множества x является элементом множества y и обратно, то $x = y$*:

$$\forall a(a \in x \longleftrightarrow a \in y) \longrightarrow x = y.$$

АКСИОМА ПУСТОГО МНОЖЕСТВА. *Существует множество, не содержащее элементов*:

$$\exists x \forall a(a \notin x).$$

Из аксиомы объёмности следует единственность такого множества; его обозначают символом $\emptyset$.

АКСИОМА ПАРЫ. *Для любых множеств a и b существует множество, единственными элементами которого являются a и b* (как обычно, оно обозначается $\{a, b\}$ при $a \neq b$ и $\{a\}$ при $a = b$):

$$\forall a \forall b \exists x(a \in x \wedge b \in x \wedge \forall c(c \in x \longrightarrow c = a \vee c = b)).$$

АКСИОМА СУММЫ. *Для всякого множества x существует множество y, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат некоторому множеству z, принадлежащему x*:

$$\forall x \exists y \forall a(a \in y \longleftrightarrow \exists z(z \in x \wedge a \in z)).$$

Это множество y является объединением семейства множеств x.

АКСИОМА ОБЪЁМНОСТИ. *Если всякий элемент множества x является элементом множества y и обратно, то $x = y$*:

$$\forall a(a \in x \longleftrightarrow a \in y) \longrightarrow x = y.$$

АКСИОМА ПУСТОГО МНОЖЕСТВА. *Существует множество, не содержащее элементов*:

$$\exists x \forall a(a \notin x).$$

Из аксиомы объёмности следует единственность такого множества; его обозначают символом $\emptyset$.

АКСИОМА ПАРЫ. *Для любых множеств a и b существует множество, единственными элементами которого являются a и b* (как обычно, оно обозначается $\{a, b\}$ при $a \neq b$ и $\{a\}$ при $a = b$):

$$\forall a \forall b \exists x(a \in x \wedge b \in x \wedge \forall c(c \in x \longrightarrow c = a \vee c = b)).$$

АКСИОМА СУММЫ. *Для всякого множества x существует множество y, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат некоторому множеству z, принадлежащему x*:

$$\forall x \exists y \forall a(a \in y \longleftrightarrow \exists z(z \in x \wedge a \in z)).$$

Это множество y является объединением семейства множеств x.

АКСИОМА ОБЪЁМНОСТИ. *Если всякий элемент множества x является элементом множества y и обратно, то $x = y$*:

$$\forall a(a \in x \longleftrightarrow a \in y) \longrightarrow x = y.$$

АКСИОМА ПУСТОГО МНОЖЕСТВА. *Существует множество, не содержащее элементов*:

$$\exists x \forall a(a \notin x).$$

Из аксиомы объёмности следует единственность такого множества; его обозначают символом $\emptyset$.

АКСИОМА ПАРЫ. *Для любых множеств a и b существует множество, единственными элементами которого являются a и b* (как обычно, оно обозначается $\{a, b\}$ при $a \neq b$ и $\{a\}$ при $a = b$):

$$\forall a \forall b \exists x(a \in x \wedge b \in x \wedge \forall c(c \in x \longrightarrow c = a \vee c = b)).$$

АКСИОМА СУММЫ. *Для всякого множества x существует множество y, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат некоторому множеству z, принадлежащему x*:

$$\forall x \exists y \forall a(a \in y \longleftrightarrow \exists z(z \in x \wedge a \in z)).$$

Это множество y является объединением семейства множеств x.

АКСИОМА СТЕПЕНИ. *Для всякого множества x существует множество y, элементами которого являются подмножества множества x и только они*:

$$\forall x \exists y \forall a (a \in y \longleftrightarrow \forall b (b \in a \longrightarrow b \in x)).$$

Другими словами, y есть множество всех подмножеств из x; оно называется *булеаном* множества x.

АКСИОМА РЕГУЛЯРНОСТИ. *Всякое непустое множество x содержит элемент a такой, что $a \cap x = \emptyset$*:

$$\forall x (x \neq \emptyset \longrightarrow \exists a (a \in x \wedge \forall b (b \in a \longrightarrow b \notin x))).$$

АКСИОМА БЕСКОНЕЧНОСТИ. *Существует такое множество x, что $\emptyset \in x$, и если $u \in x$, то множество $u \cup \{u\}$ также принадлежит x*:

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall u (u \in x \longrightarrow u \cup \{u\} \in x)).$$

АКСИОМА СТЕПЕНИ. *Для всякого множества x существует множество y, элементами которого являются подмножества множества x и только они*:

$$\forall x \exists y \forall a (a \in y \longleftrightarrow \forall b (b \in a \longrightarrow b \in x)).$$

Другими словами, y есть множество всех подмножеств из x; оно называется *булеаном* множества x.

АКСИОМА РЕГУЛЯРНОСТИ. *Всякое непустое множество x содержит элемент a такой, что $a \cap x = \emptyset$*:

$$\forall x (x \neq \emptyset \longrightarrow \exists a (a \in x \wedge \forall b (b \in a \longrightarrow b \notin x))).$$

АКСИОМА БЕСКОНЕЧНОСТИ. *Существует такое множество x, что $\emptyset \in x$, и если $u \in x$, то множество $u \cup \{u\}$ также принадлежит x*:

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall u (u \in x \longrightarrow u \cup \{u\} \in x)).$$

АКСИОМА СТЕПЕНИ. *Для всякого множества x существует множество y, элементами которого являются подмножества множества x и только они*:

$$\forall x \exists y \forall a (a \in y \longleftrightarrow \forall b (b \in a \longrightarrow b \in x)).$$

Другими словами, y есть множество всех подмножеств из x; оно называется *булеаном* множества x.

АКСИОМА РЕГУЛЯРНОСТИ. *Всякое непустое множество x содержит элемент a такой, что $a \cap x = \emptyset$*:

$$\forall x (x \neq \emptyset \longrightarrow \exists a (a \in x \wedge \forall b (b \in a \longrightarrow b \notin x))).$$

АКСИОМА БЕСКОНЕЧНОСТИ. *Существует такое множество x, что $\emptyset \in x$, и если $u \in x$, то множество $u \cup \{u\}$ также принадлежит x*:

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall u (u \in x \longrightarrow u \cup \{u\} \in x)).$$

Аксиома бесконечности гарантирует, по сути, наличие множества x, содержащего в качестве подмножества все натуральные числа. В самом деле, множество x, указанное в ней, удовлетворяет, очевидно, свойствам:

$$\{\emptyset\} \in x,\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in x,\ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in x$$

и т.д. Полагая теперь $0 = \emptyset,\ 1 = \{\emptyset\}, 2 = \{0, 1\}, \ldots, n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, мы для любого целого числа $n \geq 0$ получаем включение $n \in x$, причем все так определенные числа попарно различны.

Система аксиом Цермело-Френкеля включает также *аксиому замещения*, дающую дополнительные широкие средства построения новых множеств.

Невозможность в теории множеств Цермело-Френкеля антиномий Кантора и Рассела вытекает из аксиомы регулярности и аксиомы пары. Действительно, проверим, например, что данная система аксиом не допускает множеств, содержащих себя в качестве элемента. Предположим от противного, что это не так и потому найдется множество a такое, что $a \in a$. По аксиоме пары можно составить одноэлементное множество $x = \{a\}$ (здесь множество b совпадает с a). Тогда по аксиоме регулярности $a \cap x = \emptyset$, но это противоречит тому, что $a \in a$ и $a \in x$, т.е. $a \in a \cap x$.

Заметим, что несмотря на определенные ограничения, аксиоматика Цермело-Френкеля не запрещает "слишком много" множеств. Она вполне приемлема для построения любой из известных на сегодня математических теорий: алгебры, геометрии, математического анализа и т.д.

Система аксиом Цермело-Френкеля включает также *аксиому замещения*, дающую дополнительные широкие средства построения новых множеств.

Невозможность в теории множеств Цермело-Френкеля антиномий Кантора и Рассела вытекает из аксиомы регулярности и аксиомы пары. Действительно, проверим, например, что данная система аксиом не допускает множеств, содержащих себя в качестве элемента. Предположим от противного, что это не так и потому найдется множество a такое, что $a \in a$. По аксиоме пары можно составить одноэлементное множество $x = \{a\}$ (здесь множество b совпадает с a). Тогда по аксиоме регулярности $a \cap x = \emptyset$, но это противоречит тому, что $a \in a$ и $a \in x$, т.е. $a \in a \cap x$.

Заметим, что несмотря на определенные ограничения, аксиоматика Цермело-Френкеля не запрещает "слишком много" множеств. Она вполне приемлема для построения любой из известных на сегодня математических теорий: алгебры, геометрии, математического анализа и т.д.

Система аксиом Цермело-Френкеля включает также *аксиому замещения*, дающую дополнительные широкие средства построения новых множеств.

Невозможность в теории множеств Цермело-Френкеля антиномий Кантора и Рассела вытекает из аксиомы регулярности и аксиомы пары. Действительно, проверим, например, что данная система аксиом не допускает множеств, содержащих себя в качестве элемента. Предположим от противного, что это не так и потому найдется множество a такое, что $a \in a$. По аксиоме пары можно составить одноэлементное множество $x = \{a\}$ (здесь множество b совпадает с a). Тогда по аксиоме регулярности $a \cap x = \emptyset$, но это противоречит тому, что $a \in a$ и $a \in x$, т.е. $a \in a \cap x$.

Заметим, что несмотря на определенные ограничения, аксиоматика Цермело-Френкеля не запрещает "слишком много" множеств. Она вполне приемлема для построения любой из известных на сегодня математических теорий: алгебры, геометрии, математического анализа и т.д.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вопрос о непротиворечивости теории множеств Цермело-Френкеля до сих пор остается открытым.

Это означает, например, что доказываемые в этом учебном пособии утверждения (в частности, рассматривавшаяся ранее теорема о непротиворечивости для теорий первого порядка) являются корректными с точностью до непротиворечивости теории множеств, с которой мы имеем дело.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вопрос о непротиворечивости теории множеств Цермело-Френкеля до сих пор остается открытым.

Это означает, например, что доказываемые в этом учебном пособии утверждения (в частности, рассматривавшаяся ранее теорема о непротиворечивости для теорий первого порядка) являются корректными с точностью до непротиворечивости теории множеств, с которой мы имеем дело.

В математике иногда возникает необходимость рассмотрения совокупностей объектов, которые не являются множествами (например, *многообразий алгебр*). Такие совокупности называются *классами*. Одна из принятых в математике систем аксиом – *система фон Неймана-Бернайса-Гёделя* (**NBG**) – является расширением канонической теории Цермело-Френкеля, в которой собственные классы играют роль первичных объектов наряду с множествами (собственный класс – это класс не являющийся множеством). В этой теории элементами классов могут быть только множества, и потому неприемлемо рассмотрение класса всех классов. Вместе с тем в ней допускается существование всеобщего класса – *класса всех множеств*. Как и для системы аксиом Цермело-Френкеля, непротиворечивость системы аксиом фон Неймана-Бернайса-Гёделя пока остается под вопросом.

В математике иногда возникает необходимость рассмотрения совокупностей объектов, которые не являются множествами (например, *многообразий алгебр*). Такие совокупности называются *классами*. Одна из принятых в математике систем аксиом – *система фон Неймана-Бернайса-Гёделя* (**NBG**) – является расширением канонической теории Цермело-Френкеля, в которой собственные классы играют роль первичных объектов наряду с множествами (собственный класс – это класс не являющийся множеством). В этой теории элементами классов могут быть только множества, и потому неприемлемо рассмотрение класса всех классов. Вместе с тем в ней допускается существование всеобщего класса – *класса всех множеств*. Как и для системы аксиом Цермело-Френкеля, непротиворечивость системы аксиом фон Неймана-Бернайса-Гёделя пока остается под вопросом.

В математике иногда возникает необходимость рассмотрения совокупностей объектов, которые не являются множествами (например, *многообразий алгебр*). Такие совокупности называются *классами*. Одна из принятых в математике систем аксиом – *система фон Неймана-Бернайса-Гёделя* (**NBG**) – является расширением канонической теории Цермело-Френкеля, в которой собственные классы играют роль первичных объектов наряду с множествами (собственный класс – это класс не являющийся множеством). В этой теории элементами классов могут быть только множества, и потому неприемлемо рассмотрение класса всех классов. Вместе с тем в ней допускается существование всеобщего класса – *класса всех множеств*. Как и для системы аксиом Цермело-Френкеля, непротиворечивость системы аксиом фон Неймана-Бернайса-Гёделя пока остается под вопросом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Идея доказательства непротиворечивости какой-либо теории, основанная на построении соответствующей модели, впервые была осознана русским математиком *Николаем Ивановичем Лобачевским* еще в 20-х годах XIX века для обоснования невыводимости *пятого постулата о параллельных прямых* (см. ниже) из других постулатов евклидовой геометрии.

С этой целью им была создана новая геометрия, в которой имели место все аксиомы Евклида за исключением пятого постулата. Непротиворечивость этой геометрии обеспечивалась наличием модели для нее – так называемой *гиперболической плоскости Лобачевского*. (Указанная геометрия не является теорией первого порядка, поэтому ее модели не надо путать с теми моделями, которые мы рассматривали в этой главе.)

Примерно через три года после выхода работ Н. И. Лобачевского, а именно в 1832 году, была опубликована статья венгерского математка *Яноша Бойяи*, в которой он излагал похожие идеи, связанные с существованием неевклидовых геометрий.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Идея доказательства непротиворечивости какой-либо теории, основанная на построении соответствующей модели, впервые была осознана русским математиком *Николаем Ивановичем Лобачевским* еще в 20-х годах XIX века для обоснования невыводимости *пятого постулата о параллельных прямых* (см. ниже) из других постулатов евклидовой геометрии.

С этой целью им была создана новая геометрия, в которой имели место все аксиомы Евклида за исключением пятого постулата.
Непротиворечивость этой геометрии обеспечивалась наличием модели для нее – так называемой *гиперболической плоскости Лобачевского.* (Указанная геометрия не является теорией первого порядка, поэтому ее модели не надо путать с теми моделями, которые мы рассматривали в этой главе.)

Примерно через три года после выхода работ Н. И. Лобачевского, а именно в 1832 году, была опубликована статья венгерского математка *Яноша Бойяи*, в которой он излагал похожие идеи, связанные с существованием неевклидовых геометрий.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Идея доказательства непротиворечивости какой-либо теории, основанная на построении соответствующей модели, впервые была осознана русским математиком *Николаем Ивановичем Лобачевским* еще в 20-х годах XIX века для обоснования невыводимости *пятого постулата о параллельных прямых* (см. ниже) из других постулатов евклидовой геометрии.

С этой целью им была создана новая геометрия, в которой имели место все аксиомы Евклида за исключением пятого постулата. Непротиворечивость этой геометрии обеспечивалась наличием модели для нее – так называемой *гиперболической плоскости Лобачевского*. (Указанная геометрия не является теорией первого порядка, поэтому ее модели не надо путать с теми моделями, которые мы рассматривали в этой главе.)

Примерно через три года после выхода работ Н. И. Лобачевского, а именно в 1832 году, была опубликована статья венгерского математка *Яноша Бойяи*, в которой он излагал похожие идеи, связанные с существованием неевклидовых геометрий.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Идея доказательства непротиворечивости какой-либо теории, основанная на построении соответствующей модели, впервые была осознана русским математиком *Николаем Ивановичем Лобачевским* еще в 20-х годах XIX века для обоснования невыводимости *пятого постулата о параллельных прямых* (см. ниже) из других постулатов евклидовой геометрии.

С этой целью им была создана новая геометрия, в которой имели место все аксиомы Евклида за исключением пятого постулата. Непротиворечивость этой геометрии обеспечивалась наличием модели для нее – так называемой *гиперболической плоскости Лобачевского*. (Указанная геометрия не является теорией первого порядка, поэтому ее модели не надо путать с теми моделями, которые мы рассматривали в этой главе.)

Примерно через три года после выхода работ Н. И. Лобачевского, а именно в 1832 году, была опубликована статья венгерского математка *Яноша Бойяи*, в которой он излагал похожие идеи, связанные с существованием неевклидовых геометрий.

В качестве дополнения к замечанию 2 приведем еще один пример.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим несколько следующих аксиом планиметрии (здесь аксиома 7 соответствует пятому постулату геометрии Евклида о параллельных прямых):

1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

3. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

4. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекает прямую.

В качестве дополнения к замечанию 2 приведем еще один пример.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим несколько следующих аксиом планиметрии (здесь аксиома 7 соответствует пятому постулату геометрии Евклида о параллельных прямых):

1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

3. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

4. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекает прямую.

В качестве дополнения к замечанию 2 приведем еще один пример.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим несколько следующих аксиом планиметрии (здесь аксиома 7 соответствует пятому постулату геометрии Евклида о параллельных прямых):

1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

3. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

4. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекает прямую.

В качестве дополнения к замечанию 2 приведем еще один пример.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим несколько следующих аксиом планиметрии (здесь аксиома 7 соответствует пятому постулату геометрии Евклида о параллельных прямых):

1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

3. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

4. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекает прямую.

В качестве дополнения к замечанию 2 приведем еще один пример.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим несколько следующих аксиом планиметрии (здесь аксиома 7 соответствует пятому постулату геометрии Евклида о параллельных прямых):

1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

3. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

4. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекает прямую.

В качестве дополнения к замечанию 2 приведем еще один пример.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим несколько следующих аксиом планиметрии (здесь аксиома 7 соответствует пятому постулату геометрии Евклида о параллельных прямых):

1. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

2. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

3. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

4. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекает прямую. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекает прямую.

5. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

6. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180^0. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

7. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Доказать, что аксиома 7 не выводится из аксиом 1–6.

С этой целью мы укажем модель, которая будет удовлетворять всем аксиомам 1–6 и отрицанию аксиомы 7.

5. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

6. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180^0. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

7. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Доказать, что аксиома 7 не выводится из аксиом 1–6.

С этой целью мы укажем модель, которая будет удовлетворять всем аксиомам 1–6 и отрицанию аксиомы 7.

5. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

6. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180^0. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

7. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Доказать, что аксиома 7 не выводится из аксиом 1–6.

С этой целью мы укажем модель, которая будет удовлетворять всем аксиомам 1–6 и отрицанию аксиомы 7.

5. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

6. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180^0. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

7. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Доказать, что аксиома 7 не выводится из аксиом 1–6.

С этой целью мы укажем модель, которая будет удовлетворять всем аксиомам 1–6 и отрицанию аксиомы 7.

5. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

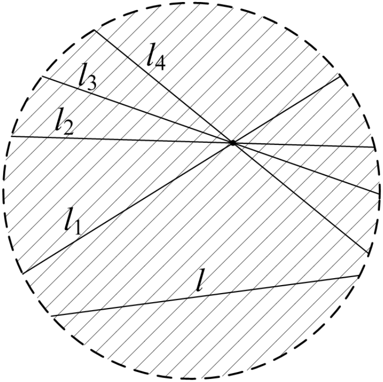
6. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180^0. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

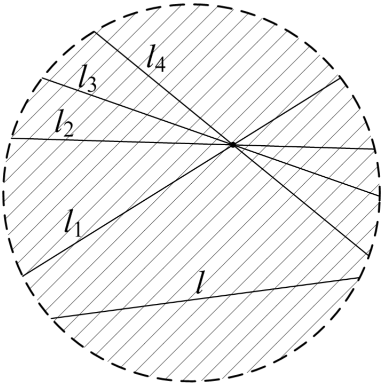
7. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Доказать, что аксиома 7 не выводится из аксиом 1–6.

С этой целью мы укажем модель, которая будет удовлетворять всем аксиомам 1–6 и отрицанию аксиомы 7.

Под плоскостью будем понимать открытый круг, а под прямыми – хорды внутри этого круга. Всякая хорда разбивает круг на две части, называемые нами полуплоскостями. Понятия точки, отрезка и угла – такие же как в обычной геометрии. Как принято, две прямые в плоскости мы называем параллельными, если они не имеют общих точек.





Хорошо видно, что в данной модели истинны все шесть первых аксиом. Однако через точку, лежащую вне произвольной прямой, можно провести более одной прямой, параллельной данной, т.е. имеет место отрицание седьмой аксиомы. Это обстоятельство доказывает, что список аксиом 1–6 вместе с отрицанием аксиомы 7 определяет непротиворечивую теорию, а значит, последняя аксиома не выводится из остальных.

В следующем параграфе мы продолжим для теорий первого порядка исследовать вопрос, связанный с невыводимостью аксиом одного списка из аксиом другого списка.

Подмножество X множества всех аксиом данной формальной теории называется *независимым*, если какая-нибудь формула из X не может быть выведена с помощью правил вывода из аксиом, не входящих в X.

ТЕОРЕМА. *Каждая из схем аксиом (A1)–(A3) теории $\mathcal{T}$ исчисления высказываний независима.*

Доказательство. Проверим независимость (A1). Для этого построим одноместный предикат P на множестве всех формул теории $\mathcal{T}$, обладающий следующими свойствами:

1. $P(F) = \mathbf{1}$ для любой аксиомы из схем (A2), (A3).
2. Если $\frac{F_1, F_2}{F}$ (MP) и $P(F_1) = P(F_2) = \mathbf{1}$, то и $P(F) = \mathbf{1}$.
3. $P(A \longrightarrow (B \longrightarrow A)) = \mathbf{0}$.

Чтобы задать такой предикат P, рассмотрим следующие таблицы:

Подмножество X множества всех аксиом данной формальной теории называется *независимым*, если какая-нибудь формула из X не может быть выведена с помощью правил вывода из аксиом, не входящих в X.

ТЕОРЕМА. *Каждая из схем аксиом (A1)–(A3) теории $\mathcal{T}$ исчисления высказываний независима.*

Доказательство. Проверим независимость (A1). Для этого построим одноместный предикат P на множестве всех формул теории $\mathcal{T}$, обладающий следующими свойствами:

1. $P(F) = \mathbf{1}$ для любой аксиомы из схем (A2), (A3).
2. Если $\frac{F_1, F_2}{F}$ (MP) и $P(F_1) = P(F_2) = \mathbf{1}$, то и $P(F) = \mathbf{1}$.
3. $P(A \longrightarrow (B \longrightarrow A)) = \mathbf{0}$.

Чтобы задать такой предикат P, рассмотрим следующие таблицы:

Подмножество X множества всех аксиом данной формальной теории называется *независимым*, если какая-нибудь формула из X не может быть выведена с помощью правил вывода из аксиом, не входящих в X.

ТЕОРЕМА. *Каждая из схем аксиом (A1)–(A3) теории $\mathcal{T}$ исчисления высказываний независима.*

Доказательство. Проверим независимость (A1). Для этого построим одноместный предикат P на множестве всех формул теории $\mathcal{T}$, обладающий следующими свойствами:

1. $P(F) = \mathbf{1}$ для любой аксиомы из схем (A2), (A3).
2. Если $\frac{F_1, F_2}{F}$ (MP) и $P(F_1) = P(F_2) = \mathbf{1}$, то и $P(F) = \mathbf{1}$.
3. $P(A \longrightarrow (B \longrightarrow A)) = \mathbf{0}$.

Чтобы задать такой предикат P, рассмотрим следующие таблицы:

Подмножество X множества всех аксиом данной формальной теории называется *независимым*, если какая-нибудь формула из X не может быть выведена с помощью правил вывода из аксиом, не входящих в X.

ТЕОРЕМА. *Каждая из схем аксиом (А1)–(А3) теории $\mathcal{T}$ исчисления высказываний независима.*

Доказательство. Проверим независимость (А1). Для этого построим одноместный предикат P на множестве всех формул теории $\mathcal{T}$, обладающий следующими свойствами:

1. $P(F) = \mathbf{1}$ для любой аксиомы из схем (А2), (А3).
2. Если $\frac{F_1, F_2}{F}$ (МР) и $P(F_1) = P(F_2) = \mathbf{1}$, то и $P(F) = \mathbf{1}$.
3. $P(A \longrightarrow (B \longrightarrow A)) = \mathbf{0}$.

Чтобы задать такой предикат P, рассмотрим следующие таблицы:

A	$\neg A$
0	1
1	1
2	0

A	B	$A \longrightarrow B$
0	0	0
1	0	2
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	2
1	2	0
2	2	0

Для всякого отображения ϕ множества X логических переменных формулы F в множество значений $\{0, 1, 2\}$ эти таблицы позволяют найти соответствующее значение $\phi(F)$ (полная аналогия с тем, как вычисляются истинностные значения формул логики высказываний при интерпретациях в множество логических констант). Например, если $\phi(A) = 0$ и $\phi(B) = 1$, то $\phi(A \longrightarrow (B \longrightarrow A)) = \phi(A) \longrightarrow (\phi(B) \longrightarrow \phi(A)) = 0 \longrightarrow (1 \longrightarrow 0) = 0 \longrightarrow 2 = 2$. Полагаем, по определению, $P(F) = \mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда $\phi(F) = 0$ для любой интерпретации ϕ букв формулы F в множестве $\{0, 1, 2\}$. Из определения непосредственно получаем, что $P(A \longrightarrow (B \longrightarrow A)) \neq \mathbf{1}$, т.е. выполнено свойство 3 выше.

A	$\neg A$
0	1
1	1
2	0

A	B	$A \longrightarrow B$
0	0	0
1	0	2
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	2
1	2	0
2	2	0

Для всякого отображения ϕ множества X логических переменных формулы F в множество значений $\{0, 1, 2\}$ эти таблицы позволяют найти соответствующее значение $\phi(F)$ (полная аналогия с тем, как вычисляются истинностные значения формул логики высказываний при интерпретациях в множество логических констант). Например, если $\phi(A) = 0$ и $\phi(B) = 1$, то $\phi(A \longrightarrow (B \longrightarrow A)) = \phi(A) \longrightarrow (\phi(B) \longrightarrow \phi(A)) = 0 \longrightarrow (1 \longrightarrow 0) = 0 \longrightarrow 2 = 2$. Полагаем, по определению, $P(F) = \mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда $\phi(F) = 0$ для любой интерпретации ϕ букв формулы F в множестве $\{0, 1, 2\}$. Из определения непосредственно получаем, что $P(A \longrightarrow (B \longrightarrow A)) \neq \mathbf{1}$, т.е. выполнено свойство 3 выше.

A	$\neg A$
0	1
1	1
2	0

A	B	$A \longrightarrow B$
0	0	0
1	0	2
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	2
1	2	0
2	2	0

Для всякого отображения ϕ множества X логических переменных формулы F в множество значений $\{0, 1, 2\}$ эти таблицы позволяют найти соответствующее значение $\phi(F)$ (полная аналогия с тем, как вычисляются истинностные значения формул логики высказываний при интерпретациях в множество логических констант). Например, если $\phi(A) = 0$ и $\phi(B) = 1$, то $\phi(A \longrightarrow (B \longrightarrow A)) = \phi(A) \longrightarrow (\phi(B) \longrightarrow \phi(A)) = 0 \longrightarrow (1 \longrightarrow 0) = 0 \longrightarrow 2 = 2$. Полагаем, по определению, $P(F) = \mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда $\phi(F) = 0$ для любой интерпретации ϕ букв формулы F в множестве $\{0, 1, 2\}$. Из определения непосредственно получаем, что $P(A \longrightarrow (B \longrightarrow A)) \neq \mathbf{1}$, т.е. выполнено свойство 3 выше.

Пусть $\frac{F_1, F_2}{F}$ (MP) и $P(F_1) = P(F_2) = \mathbf{1}$. Тогда для любой интерпретации ϕ в $\{0, 1, 2\}$ имеют место равенства $\phi(F_1) = \phi(F_2) = 0$. Так как F есть следствие F_1 и F_2 по правилу вывода MP, считаем, что $F_2 = F_1 \longrightarrow F$. отсюда получаем $0 = \phi(F_2) = \phi(F_1 \longrightarrow F) =$ $\phi(F_1) \longrightarrow \phi(F) = 0 \longrightarrow \phi(F)$. По второй таблице находим, что это может быть только в одном случае, когда $\phi(F) = 0$. Поэтому $P(F) = \mathbf{1}$ ввиду произвольного выбора ϕ. Таким образом, мы проверили свойство 2 предиката P.

Из следующей таблицы видно, что $P(F) = \mathbf{1}$ для любой аксиомы $F = (\neg G \longrightarrow \neg H) \longrightarrow ((\neg G \longrightarrow H) \longrightarrow G)$ из схемы (A3):

G	H	$\neg G$	$\neg H$	$\neg G \to \neg H$	$\neg G \to H$	$(\neg G \to H) \to G$	F
0	0	1	1	2	2	0	0
1	0	1	1	2	2	0	0
2	0	0	1	2	0	2	0
0	1	1	1	2	2	0	0
1	1	1	1	2	2	0	0
2	1	0	1	2	2	0	0
0	2	1	0	2	0	0	0
1	2	1	0	2	0	2	0
2	2	0	0	0	2	0	0

Пусть $\frac{F_1, F_2}{F}$ (MP) и $P(F_1) = P(F_2) = \mathbf{1}$. Тогда для любой интерпретации ϕ в $\{0, 1, 2\}$ имеют место равенства $\phi(F_1) = \phi(F_2) = 0$. Так как F есть следствие F_1 и F_2 по правилу вывода MP, считаем, что $F_2 = F_1 \longrightarrow F$. отсюда получаем $0 = \phi(F_2) = \phi(F_1 \longrightarrow F) =$
$\phi(F_1) \longrightarrow \phi(F) = 0 \longrightarrow \phi(F)$. По второй таблице находим, что это может быть только в одном случае, когда $\phi(F) = 0$. Поэтому $P(F) = \mathbf{1}$ ввиду произвольного выбора ϕ. Таким образом, мы проверили свойство 2 предиката P.

Из следующей таблицы видно, что $P(F) = \mathbf{1}$ для любой аксиомы $F = (\neg G \longrightarrow \neg H) \longrightarrow ((\neg G \longrightarrow H) \longrightarrow G)$ из схемы (A3):

G	H	$\neg G$	$\neg H$	$\neg G \to \neg H$	$\neg G \to H$	$(\neg G \to H) \to G$	F
0	0	1	1	2	2	0	0
1	0	1	1	2	2	0	0
2	0	0	1	2	0	2	0
0	1	1	1	2	2	0	0
1	1	1	1	2	2	0	0
2	1	0	1	2	2	0	0
0	2	1	0	2	0	0	0
1	2	1	0	2	0	2	0
2	2	0	0	0	2	0	0

Аналогично доказывается, что $P(F) = \mathbf{1}$ для любой аксиомы $F = (R \longrightarrow (G \longrightarrow H)) \longrightarrow ((R \longrightarrow G) \longrightarrow (R \longrightarrow H))$ из схемы (A2), и значит, справедливо свойство 1 предиката P.

Теперь осталось заметить, что из существования такого предиката P следует невозможность вывода аксиомы $A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$, принадлежащей (A1), из схем аксиом (A2), (A3). Действительно, если бы она выводилась из этих аксиом, то ввиду свойств 1 и 2 предиката P имели бы $P(A \longrightarrow (B \longrightarrow A)) = \mathbf{1}$, но это не так по свойству 3. Независимость схемы аксиом (A1) доказана.

Аналогично доказывается, что $P(F) = \mathbf{1}$ для любой аксиомы $F = (R \longrightarrow (G \longrightarrow H)) \longrightarrow ((R \longrightarrow G) \longrightarrow (R \longrightarrow H))$ из схемы (A2), и значит, справедливо свойство 1 предиката P.

Теперь осталось заметить, что из существования такого предиката P следует невозможность вывода аксиомы $A \longrightarrow (B \longrightarrow A)$, принадлежащей (A1), из схем аксиом (A2), (A3). Действительно, если бы она выводилась из этих аксиом, то ввиду свойств 1 и 2 предиката P имели бы $P(A \longrightarrow (B \longrightarrow A)) = \mathbf{1}$, но это не так по свойству 3. Независимость схемы аксиом (A1) доказана.

Аналогично проверяется независимость схем (А2) и (А3). Для каждой из них по правилу, установленному выше, строится свой одноместный предикат с необходимыми свойствами. Ниже для каждого из оставшихся двух случаев мы указываем область значений для функции ϕ, а также приводим соответствующие таблицы значений для операций $\neg$ и $\longrightarrow$. Необходимые выкладки, аналогичные предыдущим, проведите самостоятельно.

Проблема независимости аксиом

(A2): $\phi(X) = \{0, 1, 2\}$

A	$\neg A$
0	1
1	0
2	1

A	B	$A \longrightarrow B$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	1
1	2	0
2	2	0

(A3): $\phi(X) = \{0, 1\}$

A	$\neg A$
0	0
1	1

A	B	$A \longrightarrow B$
0	0	0
1	0	0
0	1	1
1	1	0

Несколько более сложно устанавливается независимость схем (A1)–(A5) аксиом теории исчисления предикатов.

(A2): $\phi(X) = \{0, 1, 2\}$

A	$\neg A$
0	1
1	0
2	1

A	B	$A \longrightarrow B$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
0	1	2
1	1	2
2	1	0
0	2	1
1	2	0
2	2	0

(A3): $\phi(X) = \{0, 1\}$

A	$\neg A$
0	0
1	1

A	B	$A \longrightarrow B$
0	0	0
1	0	0
0	1	1
1	1	0

Несколько более сложно устанавливается независимость схем (A1)–(A5) аксиом теории исчисления предикатов.

Исследования, связанные с независимостью аксиом в различных теориях, получили широкое распространение в математике, начиная с доказательства независимости упоминавшегося выше пятого постулата Евклида и кончая самыми современными работами по алгебре, теории множеств, логике и другим дисциплинам. В этой связи заслуживают внимания результаты американского математика *Пола Джозефа Коэна* (1963–1964) о независимости *аксиомы выбора* и *гипотезы континуума* для системы аксиом теории множеств Цермело-Френкеля **ZF** (см. предыдущий параграф).

Приведем формулировку первой аксиомы.

Для множества A обозначим через $\mathcal{B}(A)$ множество всех подмножеств из A (см. *аксиому степени* системы аксиом Цермело-Френкеля). Отображение ψ из $\mathcal{B}(A) \setminus \{\emptyset\}$ в A такое, что $\psi(B) \in B$ для любого непустого подмножества $B \subseteq A$, называется *выбирающей функцией* для множества A.

АКСИОМА ВЫБОРА. *Для любого непустого множества существует своя выбирающая функция.*

Другими словами, если имеется произвольный набор (конечный или бесконечный) множеств, то всегда можно, выбрав из каждого множества по одному элементу, составить из этих элементов новое множество.

Приведем формулировку первой аксиомы.

Для множества A обозначим через $\mathcal{B}(A)$ множество всех подмножеств из A (см. *аксиому степени* системы аксиом Цермело-Френкеля). Отображение ψ из $\mathcal{B}(A) \setminus \{\emptyset\}$ в A такое, что $\psi(B) \in B$ для любого непустого подмножества $B \subseteq A$, называется *выбирающей функцией* для множества A.

АКСИОМА ВЫБОРА. *Для любого непустого множества существует своя выбирающая функция.*

Другими словами, если имеется произвольный набор (конечный или бесконечный) множеств, то всегда можно, выбрав из каждого множества по одному элементу, составить из этих элементов новое множество.

Данная аксиома не входит в систему аксиом **ZF**. Однако это обстоятельство никак не отражается на ее значимости для математики. До вычленения аксиомы выбора в явном виде математики использовали ее бессознательно во многих рассуждениях. Кантор неявно применил ее в 1887 году для доказательства теоремы о том, что любое бесконечное множество содержит счетное подмножество. Эта аксиома находит применение при доказательстве теоремы о том, что в любом ограниченном множестве действительных чисел всегда можно выбрать сходящуюся последовательность. Аксиома выбора используется также при построении действительных чисел на основе системы аксиом Пеано для натуральных чисел (данную систему аксиом мы рассмотрим в следующем параграфе).

Данная аксиома не входит в систему аксиом **ZF**. Однако это обстоятельство никак не отражается на ее значимости для математики. До вычленения аксиомы выбора в явном виде математики использовали ее бессознательно во многих рассуждениях. Кантор неявно применил ее в 1887 году для доказательства теоремы о том, что любое бесконечное множество содержит счетное подмножество. Эта аксиома находит применение при доказательстве теоремы о том, что в любом ограниченном множестве действительных чисел всегда можно выбрать сходящуюся последовательность. Аксиома выбора используется также при построении действительных чисел на основе системы аксиом Пеано для натуральных чисел (данную систему аксиом мы рассмотрим в следующем параграфе).

Данная аксиома не входит в систему аксиом **ZF**. Однако это обстоятельство никак не отражается на ее значимости для математики. До вычленения аксиомы выбора в явном виде математики использовали ее бессознательно во многих рассуждениях. Кантор неявно применил ее в 1887 году для доказательства теоремы о том, что любое бесконечное множество содержит счетное подмножество. Эта аксиома находит применение при доказательстве теоремы о том, что в любом ограниченном множестве действительных чисел всегда можно выбрать сходящуюся последовательность. Аксиома выбора используется также при построении действительных чисел на основе системы аксиом Пеано для натуральных чисел (данную систему аксиом мы рассмотрим в следующем параграфе).

Данная аксиома не входит в систему аксиом **ZF**. Однако это обстоятельство никак не отражается на ее значимости для математики. До вычленения аксиомы выбора в явном виде математики использовали ее бессознательно во многих рассуждениях. Кантор неявно применил ее в 1887 году для доказательства теоремы о том, что любое бесконечное множество содержит счетное подмножество. Эта аксиома находит применение при доказательстве теоремы о том, что в любом ограниченном множестве действительных чисел всегда можно выбрать сходящуюся последовательность. Аксиома выбора используется также при построении действительных чисел на основе системы аксиом Пеано для натуральных чисел (данную систему аксиом мы рассмотрим в следующем параграфе).

Наряду с аксиомой выбора внимание математиков было привлечено еще к одному положению – гипотезе континуума, впервые высказанной Кантором в 1877 году. Приведем ее формулировку.

ГИПОТЕЗА КОНТИНУУМА. *Любое бесконечное подмножество множества действительных чисел либо счетно, либо имеет мощность континуума.*

Напомним, что мощность континуума – это мощность всех действительных чисел; она совпадает с мощностью множества всех подмножеств натуральных чисел.

В 1940 году Гёдель доказал, что если теория **ZF** непротиворечива, то в ней не выводится отрицание аксиомы выбора, а значит по Лемме 2 параграфа "Обращение теоремы о непротиворечивости" теория **ZFC**=**ZF** + (аксиома выбора) также будет непротиворечивой. Более того, оказывается, что непротиворечивой в этом случае будет и теория **ZFC** + (гипотеза континуума).

Наряду с аксиомой выбора внимание математиков было привлечено еще к одному положению – гипотезе континуума, впервые высказанной Кантором в 1877 году. Приведем ее формулировку.

ГИПОТЕЗА КОНТИНУУМА. *Любое бесконечное подмножество множества действительных чисел либо счетно, либо имеет мощность континуума.*

Напомним, что мощность континуума – это мощность всех действительных чисел; она совпадает с мощностью множества всех подмножеств натуральных чисел.

В 1940 году Гёдель доказал, что если теория **ZF** непротиворечива, то в ней не выводится отрицание аксиомы выбора, а значит по Лемме 2 параграфа "Обращение теоремы о непротиворечивости" теория **ZFC**=**ZF** + (аксиома выбора) также будет непротиворечивой. Более того, оказывается, что непротиворечивой в этом случае будет и теория **ZFC** + (гипотеза континуума).

Наряду с аксиомой выбора внимание математиков было привлечено еще к одному положению – гипотезе континуума, впервые высказанной Кантором в 1877 году. Приведем ее формулировку.

ГИПОТЕЗА КОНТИНУУМА. *Любое бесконечное подмножество множества действительных чисел либо счетно, либо имеет мощность континуума.*

Напомним, что мощность континуума – это мощность всех действительных чисел; она совпадает с мощностью множества всех подмножеств натуральных чисел.

В 1940 году Гёдель доказал, что если теория **ZF** непротиворечива, то в ней не выводится отрицание аксиомы выбора, а значит по Лемме 2 параграфа "Обращение теоремы о непротиворечивости" теория **ZFC**=**ZF** + (аксиома выбора) также будет непротиворечивой. Более того, оказывается, что непротиворечивой в этом случае будет и теория **ZFC** + (гипотеза континуума).

Наряду с аксиомой выбора внимание математиков было привлечено еще к одному положению – гипотезе континуума, впервые высказанной Кантором в 1877 году. Приведем ее формулировку.

ГИПОТЕЗА КОНТИНУУМА. *Любое бесконечное подмножество множества действительных чисел либо счетно, либо имеет мощность континуума.*

Напомним, что мощность континуума – это мощность всех действительных чисел; она совпадает с мощностью множества всех подмножеств натуральных чисел.

В 1940 году Гёдель доказал, что если теория **ZF** непротиворечива, то в ней не выводится отрицание аксиомы выбора, а значит по Лемме 2 параграфа “Обращение теоремы о непротиворечивости” теория **ZFC**=**ZF** + (аксиома выбора) также будет непротиворечивой. Более того, оказывается, что непротиворечивой в этом случае будет и теория **ZFC** + (гипотеза континуума).

Наряду с аксиомой выбора внимание математиков было привлечено еще к одному положению – гипотезе континуума, впервые высказанной Кантором в 1877 году. Приведем ее формулировку.

ГИПОТЕЗА КОНТИНУУМА. *Любое бесконечное подмножество множества действительных чисел либо счетно, либо имеет мощность континуума.*

Напомним, что мощность континуума – это мощность всех действительных чисел; она совпадает с мощностью множества всех подмножеств натуральных чисел.

В 1940 году Гёдель доказал, что если теория **ZF** непротиворечива, то в ней не выводится отрицание аксиомы выбора, а значит по Лемме 2 параграфа "Обращение теоремы о непротиворечивости" теория **ZFC**=**ZF** + (аксиома выбора) также будет непротиворечивой. Более того, оказывается, что непротиворечивой в этом случае будет и теория **ZFC** + (гипотеза континуума).

Попытки же вывести аксиому выбора и гипотезу континуума из системы аксиом Цермело-Френкеля **ZF** или же, наоборот, доказать независимость этих положений оставались безуспешными вплоть до 60-х годов прошлого столетия, когда Коэном было установлено, что если теория **ZF** непротиворечива, то в ней невыводима аксиома выбора, а гипотеза континуума невыводима в теории **ZFC**.

Из этих результатов вытекает следующее наблюдение, представляющее определенный интерес. Если мы, допуская непротиворечивость теории **ZF**, добавим к ней аксиому, являющуюся отрицанием аксиомы выбора, то получим непротиворечивую теорию, которая, вообще говоря, также имеет право на существование. Однако, очевидные сомнения возникают в целесообразности дальнейшего развития такой теории.

В действительности, Коэн получил более сильный результат – независимость так называемой *обобщенной гипотезы континуума*; она утверждает, что для любого бесконечного множества A между его мощностью и мощностью булеана $\mathcal{B}(A)$ не существует промежуточной мощности. Любопытно отметить, что В. Серпинский в 1947 г. и Э. Шпеккер в 1952 г. доказали, что аксиома выбора вытекает из обобщенной континуум-гипотезы.

Попытки же вывести аксиому выбора и гипотезу континуума из системы аксиом Цермело-Френкеля **ZF** или же, наоборот, доказать независимость этих положений оставались безуспешными вплоть до 60-х годов прошлого столетия, когда Коэном было установлено, что если теория **ZF** непротиворечива, то в ней невыводима аксиома выбора, а гипотеза континуума невыводима в теории **ZFC**.

Из этих результатов вытекает следующее наблюдение, представляющее определенный интерес. Если мы, допуская непротиворечивость теории **ZF**, добавим к ней аксиому, являющуюся отрицанием аксиомы выбора, то получим непротиворечивую теорию, которая, вообще говоря, также имеет право на существование. Однако, очевидные сомнения возникают в целесообразности дальнейшего развития такой теории.

В действительности, Коэн получил более сильный результат – независимость так называемой *обобщенной гипотезы континуума*; она утверждает, что для любого бесконечного множества A между его мощностью и мощностью булеана $\mathcal{B}(A)$ не существует промежуточной мощности. Любопытно отметить, что В. Серпинский в 1947 г. и Э. Шпеккер в 1952 г. доказали, что аксиома выбора вытекает из обобщенной континуум-гипотезы.

Попытки же вывести аксиому выбора и гипотезу континуума из системы аксиом Цермело-Френкеля **ZF** или же, наоборот, доказать независимость этих положений оставались безуспешными вплоть до 60-х годов прошлого столетия, когда Коэном было установлено, что если теория **ZF** непротиворечива, то в ней невыводима аксиома выбора, а гипотеза континуума невыводима в теории **ZFC**.

Из этих результатов вытекает следующее наблюдение, представляющее определенный интерес. Если мы, допуская непротиворечивость теории **ZF**, добавим к ней аксиому, являющуюся отрицанием аксиомы выбора, то получим непротиворечивую теорию, которая, вообще говоря, также имеет право на существование. Однако, очевидные сомнения возникают в целесообразности дальнейшего развития такой теории.

В действительности, Коэн получил более сильный результат – независимость так называемой *обобщенной гипотезы континуума*; она утверждает, что для любого бесконечного множества A между его мощностью и мощностью булеана $\mathcal{B}(A)$ не существует промежуточной мощности. Любопытно отметить, что В. Серпинский в 1947 г. и Э. Шпеккер в 1952 г. доказали, что аксиома выбора вытекает из обобщенной континуум-гипотезы.

Попытки же вывести аксиому выбора и гипотезу континуума из системы аксиом Цермело-Френкеля **ZF** или же, наоборот, доказать независимость этих положений оставались безуспешными вплоть до 60-х годов прошлого столетия, когда Коэном было установлено, что если теория **ZF** непротиворечива, то в ней невыводима аксиома выбора, а гипотеза континуума невыводима в теории **ZFC**.

Из этих результатов вытекает следующее наблюдение, представляющее определенный интерес. Если мы, допуская непротиворечивость теории **ZF**, добавим к ней аксиому, являющуюся отрицанием аксиомы выбора, то получим непротиворечивую теорию, которая, вообще говоря, также имеет право на существование. Однако, очевидные сомнения возникают в целесообразности дальнейшего развития такой теории.

В действительности, Коэн получил более сильный результат – независимость так называемой *обобщенной гипотезы континуума*; она утверждает, что для любого бесконечного множества A между его мощностью и мощностью булеана $\mathcal{B}(A)$ не существует промежуточной мощности. Любопытно отметить, что В. Серпинский в 1947 г. и Э. Шпеккер в 1952 г. доказали, что аксиома выбора вытекает из обобщенной континуум-гипотезы.

Попытки же вывести аксиому выбора и гипотезу континуума из системы аксиом Цермело-Френкеля **ZF** или же, наоборот, доказать независимость этих положений оставались безуспешными вплоть до 60-х годов прошлого столетия, когда Коэном было установлено, что если теория **ZF** непротиворечива, то в ней невыводима аксиома выбора, а гипотеза континуума невыводима в теории **ZFC**.

Из этих результатов вытекает следующее наблюдение, представляющее определенный интерес. Если мы, допуская непротиворечивость теории **ZF**, добавим к ней аксиому, являющуюся отрицанием аксиомы выбора, то получим непротиворечивую теорию, которая, вообще говоря, также имеет право на существование. Однако, очевидные сомнения возникают в целесообразности дальнейшего развития такой теории.

В действительности, Коэн получил более сильный результат – независимость так называемой *обобщенной гипотезы континуума*; она утверждает, что для любого бесконечного множества A между его мощностью и мощностью булеана $\mathcal{B}(A)$ не существует промежуточной мощности. Любопытно отметить, что В. Серпинский в 1947 г. и Э. Шпеккер в 1952 г. доказали, что аксиома выбора вытекает из обобщенной континуум-гипотезы.

Теория с равенством называется *категоричной*, если она имеет единственную (с точностью до несущественных различий) нормальную модель, иначе говоря, если она непротиворечива и любые две ее нормальные модели изоморфны в обычном смысле. Примеры категоричных формальных теорий хорошо известны из курсов алгебры и математического анализа. Так, любое множество аксиом X, определяющее ту или иную числовую систему $\mathfrak{M}$ (будь то натуральные, рациональные или действительные числа) удовлетворяет одному непременному условию: $\mathfrak{M}$ по X восстанавливается однозначно. Это означает, что соответствующая теория категорична и $\mathfrak{M}$ является ее единственной нормальной моделью.

Рассмотрим простейшую из таких теорий – *теорию натуральных чисел*, или, как ее обычно называют, *элементарную арифметику*. Первое аксиоматическое построение этой теории известно под названием *системы аксиом Пеано*; оно было предложено немецким математиком *Рихардом [Юлиусом Вильгельмом] Дедекиндом* в 1901 году. Аксиомы этой теории выглядят следующим образом:

Теория с равенством называется *категоричной*, если она имеет единственную (с точностью до несущественных различий) нормальную модель, иначе говоря, если она непротиворечива и любые две ее нормальные модели изоморфны в обычном смысле. Примеры категоричных формальных теорий хорошо известны из курсов алгебры и математического анализа. Так, любое множество аксиом X, определяющее ту или иную числовую систему $\mathfrak{M}$ (будь то натуральные, рациональные или действительные числа) удовлетворяет одному непременному условию: $\mathfrak{M}$ по X восстанавливается однозначно. Это означает, что соответствующая теория категорична и $\mathfrak{M}$ является ее единственной нормальной моделью.

Рассмотрим простейшую из таких теорий – *теорию натуральных чисел*, или, как ее обычно называют, *элементарную арифметику*. Первое аксиоматическое построение этой теории известно под названием *системы аксиом Пеано*; оно было предложено немецким математиком *Рихардом [Юлиусом Вильгельмом] Дедекиндом* в 1901 году. Аксиомы этой теории выглядят следующим образом:

Теория с равенством называется *категоричной*, если она имеет единственную (с точностью до несущественных различий) нормальную модель, иначе говоря, если она непротиворечива и любые две ее нормальные модели изоморфны в обычном смысле. Примеры категоричных формальных теорий хорошо известны из курсов алгебры и математического анализа. Так, любое множество аксиом X, определяющее ту или иную числовую систему $\mathfrak{M}$ (будь то натуральные, рациональные или действительные числа) удовлетворяет одному непременному условию: $\mathfrak{M}$ по X восстанавливается однозначно. Это означает, что соответствующая теория категорична и $\mathfrak{M}$ является ее единственной нормальной моделью.

Рассмотрим простейшую из таких теорий – *теорию натуральных чисел*, или, как ее обычно называют, *элементарную арифметику*. Первое аксиоматическое построение этой теории известно под названием *системы аксиом Пеано*; оно было предложено немецким математиком *Рихардом [Юлиусом Вильгельмом] Дедекиндом* в 1901 году. Аксиомы этой теории выглядят следующим образом:

Теория с равенством называется *категоричной*, если она имеет единственную (с точностью до несущественных различий) нормальную модель, иначе говоря, если она непротиворечива и любые две ее нормальные модели изоморфны в обычном смысле. Примеры категоричных формальных теорий хорошо известны из курсов алгебры и математического анализа. Так, любое множество аксиом X, определяющее ту или иную числовую систему $\mathfrak{M}$ (будь то натуральные, рациональные или действительные числа) удовлетворяет одному непременному условию: $\mathfrak{M}$ по X восстанавливается однозначно. Это означает, что соответствующая теория категорична и $\mathfrak{M}$ является ее единственной нормальной моделью.

Рассмотрим простейшую из таких теорий – *теорию натуральных чисел*, или, как ее обычно называют, *элементарную арифметику*. Первое аксиоматическое построение этой теории известно под названием *системы аксиом Пеано*; оно было предложено немецким математиком *Рихардом [Юлиусом Вильгельмом] Дедекиндом* в 1901 году. Аксиомы этой теории выглядят следующим образом:

(П1) 0 есть натуральное число;

(П2) для любого натурального числа x существует другое натуральное число, обозначаемое x' и называемое “*непосредственно следующее за* x”;

(П3) $0 \neq x'$ для любого натурального числа x;

(П4) если $x' = y'$, то $x = y$;

(П5, *принцип индукции*) если Q есть какое-то свойство натуральных чисел и оно удовлетворяет двум условиям:

(i) натуральное число 0 обладает свойством Q,

(ii) для всякого натурального числа x из того, что x обладает свойством Q следует, что и натуральное число x' обладает свойством Q,

то свойством Q обладают все натуральные числа.

(П1) 0 есть натуральное число;

(П2) для любого натурального числа x существует другое натуральное число, обозначаемое x' и называемое “*непосредственно следующее за* x”;

(П3) $0 \neq x'$ для любого натурального числа x;

(П4) если $x' = y'$, то $x = y$;

(П5, *принцип индукции*) если Q есть какое-то свойство натуральных чисел и оно удовлетворяет двум условиям:

(*i*) натуральное число 0 обладает свойством Q,

(*ii*) для всякого натурального числа x из того, что x обладает свойством Q следует, что и натуральное число x' обладает свойством Q,

то свойством Q обладают все натуральные числа.

(П1) 0 есть натуральное число;

(П2) для любого натурального числа x существует другое натуральное число, обозначаемое x' и называемое “*непосредственно следующее за* x”;

(П3) $0 \neq x'$ для любого натурального числа x;

(П4) если $x' = y'$, то $x = y$;

(П5, *принцип индукции*) если Q есть какое-то свойство натуральных чисел и оно удовлетворяет двум условиям:

(*i*) натуральное число 0 обладает свойством Q,

(*ii*) для всякого натурального числа x из того, что x обладает свойством Q следует, что и натуральное число x' обладает свойством Q,

то свойством Q обладают все натуральные числа.

(П1) 0 есть натуральное число;

(П2) для любого натурального числа x существует другое натуральное число, обозначаемое x' и называемое "*непосредственно следующее за* x";

(П3) $0 \neq x'$ для любого натурального числа x;

(П4) если $x' = y'$, то $x = y$;

(П5, *принцип индукции*) если Q есть какое-то свойство натуральных чисел и оно удовлетворяет двум условиям:

(*i*) натуральное число 0 обладает свойством Q,

(*ii*) для всякого натурального числа x из того, что x обладает свойством Q следует, что и натуральное число x' обладает свойством Q,

то свойством Q обладают все натуральные числа.

(П1) 0 есть натуральное число;

(П2) для любого натурального числа x существует другое натуральное число, обозначаемое x' и называемое “*непосредственно следующее за* x”;

(П3) $0 \neq x'$ для любого натурального числа x;

(П4) если $x' = y'$, то $x = y$;

(П5, *принцип индукции*) если Q есть какое-то свойство натуральных чисел и оно удовлетворяет двум условиям:

- (i) натуральное число 0 обладает свойством Q,
- (ii) для всякого натурального числа x из того, что x обладает свойством Q следует, что и натуральное число x' обладает свойством Q,

то свойством Q обладают все натуральные числа.

Нетрудно понять, что арифметика, соответствующая указанной пеановской системе аксиом, является категоричной, т.е. множество **N** натуральных чисел с естественным предикатом равенства $=$ и операциями $\{0,'\}$ образует единственную ее нормальную модель.

Однако в этих аксиомах содержится интуитивное понятие "свойства", что не позволяет всей системе быть строгой формализацией натуральных чисел.

Поэтому возникает необходимость в построении теории первого порядка, основанной на пеановской аксиоматике, которая была бы так же пригодна для вывода всех основных результатов элементарной арифметики. Ниже мы указываем одну из таких теорий, обозначаемую нами $\mathcal{A}r$ и называемую *формальной арифметикой*.

Нетрудно понять, что арифметика, соответствующая указанной пеановской системе аксиом, является категоричной, т.е. множество **N** натуральных чисел с естественным предикатом равенства $=$ и операциями $\{0,'\}$ образует единственную ее нормальную модель.

Однако в этих аксиомах содержится интуитивное понятие “свойства”, что не позволяет всей системе быть строгой формализацией натуральных чисел.

Поэтому возникает необходимость в построении теории первого порядка, основанной на пеановской аксиоматике, которая была бы так же пригодна для вывода всех основных результатов элементарной арифметики. Ниже мы указываем одну из таких теорий, обозначаемую нами $\mathcal{A}r$ и называемую *формальной арифметикой*.

Нетрудно понять, что арифметика, соответствующая указанной пеановской системе аксиом, является категоричной, т.е. множество **N** натуральных чисел с естественным предикатом равенства $=$ и операциями $\{0,'\}$ образует единственную ее нормальную модель.

Однако в этих аксиомах содержится интуитивное понятие "свойства", что не позволяет всей системе быть строгой формализацией натуральных чисел.

Поэтому возникает необходимость в построении теории первого порядка, основанной на пеановской аксиоматике, которая была бы так же пригодна для вывода всех основных результатов элементарной арифметики. Ниже мы указываем одну из таких теорий, обозначаемую нами $\mathcal{A}r$ и называемую *формальной арифметикой*.

Теория $\mathcal{A}r$ содержит единственный предикатный символ $=$ и, в отличие от пеановской, четыре функциональных символа: нульместный 0, одноместный $'$ и двухместные $+$ и $\cdot$; последние два из них соответствуют операциям сложения и умножения на натуральных числах. Ее собственные аксиомы имеют следующий вид:

(Ar 1) $\forall x \forall y (x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z)$;
(Ar 2) $\forall x \forall y (x = y \longrightarrow x' = y')$;
(Ar 3) $\forall x (0 \neq x')$;
(Ar 4) $\forall x \forall y (x' = y' \longrightarrow x = y)$;
(Ar 5) $\forall x (x + 0 = x)$;
(Ar 6) $\forall x \forall y (x + y' = (x + y)')$;
(Ar 7) $\forall x (x \cdot 0 = 0)$;
(Ar 8) $\forall x \forall y (x \cdot (y') = x \cdot y + x)$;
(Ar 9) $F(0) \wedge \forall x (F(x) \longrightarrow F(x')) \longrightarrow \forall x F(x)$,

где $F(x)$ – произвольная формула теории $\mathcal{A}r$.

Заметим, что аксиомы (Ar 1)–(Ar 8) являются конкретными формулами, в то время как (Ar 9) представляет собой схему аксиом, порождающую бесконечное множество аксиом. При этом схема аксиом (Ar 9), называемая *принципом математической индукции*, не соответствует полностью аксиоме (П5) системы аксиом Пеано.

Теория $\mathcal{A}r$ содержит единственный предикатный символ $=$ и, в отличие от пеановской, четыре функциональных символа: нульместный 0, одноместный $'$ и двухместные $+$ и $\cdot$; последние два из них соответствуют операциям сложения и умножения на натуральных числах. Ее собственные аксиомы имеют следующий вид:

(Ar 1) $\forall x \forall y (x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z)$;
(Ar 2) $\forall x \forall y (x = y \longrightarrow x' = y')$;
(Ar 3) $\forall x (0 \neq x')$;
(Ar 4) $\forall x \forall y (x' = y' \longrightarrow x = y)$;
(Ar 5) $\forall x (x + 0 = x)$;
(Ar 6) $\forall x \forall y (x + y' = (x + y)')$;
(Ar 7) $\forall x (x \cdot 0 = 0)$;
(Ar 8) $\forall x \forall y (x \cdot (y') = x \cdot y + x)$;
(Ar 9) $F(0) \wedge \forall x (F(x) \longrightarrow F(x')) \longrightarrow \forall x F(x)$,

где $F(x)$ – произвольная формула теории $\mathcal{A}r$.

Заметим, что аксиомы (Ar 1)–(Ar 8) являются конкретными формулами, в то время как (Ar 9) представляет собой схему аксиом, порождающую бесконечное множество аксиом. При этом схема аксиом (Ar 9), называемая *принципом математической индукции*, не соответствует полностью аксиоме (П5) системы аксиом Пеано.

Теория $\mathcal{A}r$ содержит единственный предикатный символ $=$ и, в отличие от пеановской, четыре функциональных символа: нульместный 0, одноместный $'$ и двухместные $+$ и $\cdot$; последние два из них соответствуют операциям сложения и умножения на натуральных числах. Ее собственные аксиомы имеют следующий вид:

(Ar 1) $\forall x \forall y (x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z)$;
(Ar 2) $\forall x \forall y (x = y \longrightarrow x' = y')$;
(Ar 3) $\forall x (0 \neq x')$;
(Ar 4) $\forall x \forall y (x' = y' \longrightarrow x = y)$;
(Ar 5) $\forall x (x + 0 = x)$;
(Ar 6) $\forall x \forall y (x + y' = (x + y)')$;
(Ar 7) $\forall x (x \cdot 0 = 0)$;
(Ar 8) $\forall x \forall y (x \cdot (y') = x \cdot y + x)$;
(Ar 9) $F(0) \wedge \forall x (F(x) \longrightarrow F(x')) \longrightarrow \forall x F(x)$,
где $F(x)$ – произвольная формула теории $\mathcal{A}r$.

Заметим, что аксиомы (Ar 1)–(Ar 8) являются конкретными формулами, в то время как (Ar 9) представляет собой схему аксиом, порождающую бесконечное множество аксиом. При этом схема аксиом (Ar 9), называемая *принципом математической индукции*, не соответствует полностью аксиоме (П5) системы аксиом Пеано.

Теория $\mathcal{A}r$ содержит единственный предикатный символ $=$ и, в отличие от пеановской, четыре функциональных символа: нульместный 0, одноместный $'$ и двухместные $+$ и $\cdot$; последние два из них соответствуют операциям сложения и умножения на натуральных числах. Ее собственные аксиомы имеют следующий вид:

(Ar 1) $\forall x \forall y (x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z)$;
(Ar 2) $\forall x \forall y (x = y \longrightarrow x' = y')$;
(Ar 3) $\forall x (0 \neq x')$;
(Ar 4) $\forall x \forall y (x' = y' \longrightarrow x = y)$;
(Ar 5) $\forall x (x + 0 = x)$;
(Ar 6) $\forall x \forall y (x + y' = (x + y)')$;
(Ar 7) $\forall x (x \cdot 0 = 0)$;
(Ar 8) $\forall x \forall y (x \cdot (y') = x \cdot y + x)$;
(Ar 9) $F(0) \wedge \forall x (F(x) \longrightarrow F(x')) \longrightarrow \forall x F(x)$,
где $F(x)$ – произвольная формула теории $\mathcal{A}r$.

Заметим, что аксиомы (Ar 1)–(Ar 8) являются конкретными формулами, в то время как (Ar 9) представляет собой схему аксиом, порождающую бесконечное множество аксиом. При этом схема аксиом (Ar 9), называемая *принципом математической индукции*, не соответствует полностью аксиоме (П5) системы аксиом Пеано.

К сожалению, выиграв в строгости аксиом формальной арифметики перед аксиомами Пеано, мы *неизбежно* “проигрываем” в способности этой арифметики адекватно отражать всю совокупность свойств натуральных чисел. Объективные и очень глубокие причины, объясняющие этот феномен “неизбежности”, будут вскрыты нами в конце данного параграфа. Однако уже сейчас мы можем выявить расхождение указанных аксиоматик элементарной арифметики по актуальной для нас проблеме – проблеме категоричности. Если, как мы отмечали, арифметика, соответствующая пеановской аксиоматике, категорична, то формальная арифметика $\mathcal{A}r$ таковой, вообще говоря, не является. Все дело в том, что *любая теория первого порядка с равенством, имеющая бесконечную нормальную модель, будет иметь и модель какой угодно бесконечной мощности* (этот факт вытекает из упомянутой ранее теоремы Лёвенгейма-Сколема в усиленной формулировке), и потому она не может быть категоричной. Поскольку теория первого порядка $\mathcal{A}r$ имеет своей моделью $\mathbf{N}$, она не категорична.

К сожалению, выиграв в строгости аксиом формальной арифметики перед аксиомами Пеано, мы *неизбежно* “проигрываем” в способности этой арифметики адекватно отражать всю совокупность свойств натуральных чисел. Объективные и очень глубокие причины, объясняющие этот феномен “неизбежности”, будут вскрыты нами в конце данного параграфа. Однако уже сейчас мы можем выявить расхождение указанных аксиоматик элементарной арифметики по актуальной для нас проблеме – проблеме категоричности. Если, как мы отмечали, арифметика, соответствующая пеановской аксиоматике, категорична, то формальная арифметика $\mathcal{A}r$ таковой, вообще говоря, не является. Все дело в том, что *любая теория первого порядка с равенством, имеющая бесконечную нормальную модель, будет иметь и модель какой угодно бесконечной мощности* (этот факт вытекает из упомянутой ранее теоремы Лёвенгейма-Сколема в усиленной формулировке), и потому она не может быть категоричной. Поскольку теория первого порядка $\mathcal{A}r$ имеет своей моделью $\mathbb{N}$, она не категорична.

К сожалению, выиграв в строгости аксиом формальной арифметики перед аксиомами Пеано, мы *неизбежно* “проигрываем” в способности этой арифметики адекватно отражать всю совокупность свойств натуральных чисел. Объективные и очень глубокие причины, объясняющие этот феномен “неизбежности”, будут вскрыты нами в конце данного параграфа. Однако уже сейчас мы можем выявить расхождение указанных аксиоматик элементарной арифметики по актуальной для нас проблеме – проблеме категоричности. Если, как мы отмечали, арифметика, соответствующая пеановской аксиоматике, категорична, то формальная арифметика $\mathcal{A}r$ таковой, вообще говоря, не является. Все дело в том, что *любая теория первого порядка с равенством, имеющая бесконечную нормальную модель, будет иметь и модель какой угодно бесконечной мощности* (этот факт вытекает из упомянутой ранее теоремы Лёвенгейма-Сколема в усиленной формулировке), и потому она не может быть категоричной. Поскольку теория первого порядка $\mathcal{A}r$ имеет своей моделью $\mathbf{N}$, она не категорична.

Таким образом, мы приходим к необходимости ослабления для теорий первого порядка свойства категоричности. Это мы сделаем, введя в рассмотрение $\mathfrak{m}$-категоричные теории, где $\mathfrak{m}$ – произвольная фиксированная мощность.

Теория $\mathcal{K}$ первого порядка с равенством называется $\mathfrak{m}$-*категоричной*, если, во-первых, всякие две нормальные модели теории $\mathcal{K}$, имеющие мощность $\mathfrak{m}$, изоморфны и, во-вторых, $\mathcal{K}$ имеет хотя бы одну нормальную модель мощности $\mathfrak{m}$.

Обозначим через $\aleph_0$ счетную мощность. Ниже приводится классический пример $\aleph_0$-категоричной теории первого порядка.

Таким образом, мы приходим к необходимости ослабления для теорий первого порядка свойства категоричности. Это мы сделаем, введя в рассмотрение $\mathfrak{m}$-категоричные теории, где $\mathfrak{m}$ – произвольная фиксированная мощность.

Теория $\mathcal{K}$ первого порядка с равенством называется $\mathfrak{m}$-*категоричной*, если, во-первых, всякие две нормальные модели теории $\mathcal{K}$, имеющие мощность $\mathfrak{m}$, изоморфны и, во-вторых, $\mathcal{K}$ имеет хотя бы одну нормальную модель мощности $\mathfrak{m}$.

Обозначим через $\aleph_0$ счетную мощность. Ниже приводится классический пример $\aleph_0$-категоричной теории первого порядка.

Таким образом, мы приходим к необходимости ослабления для теорий первого порядка свойства категоричности. Это мы сделаем, введя в рассмотрение $\mathfrak{m}$-категоричные теории, где $\mathfrak{m}$ – произвольная фиксированная мощность.

Теория $\mathcal{K}$ первого порядка с равенством называется $\mathfrak{m}$-*категоричной*, если, во-первых, всякие две нормальные модели теории $\mathcal{K}$, имеющие мощность $\mathfrak{m}$, изоморфны и, во-вторых, $\mathcal{K}$ имеет хотя бы одну нормальную модель мощности $\mathfrak{m}$.

Обозначим через $\aleph_0$ счетную мощность. Ниже приводится классический пример $\aleph_0$-категоричной теории первого порядка.

Таким образом, мы приходим к необходимости ослабления для теорий первого порядка свойства категоричности. Это мы сделаем, введя в рассмотрение $\mathfrak{m}$-категоричные теории, где $\mathfrak{m}$ – произвольная фиксированная мощность.

Теория $\mathcal{K}$ первого порядка с равенством называется $\mathfrak{m}$-*категоричной*, если, во-первых, всякие две нормальные модели теории $\mathcal{K}$, имеющие мощность $\mathfrak{m}$, изоморфны и, во-вторых, $\mathcal{K}$ имеет хотя бы одну нормальную модель мощности $\mathfrak{m}$.

Обозначим через $\aleph_0$ счетную мощность. Ниже приводится классический пример $\aleph_0$-категоричной теории первого порядка.

ПРИМЕР 1. *Теория плотно упорядоченных множеств без наибольшего и наименьшего элементов.* Ее сигнатура содержит только предикатные символы равенства $=$ и строгого порядка $<$. Собственные аксиомы имеют вид:

(а) $\forall x(x = x)$;
(б) $\forall x \forall y(x = y \longrightarrow y = x)$;
(в) $\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z)$;
(г) $\forall x \exists y \exists z(x < y \wedge z < x)$;
(д) $\forall x \forall y \forall z(x < y \wedge y < z \longrightarrow x < z)$;
(е) $\forall x \forall y(x = y \longrightarrow x \not< y)$;
(ж) $\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$;
(з) $\forall x \forall y(x < y \longrightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$.

Нетрудно показать, что всякая счетная нормальная модель этой теории изоморфна множеству $(\mathbf{Q}, <)$ рациональных чисел, естественным образом упорядоченному. При этом оказывается, что данная теория не является $\mathfrak{m}$-категоричной ни для какого $\mathfrak{m}$, отличного от $\aleph_0$.

ПРИМЕР 1. *Теория плотно упорядоченных множеств без наибольшего и наименьшего элементов.* Ее сигнатура содержит только предикатные символы равенства $=$ и строгого порядка $<$. Собственные аксиомы имеют вид:

(а) $\forall x(x = x)$;
(б) $\forall x \forall y(x = y \longrightarrow y = x)$;
(в) $\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \longrightarrow x = z)$;
(г) $\forall x \exists y \exists z(x < y \wedge z < x)$;
(д) $\forall x \forall y \forall z(x < y \wedge y < z \longrightarrow x < z)$;
(е) $\forall x \forall y(x = y \longrightarrow x \not< y)$;
(ж) $\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$;
(з) $\forall x \forall y(x < y \longrightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$.

Нетрудно показать, что всякая счетная нормальная модель этой теории изоморфна множеству $(\mathbf{Q}, <)$ рациональных чисел, естественным образом упорядоченному. При этом оказывается, что данная теория не является $\mathfrak{m}$-категоричной ни для какого $\mathfrak{m}$, отличного от $\aleph_0$.

ПРИМЕР 2. Укажем теорию первого порядка с равенством, которая не была бы $\aleph_0$-категоричной, но была бы $\mathfrak{m}$-категоричной при любом $\mathfrak{m} > \aleph_0$.

С этой целью рассмотрим теорию абелевых групп.
И пусть для натурального числа n выражение nx обозначает терм $\underbrace{(\dots(x+x)+\dots+x)}_{n}$. Присоединим к указанной теории новые аксиомы:

$\forall x \exists ! y(ny = x)$, $n = 2, 3, \dots,$ что означает для любого натурального $n \geq 2$ и любого элемента x наличие *единственного* элемента y со свойством $ny = x$. Новая теория называется *теорией абелевых групп с однозначным делением*. Указанные аксиомы позволяют определить однозначным образом результат умножения элементов группы на произвольное рациональное число, поэтому нормальные модели этой теории являются по существу линейными пространствами над полем $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ рациональных чисел. Хорошо известно, что любые два таких пространства одной и той же несчетной мощности изоморфны и в то же время существуют счетные не изоморфные друг другу линейные пространства над полем рациональных чисел; в качестве последних можно взять любые два конечномерных линейных пространства над этим полем, размерности которых не совпадают.

ПРИМЕР 2. Укажем теорию первого порядка с равенством, которая не была бы $\aleph_0$-категоричной, но была бы $\mathfrak{m}$-категоричной при любом $\mathfrak{m} > \aleph_0$.

С этой целью рассмотрим теорию абелевых групп.
И пусть для натурального числа n выражение nx обозначает терм $\underbrace{(\ldots(x+x)+\cdots+x)}_{n}$. Присоединим к указанной теории новые аксиомы:

$\forall x \exists ! y(ny = x)$, $n = 2, 3, \ldots$, что означает для любого натурального $n \geq 2$ и любого элемента x наличие *единственного* элемента y со свойством $ny = x$. Новая теория называется *теорией абелевых групп с однозначным делением.* Указанные аксиомы позволяют определить однозначным образом результат умножения элементов группы на произвольное рациональное число, поэтому нормальные модели этой теории являются по существу линейными пространствами над полем $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ рациональных чисел. Хорошо известно, что любые два таких пространства одной и той же несчетной мощности изоморфны и в то же время существуют счетные не изоморфные друг другу линейные пространства над полем рациональных чисел; в качестве последних можно взять любые два конечномерных линейных пространства над этим полем, размерности которых не совпадают.

ПРИМЕР 2. Укажем теорию первого порядка с равенством, которая не была бы $\aleph_0$-категоричной, но была бы $\mathfrak{m}$-категоричной при любом $\mathfrak{m} > \aleph_0$.

С этой целью рассмотрим теорию абелевых групп.
И пусть для натурального числа n выражение nx обозначает терм $\underbrace{(\ldots(x+x)+\cdots+x)}_{n}$. Присоединим к указанной теории новые аксиомы:

$\forall x \exists ! y(ny = x)$, $n = 2, 3, \ldots$, что означает для любого натурального $n \geq 2$ и любого элемента x наличие *единственного* элемента y со свойством $ny = x$. Новая теория называется *теорией абелевых групп с однозначным делением*. Указанные аксиомы позволяют определить однозначным образом результат умножения элементов группы на произвольное рациональное число, поэтому нормальные модели этой теории являются по существу линейными пространствами над полем $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ рациональных чисел. Хорошо известно, что любые два таких пространства одной и той же несчетной мощности изоморфны и в то же время существуют счетные не изоморфные друг другу линейные пространства над полем рациональных чисел; в качестве последних можно взять любые два конечномерных линейных пространства над этим полем, размерности которых не совпадают.

ПРИМЕР 2. Укажем теорию первого порядка с равенством, которая не была бы $\aleph_0$-категоричной, но была бы $\mathfrak{m}$-категоричной при любом $\mathfrak{m} > \aleph_0$.

С этой целью рассмотрим теорию абелевых групп.
И пусть для натурального числа n выражение nx обозначает терм $\underbrace{(\ldots(x+x)+\cdots+x)}_{n}$. Присоединим к указанной теории новые аксиомы:

$\forall x \exists! y(ny = x)$, $n = 2, 3, \ldots,$ что означает для любого натурального $n \geq 2$ и любого элемента x наличие *единственного* элемента y со свойством $ny = x$. Новая теория называется *теорией абелевых групп с однозначным делением*. Указанные аксиомы позволяют определить однозначным образом результат умножения элементов группы на произвольное рациональное число, поэтому нормальные модели этой теории являются по существу линейными пространствами над полем $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ рациональных чисел. Хорошо известно, что любые два таких пространства одной и той же несчетной мощности изоморфны и в то же время существуют счетные не изоморфные друг другу линейные пространства над полем рациональных чисел; в качестве последних можно взять любые два конечномерных линейных пространства над этим полем, размерности которых не совпадают.

ПРИМЕР 2. Укажем теорию первого порядка с равенством, которая не была бы $\aleph_0$-категоричной, но была бы $\mathfrak{m}$-категоричной при любом $\mathfrak{m} > \aleph_0$.

С этой целью рассмотрим теорию абелевых групп.
И пусть для натурального числа n выражение nx обозначает терм $\underbrace{(\ldots(x+x)+\cdots+x)}_{n}$. Присоединим к указанной теории новые аксиомы:
$\forall x \exists! y(ny = x)$, $n = 2, 3, \ldots,$ что означает для любого натурального $n \geq 2$ и любого элемента x наличие *единственного* элемента y со свойством $ny = x$. Новая теория называется *теорией абелевых групп с однозначным делением*. Указанные аксиомы позволяют определить однозначным образом результат умножения элементов группы на произвольное рациональное число, поэтому нормальные модели этой теории являются по существу линейными пространствами над полем $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ рациональных чисел. Хорошо известно, что любые два таких пространства одной и той же несчетной мощности изоморфны и в то же время существуют счетные не изоморфные друг другу линейные пространства над полем рациональных чисел; в качестве последних можно взять любые два конечномерных линейных пространства над этим полем, размерности которых не совпадают.

Далее мы увидим, что формальная арифметика не является $\mathfrak{m}$-категоричной ни для какой мощности $\mathfrak{m}$.

Категоричность теории связана еще с одним важным свойством – свойством полноты.

Теория $\mathcal{K}$ называется *полной*, если для любой ее замкнутой формулы F либо $\vdash_{\mathcal{K}} F$, либо $\vdash_{\mathcal{K}} \neg F$.

Из Леммы Линденбаума, упоминавшейся ранее (см. Лемму 3 параграфа "Обращение теоремы о непротиворечивости"), вытекает, что всякая непротиворечивая теория $\mathcal{K}$ первого порядка может быть расширена добавлением некоторого числа аксиом до полной непротиворечивой теории $\mathcal{K}'$ (по сути, это другая формулировка леммы Линденбаума). В самом деле, пусть Γ – множество аксиом теории $\mathcal{K}$. Оно непротиворечиво и, следовательно, по упомянутой выше лемме содержится в некотором полном непротиворечивом множестве Γ' формул из $\mathcal{K}$. Возьмем Γ' в качестве множества аксиом новой теории $\mathcal{K}'$. Ясно, что $\mathcal{K}'$ будет полной непротиворечивой теорией.

Далее мы увидим, что формальная арифметика не является $\mathfrak{m}$-категоричной ни для какой мощности $\mathfrak{m}$.

Категоричность теории связана еще с одним важным свойством – свойством полноты.

Теория $\mathcal{K}$ называется *полной*, если для любой ее замкнутой формулы F либо $\vdash_{\mathcal{K}} F$, либо $\vdash_{\mathcal{K}} \neg F$.

Из Леммы Линденбаума, упоминавшейся ранее (см. Лемму 3 параграфа "Обращение теоремы о непротиворечивости"), вытекает, что всякая непротиворечивая теория $\mathcal{K}$ первого порядка может быть расширена добавлением некоторого числа аксиом до полной непротиворечивой теории $\mathcal{K}'$ (по сути, это другая формулировка леммы Линденбаума). В самом деле, пусть Γ – множество аксиом теории $\mathcal{K}$. Оно непротиворечиво и, следовательно, по упомянутой выше лемме содержится в некотором полном непротиворечивом множестве Γ' формул из $\mathcal{K}$. Возьмем Γ' в качестве множества аксиом новой теории $\mathcal{K}'$. Ясно, что $\mathcal{K}'$ будет полной непротиворечивой теорией.

Далее мы увидим, что формальная арифметика не является $\mathfrak{m}$-категоричной ни для какой мощности $\mathfrak{m}$.

Категоричность теории связана еще с одним важным свойством – свойством полноты.

Теория $\mathcal{K}$ называется *полной*, если для любой ее замкнутой формулы F либо $\vdash_{\mathcal{K}} F$, либо $\vdash_{\mathcal{K}} \neg F$.

Из Леммы Линденбаума, упоминавшейся ранее (см. Лемму 3 параграфа "Обращение теоремы о непротиворечивости"), вытекает, что всякая непротиворечивая теория $\mathcal{K}$ первого порядка может быть расширена добавлением некоторого числа аксиом до полной непротиворечивой теории $\mathcal{K}'$ (по сути, это другая формулировка леммы Линденбаума). В самом деле, пусть Γ – множество аксиом теории $\mathcal{K}$. Оно непротиворечиво и, следовательно, по упомянутой выше лемме содержится в некотором полном непротиворечивом множестве Γ' формул из $\mathcal{K}$. Возьмем Γ' в качестве множества аксиом новой теории $\mathcal{K}'$. Ясно, что $\mathcal{K}'$ будет полной непротиворечивой теорией.

Далее мы увидим, что формальная арифметика не является $\mathfrak{m}$-категоричной ни для какой мощности $\mathfrak{m}$.

Категоричность теории связана еще с одним важным свойством – свойством полноты.

Теория $\mathcal{K}$ называется *полной*, если для любой ее замкнутой формулы F либо $\vdash_{\mathcal{K}} F$, либо $\vdash_{\mathcal{K}} \neg F$.

Из Леммы Линденбаума, упоминавшейся ранее (см. Лемму 3 параграфа "Обращение теоремы о непротиворечивости"), вытекает, что всякая непротиворечивая теория $\mathcal{K}$ первого порядка может быть расширена добавлением некоторого числа аксиом до полной непротиворечивой теории $\mathcal{K}'$ (по сути, это другая формулировка леммы Линденбаума). В самом деле, пусть Γ – множество аксиом теории $\mathcal{K}$. Оно непротиворечиво и, следовательно, по упомянутой выше лемме содержится в некотором полном непротиворечивом множестве Γ' формул из $\mathcal{K}$. Возьмем Γ' в качестве множества аксиом новой теории $\mathcal{K}'$. Ясно, что $\mathcal{K}'$ будет полной непротиворечивой теорией.

Один из важных способов построения полных непротиворечивых теорий дает следующий пример.

ПРИМЕР 3. Зафиксируем какую-либо алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ произвольной сигнатуры Σ и рассмотрим *множество* Δ *всех формул этой сигнатуры, истинных на* $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathcal{K}$ – теория первого порядка с сигнатурой Σ и множеством собственных аксиом, выбранных из Δ так, что *класс всех теорем* $\mathcal{K}$ *совпадает с* Δ. Тогда теория $\mathcal{K}$ полна.

Действительно, для любой замкнутой формулы F из $\mathcal{K}$ либо F истинна на $\mathfrak{M}$, либо $\neg F$ истинна на $\mathfrak{M}$. Это означает, по построению, что одна из формул F, $\neg F$ принадлежит множеству Δ, т.е. является теоремой $\mathcal{K}$. Теория $\mathcal{K}$ непротиворечива, поскольку своей моделью имеет систему $\mathfrak{M}$.

Один из важных способов построения полных непротиворечивых теорий дает следующий пример.

ПРИМЕР 3. Зафиксируем какую-либо алгебраическую систему $\mathfrak{M}$ произвольной сигнатуры Σ и рассмотрим *множество* Δ *всех формул этой сигнатуры, истинных на* $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathcal{K}$ – теория первого порядка с сигнатурой Σ и множеством собственных аксиом, выбранных из Δ так, что *класс всех теорем* $\mathcal{K}$ *совпадает с* Δ. Тогда теория $\mathcal{K}$ полна.

Действительно, для любой замкнутой формулы F из $\mathcal{K}$ либо F истинна на $\mathfrak{M}$, либо $\neg F$ истинна на $\mathfrak{M}$. Это означает, по построению, что одна из формул F, $\neg F$ принадлежит множеству Δ, т.е. является теоремой $\mathcal{K}$. Теория $\mathcal{K}$ непротиворечива, поскольку своей моделью имеет систему $\mathfrak{M}$.

Заметим, что мы получим теорию $\mathcal{K}$ с указанными условиями, если, например, возьмем в качестве множества ее собственных аксиом *всё* множество формул Δ. Тогда, с одной стороны, Δ будет содержаться в множестве Th теорем теории $\mathcal{K}$. С другой стороны, по теореме Гёделя о полноте, каждая теорема $G \in Th$ логически общезначима в $\mathcal{K}$ и потому G истинна на $\mathfrak{M}$, т.е. $G \in \Delta$. Таким образом, в этом случае множества Th и Δ совпадают, откуда, как мы видели, следует свойство полноты теории $\mathcal{K}$.

Связь свойства полноты формальной теории с ее категоричностью в некоторой бесконечной мощности иллюстрируется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА ВООТА (1954). *Если теория $\mathcal{K}$ первого порядка с равенством $\mathfrak{m}$-категорична (причем мощность $\mathfrak{m}$ бесконечна) и не имеет конечных моделей, то $\mathcal{K}$ полна.*

Доказательство. Допустим от противного, что $\mathcal{K}$ неполна и, следовательно, имеется некоторая замкнутая формула F, для которой $\nvdash_{\mathcal{K}} F$ и $\nvdash_{\mathcal{K}} \neg F$. Тогда ввиду леммы 2 из параграфа "Обращение теоремы о непротиворечивости" каждая из формул $\neg F$ и F непротиворечива. Отсюда и из того, что $\mathcal{K}$ содержит только бесконечные модели, вытекает, как мы знаем, наличие нормальных моделей $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ теории $\mathcal{K}$ мощности $\mathfrak{m}$, на которых соответственно истинны формулы $\neg F$ и F (см. усиленную формулировку теоремы Лёвенгейма-Сколема для теорий первого порядка с равенством). Из условия $\mathfrak{m}$-категоричности получаем изоморфность моделей $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, что, однако, противоречит тому, что F истинна на $\mathfrak{M}_2$ и ложна на $\mathfrak{M}_1$.

Связь свойства полноты формальной теории с ее категоричностью в некоторой бесконечной мощности иллюстрируется следующей теоремой.

ТЕОРЕМА ВООТА (1954). *Если теория $\mathcal{K}$ первого порядка с равенством $\mathfrak{m}$-категорична (причем мощность $\mathfrak{m}$ бесконечна) и не имеет конечных моделей, то $\mathcal{K}$ полна.*

Доказательство. Допустим от противного, что $\mathcal{K}$ неполна и, следовательно, имеется некоторая замкнутая формула F, для которой $\nvdash_{\mathcal{K}} F$ и $\nvdash_{\mathcal{K}} \neg F$. Тогда ввиду леммы 2 из параграфа "Обращение теоремы о непротиворечивости" каждая из формул $\neg F$ и F непротиворечива. Отсюда и из того, что $\mathcal{K}$ содержит только бесконечные модели, вытекает, как мы знаем, наличие нормальных моделей $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ теории $\mathcal{K}$ мощности $\mathfrak{m}$, на которых соответственно истинны формулы $\neg F$ и F (см. усиленную формулировку теоремы Лёвенгейма-Сколема для теорий первого порядка с равенством). Из условия $\mathfrak{m}$-категоричности получаем изоморфность моделей $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, что, однако, противоречит тому, что F истинна на $\mathfrak{M}_2$ и ложна на $\mathfrak{M}_1$.

Данная теорема позволяет легко устанавливать полноту целого ряда формальных теорий. Так, поскольку теория плотно упорядоченных множеств без наибольшего и наименьшего элементов (см. пример 1) является $\aleph_0$-категоричной и, очевидно, не имеет конечных моделей, она полна. Аналогично доказывается полнота теории *нетривиальных абелевых групп с однозначным делением*. Эта теория получается из теории в примере 2 добавлением новой аксиомы $\exists x \exists y (x \neq y)$; наличие этой аксиомы обеспечивает, разумеется, бесконечность соответствующих групп.

Значительно легче привести примеры теорий, не являющихся полными, так как их в некотором смысле больше. Тем не менее в ряде случаев доказательство неполноты формальной теории бывает весьма сложным. Это относится прежде всего к следующей замечательной теореме, полученной Гёделем в 1931 году.

ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ ФОРМАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ. *Теория $\mathcal{A}r$ не является полной.*

Данное утверждение означает, что существует такое высказывание о натуральных числах, записываемое формулой в сигнатуре $\{=, 0, ', +, \cdot\}$, что ни оно, ни его отрицание не доказуемы в теории $\mathcal{A}r$. В связи с этим возникает естественный вопрос: *нельзя ли каким-нибудь разумным способом расширить систему аксиом формальной арифметики* (понятно, за счет формул истинных на $\mathbf{N}$) *так, чтобы уже в новой теории любое высказывание о натуральных числах либо выводилось, либо опровергалось?* Слова "разумным способом" имеют тот смысл, что в полученной теории множество аксиом должно быть как-то обозримо, т.е. должен существовать алгоритм, распознающий по каждой формуле, является она аксиомой этой теории или нет. Напомним, что такая теория называется *эффективно аксиоматизированной*.

Значительно легче привести примеры теорий, не являющихся полными, так как их в некотором смысле больше. Тем не менее в ряде случаев доказательство неполноты формальной теории бывает весьма сложным. Это относится прежде всего к следующей замечательной теореме, полученной Гёделем в 1931 году.

ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ ФОРМАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ. *Теория $\mathcal{A}r$ не является полной.*

Данное утверждение означает, что существует такое высказывание о натуральных числах, записываемое формулой в сигнатуре $\{=, 0, ', +, \cdot\}$, что ни оно, ни его отрицание не доказуемы в теории $\mathcal{A}r$. В связи с этим возникает естественный вопрос: *нельзя ли каким-нибудь разумным способом расширить систему аксиом формальной арифметики* (понятно, за счет формул истинных на $\mathbf{N}$) *так, чтобы уже в новой теории любое высказывание о натуральных числах либо выводилось, либо опровергалось?* Слова “разумным способом” имеют тот смысл, что в полученной теории множество аксиом должно быть как-то обозримо, т.е. должен существовать алгоритм, распознающий по каждой формуле, является она аксиомой этой теории или нет. Напомним, что такая теория называется *эффективно аксиоматизированной*.

Значительно легче привести примеры теорий, не являющихся полными, так как их в некотором смысле больше. Тем не менее в ряде случаев доказательство неполноты формальной теории бывает весьма сложным. Это относится прежде всего к следующей замечательной теореме, полученной Гёделем в 1931 году.

ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ ФОРМАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ. *Теория $\mathcal{A}r$ не является полной.*

Данное утверждение означает, что существует такое высказывание о натуральных числах, записываемое формулой в сигнатуре $\{=, 0, ', +, \cdot\}$, что ни оно, ни его отрицание не доказуемы в теории $\mathcal{A}r$. В связи с этим возникает естественный вопрос: *нельзя ли каким-нибудь разумным способом расширить систему аксиом формальной арифметики* (понятно, за счет формул истинных на $\mathbb{N}$) *так, чтобы уже в новой теории любое высказывание о натуральных числах либо выводилось, либо опровергалось?* Слова “разумным способом” имеют тот смысл, что в полученной теории множество аксиом должно быть как-то обозримо, т.е. должен существовать алгоритм, распознающий по каждой формуле, является она аксиомой этой теории или нет. Напомним, что такая теория называется *эффективно аксиоматизированной*.

Значительно легче привести примеры теорий, не являющихся полными, так как их в некотором смысле больше. Тем не менее в ряде случаев доказательство неполноты формальной теории бывает весьма сложным. Это относится прежде всего к следующей замечательной теореме, полученной Гёделем в 1931 году.

ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ ФОРМАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ. *Теория $\mathcal{A}r$ не является полной.*

Данное утверждение означает, что существует такое высказывание о натуральных числах, записываемое формулой в сигнатуре $\{=, 0, ', +, \cdot\}$, что ни оно, ни его отрицание не доказуемы в теории $\mathcal{A}r$. В связи с этим возникает естественный вопрос: *нельзя ли каким-нибудь разумным способом расширить систему аксиом формальной арифметики* (понятно, за счет формул истинных на $\mathbf{N}$) *так, чтобы уже в новой теории любое высказывание о натуральных числах либо выводилось, либо опровергалось?* Слова "разумным способом" имеют тот смысл, что в полученной теории множество аксиом должно быть как-то обозримо, т.е. должен существовать алгоритм, распознающий по каждой формуле, является она аксиомой этой теории или нет. Напомним, что такая теория называется *эффективно аксиоматизированной*.

Значительно легче привести примеры теорий, не являющихся полными, так как их в некотором смысле больше. Тем не менее в ряде случаев доказательство неполноты формальной теории бывает весьма сложным. Это относится прежде всего к следующей замечательной теореме, полученной Гёделем в 1931 году.

ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ ФОРМАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ. *Теория $\mathcal{A}r$ не является полной.*

Данное утверждение означает, что существует такое высказывание о натуральных числах, записываемое формулой в сигнатуре $\{=, 0, ', +, \cdot\}$, что ни оно, ни его отрицание не доказуемы в теории $\mathcal{A}r$. В связи с этим возникает естественный вопрос: *нельзя ли каким-нибудь разумным способом расширить систему аксиом формальной арифметики* (понятно, за счет формул истинных на **N**) *так, чтобы уже в новой теории любое высказывание о натуральных числах либо выводилось, либо опровергалось?* Слова "разумным способом" имеют тот смысл, что в полученной теории множество аксиом должно быть как-то обозримо, т.е. должен существовать алгоритм, распознающий по каждой формуле, является она аксиомой этой теории или нет. Напомним, что такая теория называется *эффективно аксиоматизированной*.

Ответ на поставленный вопрос оказывается, как это ни удивительно, отрицательным и содержится в той же теореме Гёделя о неполноте, формулируемой ниже в гораздо более общем виде.

ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ (общий случай). *Пусть $\mathcal{S}$ – произвольная непротиворечивая теория первого порядка с сигнатурой $\{=, 0, ', +, \cdot\}$ и собственными аксиомами, включающими аксиомы (Ar 1)–(Ar 9) формальной арифметики. Тогда если теория $\mathcal{S}$ эффективно аксиоматизирована, то она неполна.*

Ясно, что сама теория $\mathcal{A}r$ является эффективно аксиоматизированной, и потому первая формулировка этой теоремы является частным случаем последней. Доказательство теоремы мы не приводим, так как для этого необходимо знать строгое определение алгоритма, и наивное его понимание, просто как некой эффективной процедуры, здесь уже не вполне пригодно.

Теорема Гёделя о неполноте по своей значимости далеко выходит за рамки не только математической логики, но и математики в целом, являясь важным элементом ее философии.

Ответ на поставленный вопрос оказывается, как это ни удивительно, отрицательным и содержится в той же теореме Гёделя о неполноте, формулируемой ниже в гораздо более общем виде.

ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ (общий случай). *Пусть $\mathcal{S}$ – произвольная непротиворечивая теория первого порядка с сигнатурой $\{=, 0, ', +, \cdot\}$ и собственными аксиомами, включающими аксиомы (Ar 1)–(Ar 9) формальной арифметики. Тогда если теория $\mathcal{S}$ эффективно аксиоматизирована, то она неполна.*

Ясно, что сама теория $\mathcal{A}r$ является эффективно аксиоматизированной, и потому первая формулировка этой теоремы является частным случаем последней. Доказательство теоремы мы не приводим, так как для этого необходимо знать строгое определение алгоритма, и наивное его понимание, просто как некой эффективной процедуры, здесь уже не вполне пригодно.

Теорема Гёделя о неполноте по своей значимости далеко выходит за рамки не только математической логики, но и математики в целом, являясь важным элементом ее философии.

Ответ на поставленный вопрос оказывается, как это ни удивительно, отрицательным и содержится в той же теореме Гёделя о неполноте, формулируемой ниже в гораздо более общем виде.

ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ (общий случай). *Пусть $\mathcal{S}$ – произвольная непротиворечивая теория первого порядка с сигнатурой $\{=, 0, ', +, \cdot\}$ и собственными аксиомами, включающими аксиомы (Ar 1)–(Ar 9) формальной арифметики. Тогда если теория $\mathcal{S}$ эффективно аксиоматизирована, то она неполна.*

Ясно, что сама теория $\mathcal{A}r$ является эффективно аксиоматизированной, и потому первая формулировка этой теоремы является частным случаем последней. Доказательство теоремы мы не приводим, так как для этого необходимо знать строгое определение алгоритма, и наивное его понимание, просто как некой эффективной процедуры, здесь уже не вполне пригодно.

Теорема Гёделя о неполноте по своей значимости далеко выходит за рамки не только математической логики, но и математики в целом, являясь важным элементом ее философии.

Появившиеся в математике на рубеже XIX–XX веков противоречия (см. предыдущие параграфы) и последовавшие затем попытки их устранения привели к идее формализации математической науки, т.е. построения ее на основе некоторой дедуктивной финитарной системы мышления. Указанное построение возглавил выдающийся немецкий математик *Давид Гильберт*, который к 1922 году предложил целую программу формализации или, другими словами, аксиоматизации математики. При этом на роль самого многообещающего языка этой аксиоматизации претендовал хорошо знакомый нам язык логики первого порядка. Аксиоматическое построение математики следовало начать с пострадавшего от антиномий раздела теории множеств и продолжить на другие ее разделы. В настоящей главе мы видели, в частности, как это делается для логики высказываний и логики предикатов, а также познакомились с частичной аксиоматизацией элементарной арифметики в форме теории Ar.

Появившиеся в математике на рубеже XIX–XX веков противоречия (см. предыдущие параграфы) и последовавшие затем попытки их устранения привели к идее формализации математической науки, т.е. построения ее на основе некоторой дедуктивной финитарной системы мышления. Указанное построение возглавил выдающийся немецкий математик *Давид Гильберт*, который к 1922 году предложил целую программу формализации или, другими словами, аксиоматизации математики. При этом на роль самого многообещающего языка этой аксиоматизации претендовал хорошо знакомый нам язык логики первого порядка. Аксиоматическое построение математики следовало начать с пострадавшего от антиномий раздела теории множеств и продолжить на другие ее разделы. В настоящей главе мы видели, в частности, как это делается для логики высказываний и логики предикатов, а также познакомились с частичной аксиоматизацией элементарной арифметики в форме теории $\mathcal{A}r$.

Появившиеся в математике на рубеже XIX–XX веков противоречия (см. предыдущие параграфы) и последовавшие затем попытки их устранения привели к идее формализации математической науки, т.е. построения ее на основе некоторой дедуктивной финитарной системы мышления. Указанное построение возглавил выдающийся немецкий математик *Давид Гильберт*, который к 1922 году предложил целую программу формализации или, другими словами, аксиоматизации математики. При этом на роль самого многообещающего языка этой аксиоматизации претендовал хорошо знакомый нам язык логики первого порядка. Аксиоматическое построение математики следовало начать с пострадавшего от антиномий раздела теории множеств и продолжить на другие ее разделы. В настоящей главе мы видели, в частности, как это делается для логики высказываний и логики предикатов, а также познакомились с частичной аксиоматизацией элементарной арифметики в форме теории $\mathcal{A}r$.

Появившиеся в математике на рубеже XIX–XX веков противоречия (см. предыдущие параграфы) и последовавшие затем попытки их устранения привели к идее формализации математической науки, т.е. построения ее на основе некоторой дедуктивной финитарной системы мышления. Указанное построение возглавил выдающийся немецкий математик *Давид Гильберт*, который к 1922 году предложил целую программу формализации или, другими словами, аксиоматизации математики. При этом на роль самого многообещающего языка этой аксиоматизации претендовал хорошо знакомый нам язык логики первого порядка. Аксиоматическое построение математики следовало начать с пострадавшего от антиномий раздела теории множеств и продолжить на другие ее разделы. В настоящей главе мы видели, в частности, как это делается для логики высказываний и логики предикатов, а также познакомились с частичной аксиоматизацией элементарной арифметики в форме теории $\mathcal{A}r$.

Полная же аксиоматизация арифметики означает нахождение адекватной ей теории первого порядка такой, что любое истинное в ней (т.е. истинное на системе **N** натуральных чисел) утверждение, записываемое в виде некоторой формулы сигнатуры $\{=, 0, ', +, \cdot\}$, должно быть теоремой этой теории. Предполагается, что искомая теория должна быть эффективно аксиоматизированной, иначе не было бы смысла в подобной формализации. Из гёделевского результата вытекает, что последнее не осуществимо. В самом деле, если бы эту теорию удалось построить, то она была бы полной в силу примера 3 данного пункта, а это противоречит теореме Гёделя. Таким образом, мы приходим к очень глубокому и вместе с тем печальному по своим последствиям выводу о том, что *эффективная аксиоматизация элементарной арифметики, а с ней и всей математики, невозможна.*

Из теоремы о неполноте следует еще один примечательный факт: *никакая разумная (частичная) формализация арифметики в виде некоторой теории первого порядка не будет категоричной ни в одной мощности.* Действительно, в противном случае по теореме Воота она была бы полна, что не так.

Полная же аксиоматизация арифметики означает нахождение адекватной ей теории первого порядка такой, что любое истинное в ней (т.е. истинное на системе **N** натуральных чисел) утверждение, записываемое в виде некоторой формулы сигнатуры $\{=,0,',+,\cdot\}$, должно быть теоремой этой теории. Предполагается, что искомая теория должна быть эффективно аксиоматизированной, иначе не было бы смысла в подобной формализации. Из гёделевского результата вытекает, что последнее не осуществимо. В самом деле, если бы эту теорию удалось построить, то она была бы полной в силу примера 3 данного пункта, а это противоречит теореме Гёделя. Таким образом, мы приходим к очень глубокому и вместе с тем печальному по своим последствиям выводу о том, что *эффективная аксиоматизация элементарной арифметики, а с ней и всей математики, невозможна.*

Из теоремы о неполноте следует еще один примечательный факт: *никакая разумная (частичная) формализация арифметики в виде некоторой теории первого порядка не будет категоричной ни в одной мощности.* Действительно, в противном случае по теореме Воота она была бы полна, что не так.

Полная же аксиоматизация арифметики означает нахождение адекватной ей теории первого порядка такой, что любое истинное в ней (т.е. истинное на системе **N** натуральных чисел) утверждение, записываемое в виде некоторой формулы сигнатуры $\{=, 0, ', +, \cdot\}$, должно быть теоремой этой теории. Предполагается, что искомая теория должна быть эффективно аксиоматизированной, иначе не было бы смысла в подобной формализации. Из гёделевского результата вытекает, что последнее не осуществимо. В самом деле, если бы эту теорию удалось построить, то она была бы полной в силу примера 3 данного пункта, а это противоречит теореме Гёделя. Таким образом, мы приходим к очень глубокому и вместе с тем печальному по своим последствиям выводу о том, что *эффективная аксиоматизация элементарной арифметики, а с ней и всей математики, невозможна*.

Из теоремы о неполноте следует еще один примечательный факт: *никакая разумная (частичная) формализация арифметики в виде некоторой теории первого порядка не будет категоричной ни в одной мощности.* Действительно, в противном случае по теореме Воота она была бы полна, что не так.

Полная же аксиоматизация арифметики означает нахождение адекватной ей теории первого порядка такой, что любое истинное в ней (т.е. истинное на системе **N** натуральных чисел) утверждение, записываемое в виде некоторой формулы сигнатуры $\{=, 0, ', +, \cdot\}$, должно быть теоремой этой теории. Предполагается, что искомая теория должна быть эффективно аксиоматизированной, иначе не было бы смысла в подобной формализации. Из гёделевского результата вытекает, что последнее не осуществимо. В самом деле, если бы эту теорию удалось построить, то она была бы полной в силу примера 3 данного пункта, а это противоречит теореме Гёделя. Таким образом, мы приходим к очень глубокому и вместе с тем печальному по своим последствиям выводу о том, что *эффективная аксиоматизация элементарной арифметики, а с ней и всей математики, невозможна*.

Из теоремы о неполноте следует еще один примечательный факт: *никакая разумная (частичная) формализация арифметики в виде некоторой теории первого порядка не будет категоричной ни в одной мощности*. Действительно, в противном случае по теореме Воота она была бы полна, что не так.

Формальная теория называется *разрешимой*, если существует алгоритм, позволяющий узнавать по любой формуле, является она теоремой данной теории или нет; в противном случае теория называется *неразрешимой*.

ТЕОРЕМА. *Теория $\mathcal{T}$ исчисления высказываний разрешима.*

Доказательство. По теореме Гёделя о полноте класс теорем теории $\mathcal{T}$ совпадает с классом тавтологий. Поэтому определить, будет ли та или иная формула теории $\mathcal{T}$ теоремой, очень легко, исходя из ее таблицы истинности.

Формальная теория называется *разрешимой*, если существует алгоритм, позволяющий узнавать по любой формуле, является она теоремой данной теории или нет; в противном случае теория называется *неразрешимой*.

ТЕОРЕМА. *Теория $\mathcal{T}$ исчисления высказываний разрешима.*

Доказательство. По теореме Гёделя о полноте класс теорем теории $\mathcal{T}$ совпадает с классом тавтологий. Поэтому определить, будет ли та или иная формула теории $\mathcal{T}$ теоремой, очень легко, исходя из ее таблицы истинности.

Формальная теория называется *разрешимой*, если существует алгоритм, позволяющий узнавать по любой формуле, является она теоремой данной теории или нет; в противном случае теория называется *неразрешимой*.

ТЕОРЕМА. *Теория $\mathcal{T}$ исчисления высказываний разрешима.*

Доказательство. По теореме Гёделя о полноте класс теорем теории $\mathcal{T}$ совпадает с классом тавтологий. Поэтому определить, будет ли та или иная формула теории $\mathcal{T}$ теоремой, очень легко, исходя из ее таблицы истинности.

ПРИЗНАК РАЗРЕШИМОСТИ. *Всякая эффективно аксиоматизированная полная непротиворечивая теория разрешима.*

Доказательство. Допустим, что теория $\mathcal{S}$ эффективно аксиоматизирована, полна и непротиворечива. Рассмотим произвольную формулу F этой теории, и пусть $\bar{F}$ – ее замыкание. Из счетности алфавита теории $\mathcal{S}$ следует, что ее формулы можно перенумеровать с помощью натуральных чисел, из чего в свою очередь нетрудно получить пересчет $s_1, s_2, \ldots$ всех конечных последовательностей формул. Эффективная аксиоматизируемость влечет за собой существование алгоритма, с помощью которого мы можем из перечня последовательностей формул $s_1, s_2, \ldots$ отобрать только те, которые являются доказательствами, и тем самым получить эффективный пересчет $p_1, p_2, \ldots$ всех доказательств. Отсюда, поскольку теоремы – это заключительные формулы доказательств, мы получаем эффективный пересчет $F_1, F_2, \ldots$ всех теорем теории $\mathcal{S}$. Полнота и непротиворечивость теории $\mathcal{S}$ гарантируют нам, что ровно одна из замкнутых формул $\bar{F}$ или $\neg\bar{F}$ является теоремой теории $\mathcal{S}$, а значит, появится в указанном пересчете. В первом случае мы сделаем вывод, что как $\bar{F}$, так и сама формула F суть теоремы в $\mathcal{S}$; во втором случае эти формулы теоремами не будут. Таким образом, нами указана эффективная процедура, позволившая для любой формулы F теории $\mathcal{S}$ ответить на вопрос, является F теоремой теории $\mathcal{S}$ или нет. Следовательно, теория $\mathcal{S}$ разрешима.

ПРИЗНАК РАЗРЕШИМОСТИ. *Всякая эффективно аксиоматизированная полная непротиворечивая теория разрешима.*

Доказательство. Допустим, что теория $\mathcal{S}$ эффективно аксиоматизирована, полна и непротиворечива. Рассмотим произвольную формулу F этой теории, и пусть $\bar{F}$ – ее замыкание. Из счетности алфавита теории $\mathcal{S}$ следует, что ее формулы можно перенумеровать с помощью натуральных чисел, из чего в свою очередь нетрудно получить пересчет $s_1, s_2, \ldots$ всех конечных последовательностей формул. Эффективная аксиоматизируемость влечет за собой существование алгоритма, с помощью которого мы можем из перечня последовательностей формул $s_1, s_2, \ldots$ отобрать только те, которые являются доказательствами, и тем самым получить эффективный пересчет $p_1, p_2, \ldots$ всех доказательств. Отсюда, поскольку теоремы – это заключительные формулы доказательств, мы получаем эффективный пересчет $F_1, F_2, \ldots$ всех теорем теории $\mathcal{S}$. Полнота и непротиворечивость теории $\mathcal{S}$ гарантируют нам, что ровно одна из замкнутых формул $\bar{F}$ или $\neg\bar{F}$ является теоремой теории $\mathcal{S}$, а значит, появится в указанном пересчете. В первом случае мы сделаем вывод, что как $\bar{F}$, так и сама формула F суть теоремы в $\mathcal{S}$; во втором случае эти формулы теоремами не будут. Таким образом, нами указана эффективная процедура, позволившая для любой формулы F теории $\mathcal{S}$ ответить на вопрос, является F теоремой теории $\mathcal{S}$ или нет. Следовательно, теория $\mathcal{S}$ разрешима.

Объединяя это утверждение с теоремой Воота, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Всякая эффективно аксиоматизированная теория первого порядка с равенством, которая не имеет конечных моделей и категорична в некоторой бесконечной мощности, является разрешимой.*

Приведенный признак разрешимости вместе с отмеченным следствием помогает устанавливать разрешимость многих теорий, в частности, известных нам: теории плотно упорядоченных множеств без наибольшего и наименьшего элементов и теории нетривиальных абелевых групп с однозначным делением. Обе эти теории разрешимы.

В числе наиболее важных разрешимых теорий первого порядка следует также назвать теорию абелевых групп, теорию полей, теории полей действительных и комплексных чисел. Классическим примером разрешимой формальной теории является евклидова геометрия. Действительно, ее образы с помощью аппарата аналитической геометрии легко переводятся на язык алгебраических образов. Это позволяет простыми средствами алгебры доказывать или опровергать истинность геометрических положений.

Объединяя это утверждение с теоремой Воота, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Всякая эффективно аксиоматизированная теория первого порядка с равенством, которая не имеет конечных моделей и категорична в некоторой бесконечной мощности, является разрешимой.*

Приведенный признак разрешимости вместе с отмеченным следствием помогает устанавливать разрешимость многих теорий, в частности, известных нам: теории плотно упорядоченных множеств без наибольшего и наименьшего элементов и теории нетривиальных абелевых групп с однозначным делением. Обе эти теории разрешимы.

В числе наиболее важных разрешимых теорий первого порядка следует также назвать теорию абелевых групп, теорию полей, теории полей действительных и комплексных чисел. Классическим примером разрешимой формальной теории является евклидова геометрия. Действительно, ее образы с помощью аппарата аналитической геометрии легко переводятся на язык алгебраических образов. Это позволяет простыми средствами алгебры доказывать или опровергать истинность геометрических положений.

Объединяя это утверждение с теоремой Воота, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Всякая эффективно аксиоматизированная теория первого порядка с равенством, которая не имеет конечных моделей и категорична в некоторой бесконечной мощности, является разрешимой.*

Приведенный признак разрешимости вместе с отмеченным следствием помогает устанавливать разрешимость многих теорий, в частности, известных нам: теории плотно упорядоченных множеств без наибольшего и наименьшего элементов и теории нетривиальных абелевых групп с однозначным делением. Обе эти теории разрешимы.

В числе наиболее важных разрешимых теорий первого порядка следует также назвать теорию абелевых групп, теорию полей, теории полей действительных и комплексных чисел. Классическим примером разрешимой формальной теории является евклидова геометрия. Действительно, ее образы с помощью аппарата аналитической геометрии легко переводятся на язык алгебраических образов. Это позволяет простыми средствами алгебры доказывать или опровергать истинность геометрических положений.

Список неразрешимых теорий первого порядка содержит хорошо знакомые нам теории групп, полугрупп и колец (в том числе ассоциативных).

Примером неразрешимой теории является *теория [ориентированных] графов*; напомним, что ее сигнатура содержит единственный двухместный предикатный символ, а моделями являются множества с определенным на них единственным бинарным отношением. Важность этого примера кроется в простоте языка теории графов, благодаря которой последний удобно интерпретируется в языках многих других теорий для доказательства их неразрешимости.

Классический пример неразрешимой теории дает

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ О НЕПОЛНОТЕ. *Теория первого порядка $\mathcal{S}$, теоремами которой являются все истинные на множестве* $\mathbf{N}$ *натуральных чисел формулы элементарной арифметики, неразрешима.*

Доказательство. Предположим от противного, что теория $\mathcal{S}$ разрешима. Тогда ее можно было бы эффективно аксиоматизировать, взяв в качестве множества аксиом множество всех истинных на $\mathbf{N}$ формул. Тогда по теореме Гёделя $\mathcal{S}$ неполна, но в то же самое время, как теория, определенная посредством единственной модели $\mathbf{N}$, она обязана быть полной (см. пример 3 из предыдущего параграфа). Полученное противоречие доказывает неразрешимость $\mathcal{S}$.

Список неразрешимых теорий первого порядка содержит хорошо знакомые нам теории групп, полугрупп и колец (в том числе ассоциативных). Примером неразрешимой теории является *теория [ориентированных] графов*; напомним, что ее сигнатура содержит единственный двухместный предикатный символ, а моделями являются множества с определенным на них единственным бинарным отношением. Важность этого примера кроется в простоте языка теории графов, благодаря которой последний удобно интерпретируется в языках многих других теорий для доказательства их неразрешимости.

Классический пример неразрешимой теории дает

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ О НЕПОЛНОТЕ. *Теория первого порядка $\mathcal{S}$, теоремами которой являются все истинные на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел формулы элементарной арифметики, неразрешима.*

Доказательство. Предположим от противного, что теория $\mathcal{S}$ разрешима. Тогда ее можно было бы эффективно аксиоматизировать, взяв в качестве множества аксиом множество всех истинных на $\mathbf{N}$ формул. Тогда по теореме Гёделя $\mathcal{S}$ неполна, но в то же самое время, как теория, определенная посредством единственной модели $\mathbf{N}$, она обязана быть полной (см. пример 3 из предыдущего параграфа). Полученное противоречие доказывает неразрешимость $\mathcal{S}$.

Список неразрешимых теорий первого порядка содержит хорошо знакомые нам теории групп, полугрупп и колец (в том числе ассоциативных). Примером неразрешимой теории является *теория [ориентированных] графов*; напомним, что ее сигнатура содержит единственный двухместный предикатный символ, а моделями являются множества с определенным на них единственным бинарным отношением. Важность этого примера кроется в простоте языка теории графов, благодаря которой последний удобно интерпретируется в языках многих других теорий для доказательства их неразрешимости.

Классический пример неразрешимой теории дает

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ О НЕПОЛНОТЕ. *Теория первого порядка $\mathcal{S}$, теоремами которой являются все истинные на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел формулы элементарной арифметики, неразрешима.*

Доказательство. Предположим от противного, что теория $\mathcal{S}$ разрешима. Тогда ее можно было бы эффективно аксиоматизировать, взяв в качестве множества аксиом множество всех истинных на $\mathbb{N}$ формул. Тогда по теореме Гёделя $\mathcal{S}$ неполна, но в то же самое время, как теория, определенная посредством единственной модели $\mathbb{N}$, она обязана быть полной (см. пример 3 из предыдущего параграфа). Полученное противоречие доказывает неразрешимость $\mathcal{S}$.

Список неразрешимых теорий первого порядка содержит хорошо знакомые нам теории групп, полугрупп и колец (в том числе ассоциативных). Примером неразрешимой теории является *теория [ориентированных] графов*; напомним, что ее сигнатура содержит единственный двухместный предикатный символ, а моделями являются множества с определенным на них единственным бинарным отношением. Важность этого примера кроется в простоте языка теории графов, благодаря которой последний удобно интерпретируется в языках многих других теорий для доказательства их неразрешимости.
Классический пример неразрешимой теории дает

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ О НЕПОЛНОТЕ. *Теория первого порядка* $\mathcal{S}$, *теоремами которой являются все истинные на множестве* $\mathbf{N}$ *натуральных чисел формулы элементарной арифметики, неразрешима*.

Доказательство. Предположим от противного, что теория $\mathcal{S}$ разрешима. Тогда ее можно было бы эффективно аксиоматизировать, взяв в качестве множества аксиом множество всех истинных на $\mathbf{N}$ формул. Тогда по теореме Гёделя $\mathcal{S}$ неполна, но в то же самое время, как теория, определенная посредством единственной модели $\mathbf{N}$, она обязана быть полной (см. пример 3 из предыдущего параграфа). Полученное противоречие доказывает неразрешимость $\mathcal{S}$.

Список неразрешимых теорий первого порядка содержит хорошо знакомые нам теории групп, полугрупп и колец (в том числе ассоциативных).
Примером неразрешимой теории является *теория [ориентированных] графов*; напомним, что ее сигнатура содержит единственный двухместный предикатный символ, а моделями являются множества с определенным на них единственным бинарным отношением. Важность этого примера кроется в простоте языка теории графов, благодаря которой последний удобно интерпретируется в языках многих других теорий для доказательства их неразрешимости.
Классический пример неразрешимой теории дает

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ О НЕПОЛНОТЕ. *Теория первого порядка $\mathcal{S}$, теоремами которой являются все истинные на множестве* $\mathbf{N}$ *натуральных чисел формулы элементарной арифметики, неразрешима.*

Доказательство. Предположим от противного, что теория $\mathcal{S}$ разрешима. Тогда ее можно было бы эффективно аксиоматизировать, взяв в качестве множества аксиом множество всех истинных на $\mathbf{N}$ формул. Тогда по теореме Гёделя $\mathcal{S}$ неполна, но в то же самое время, как теория, определенная посредством единственной модели $\mathbf{N}$, она обязана быть полной (см. пример 3 из предыдущего параграфа). Полученное противоречие доказывает неразрешимость $\mathcal{S}$.

Еще одним классическим образцом неразрешимой теории является теория исчисления предикатов (см. пар. “Теории первого порядка”, пример 4). Впервые этот факт был установлен А. Чёрчем в 1936 году. Мы уже упоминали о нем в семантической форме, разбирая в теме “Логика предикатов” проблему разрешения. Напомним, что по теореме Гёделя о полноте понятие теоремы в теории исчисления предикатов адекватно понятию общезначимой формулы в логике предикатов. Поэтому неразрешимость теории исчисления предикатов равносильна отсутствию в проблеме разрешения соответствующего универсального алгоритма, распознающего общезначимые формулы.

Заметим, что доказательства на неразрешимость обычно более трудоемки, нежели доказательства на разрешимость. Несмотря на это, неразрешимых теорий в определенном смысле гораздо больше, чем разрешимых, и последние встречаются, скорее, как исключения из общего правила.

В таблице ниже мы указываем упоминавшиеся выше примеры эффективно аксиоматизируемых теорий первого порядка, акцентируя внимание на проблеме их разрешимости и полноты.

Еще одним классическим образцом неразрешимой теории является теория исчисления предикатов (см. пар. "Теории первого порядка", пример 4). Впервые этот факт был установлен А. Чёрчем в 1936 году. Мы уже упоминали о нем в семантической форме, разбирая в теме "Логика предикатов" проблему разрешения. Напомним, что по теореме Гёделя о полноте понятие теоремы в теории исчисления предикатов адекватно понятию общезначимой формулы в логике предикатов. Поэтому неразрешимость теории исчисления предикатов равносильна отсутствию в проблеме разрешения соответствующего универсального алгоритма, распознающего общезначимые формулы.

Заметим, что доказательства на неразрешимость обычно более трудоемки, нежели доказательства на разрешимость. Несмотря на это, неразрешимых теорий в определенном смысле гораздо больше, чем разрешимых, и последние встречаются, скорее, как исключения из общего правила.

В таблице ниже мы указываем упоминавшиеся выше примеры эффективно аксиоматизируемых теорий первого порядка, акцентируя внимание на проблеме их разрешимости и полноты.

Еще одним классическим образцом неразрешимой теории является теория исчисления предикатов (см. пар. “Теории первого порядка”, пример 4). Впервые этот факт был установлен А. Чёрчем в 1936 году. Мы уже упоминали о нем в семантической форме, разбирая в теме “Логика предикатов” проблему разрешения. Напомним, что по теореме Гёделя о полноте понятие теоремы в теории исчисления предикатов адекватно понятию общезначимой формулы в логике предикатов. Поэтому неразрешимость теории исчисления предикатов равносильна отсутствию в проблеме разрешения соответствующего универсального алгоритма, распознающего общезначимые формулы.

Заметим, что доказательства на неразрешимость обычно более трудоемки, нежели доказательства на разрешимость. Несмотря на это, неразрешимых теорий в определенном смысле гораздо больше, чем разрешимых, и последние встречаются, скорее, как исключения из общего правила.

В таблице ниже мы указываем упоминавшиеся выше примеры эффективно аксиоматизируемых теорий первого порядка, акцентируя внимание на проблеме их разрешимости и полноты.

Еще одним классическим образцом неразрешимой теории является теория исчисления предикатов (см. пар. “Теории первого порядка”, пример 4). Впервые этот факт был установлен А. Чёрчем в 1936 году. Мы уже упоминали о нем в семантической форме, разбирая в теме “Логика предикатов” проблему разрешения. Напомним, что по теореме Гёделя о полноте понятие теоремы в теории исчисления предикатов адекватно понятию общезначимой формулы в логике предикатов. Поэтому неразрешимость теории исчисления предикатов равносильна отсутствию в проблеме разрешения соответствующего универсального алгоритма, распознающего общезначимые формулы.

Заметим, что доказательства на неразрешимость обычно более трудоемки, нежели доказательства на разрешимость. Несмотря на это, неразрешимых теорий в определенном смысле гораздо больше, чем разрешимых, и последние встречаются, скорее, как исключения из общего правила.

В таблице ниже мы указываем упоминавшиеся выше примеры эффективно аксиоматизируемых теорий первого порядка, акцентируя внимание на проблеме их разрешимости и полноты.

Свойства Теории	Разрешимость	Полнота	Эффективная аксиоматизируемость
Теория исчисления высказываний	да	нет	да
Теория исчисления предикатов	нет	нет	да
Теория графов (ориентированных и неориентированных)	нет	нет	да
Теория плотно упорядоченных множеств без наибольшего и наименьшего элементов	да	да	да
Теория неодноэлементных абелевых групп с однозначным делением	да	да	да

Свойства / Теории	Разрешимость	Полнота	Эффективная аксиоматизируемость
Теория абелевых групп	да	нет	да
Теория групп	нет	нет	да
Теория колец	нет	нет	да
Теория полей	да	нет	да
Формальная арифметика	нет	нет	да
Любая эффективно аксиоматизируемая теория натуральных чисел на языке логики первого порядка	нет	нет	да
Теории множеств ZF, ZFC	нет	нет	да

1. *Важенин Ю. М.* Введение в математическую логику: Учебное пособие // Ю. М. Важенин, А. П. Замятин. – Свердловск : Изд-во Урал. Ун-та, 1984. – 93 с.
2. *Важенин Ю. М.* Множества, логика, алгоритмы в задачах: Учебное пособие // Ю. М. Важенин, В. Ю. Попов. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 1997. – 56 с.
3. *Ершов Ю. Л.* Математическая логика // Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
4. *Ершов Ю. Л.* Элементарные теории // Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров, А. Д. Тайманов, М. А.Тайцлин. – Успехи математических наук. Т. 20, вып. 4 (124), 1965, с. 37–108.
5. *Замятин А. П.* Множества, отношения, алгебраические структуры: Учебное пособие // А. П. Замятин. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2003. – 108 с.
6. *Замятин А. П.* Математическая логика: Учебное пособие // А. П. Замятин. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2004. – 140 с.

7. *Игошин В. И.* Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие // В. И. Игошин. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1991. – 256 с.
8. *Кислов А. Г.* Логика в гуманитарных контекстах: Учебное пособие // А. Г. Кислов. – Екатеринбург : Изд-во ЕАСИ, 2009. – 147 с.
9. *Клини С.* Математическая логика // С. Клини. – М. : Мир, 1973. – 480 с.
10. *Куратовский К.* Теория множеств // К. Куратовский, А. Мостовский. – М. : Мир, 1970. – 416 с.
11. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности // М. Клайн. – М. : Мир, 1984. – 434 с.
12. *Лавров И. А.* Задачи по теории множеств и теории алгоритмов, 2-е изд. // И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – М. : Наука, 1984. – 224 с.

13. *Линдон Р.* Заметки по логике // Р. Линдон. – М. : Мир, 1968. – 128 с.
14. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы // А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1970. – 392 с.
15. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции, 2-е изд. // А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1986. – 368 с.
16. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику // Э. Мендельсон. – М. : Наука, 1971. – 320 с.
17. *Новиков П. С.* Элементы математической логики // П. С. Новиков. – М. : Наука, 1973. – 399 с.
18. *Погорелов А. В.* Геометрия, 7–11 классы // А. В. Погорелов. – М. : Просвещение, 2000. – 384 с.

19. *Робинсон А.* Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры // А. Робинсон. – М. : Наука, 1967. – 376 с.
20. *Столл Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории // Р. Столл. – М. : Просвещение, 1968. – 231 с.
21. *Успенский В. А.* Теорема Гёделя о неполноте // В. А. Успенский. – М. : Наука, 1982. – 112 с.
22. *Чень Ч.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем // Ч. Чень, Р. Ли. – М. : Наука, 1983. – 360 с.
23. *Шенфилд Дж.* Математическая логика // Дж. Шенфилд. – М. : Наука, 1975. – 527 с.