Математическая логика

В. Б. Репницкий

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Математика и компьютерные науки
(4 семестр)

Рассматривая различные высказывания, мы интересовались в основном их истинностными значениями. При этом о структуре каждого более или менее сложного высказывания требовалось знать не так уж и много, а именно, как это высказывание получается из некоторых простых (неделимых) высказываний с помощью известных логических связок.

Структура простого высказывания нас уже не интересовала; в частности, мы не выделяли в нем подлежащее и сказуемое. Логика предикатов, в отличие от логики высказываний, позволяет проводить как раз более тонкий анализ простого высказывания. Само слово "предикат" в переводе с латинского языка означает "сказуемое", т.е. группу слов, характеризующих подлежащее.

Рассматривая различные высказывания, мы интересовались в основном их истинностными значениями. При этом о структуре каждого более или менее сложного высказывания требовалось знать не так уж и много, а именно, как это высказывание получается из некоторых простых (неделимых) высказываний с помощью известных логических связок.

Структура простого высказывания нас уже не интересовала; в частности, мы не выделяли в нем подлежащее и сказуемое. Логика предикатов, в отличие от логики высказываний, позволяет проводить как раз более тонкий анализ простого высказывания. Само слово “предикат” в переводе с латинского языка означает “сказуемое”, т.е. группу слов, характеризующих подлежащее.

Рассмотрим предложения: "2 – простое число", "3 – простое число", "4 – простое число". Все они являются высказываниями, причем первые два из них истинны, а последнее ложно.

Выпишем предложение $P(x) =$"x – простое число", где x пробегает множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Очевидно, $P(x)$ высказыванием уже не является, но становится таковым при подстановке вместо переменной x любого натурального числа. В этом случае говорим,что на множестве $\mathbb{N}$ задан *одноместный предикат* $P(x)$ "быть простым числом".

На $\mathbb{N}$ можно определить и другие одноместные предикаты: "x меньше 10", "x – четное число", "x больше 2015 и делится на 13".

Рассмотрим предложения: “2 – простое число”, “3 – простое число”, “4 – простое число”. Все они являются высказываниями, причем первые два из них истинны, а последнее ложно.

Выпишем предложение $P(x) =$“x – простое число”, где x пробегает множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел. Очевидно, $P(x)$ высказыванием уже не является, но становится таковым при подстановке вместо переменной x любого натурального числа. В этом случае говорим,что на множестве $\mathbf{N}$ задан *одноместный предикат* $P(x)$ “быть простым числом”.

На $\mathbf{N}$ можно определить и другие одноместные предикаты: “x меньше 10”, “x – четное число”, “x больше 2015 и делится на 13”.

Рассмотрим предложения: “2 – простое число”, “3 – простое число”, “4 – простое число”. Все они являются высказываниями, причем первые два из них истинны, а последнее ложно.

Выпишем предложение $P(x) =$“x – простое число”, где x пробегает множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел. Очевидно, $P(x)$ высказыванием уже не является, но становится таковым при подстановке вместо переменной x любого натурального числа. В этом случае говорим,что на множестве $\mathbf{N}$ задан *одноместный предикат* $P(x)$ “быть простым числом”.

На $\mathbf{N}$ можно определить и другие одноместные предикаты: “x меньше 10”, “x – четное число”, “x больше 2015 и делится на 13”.

Предложение $Q(x, y) =$ "x меньше y", где x и y также принимают значения в множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел, дает уже пример *двухместного предиката*, определенного на $\mathbf{N}$. Если вместо переменных x, y подставлять в $Q(x, y)$ различные натуральные числа, то будут получаться соответствующие высказывания, например, "3 меньше 5" или "5 меньше 3". К двухместным предикатам, заданным на множестве $\mathbf{N}$, относятся и такие предложения: "x делится на y", "$x + y = 10$", "НОД$(x, y) = 5$", "$x < y$ или y делится на 3".

Первое определение *n-местного предиката*:

n-местным предикатом, заданным на множестве M, называется предложение, содержащее n переменных и обращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных элементов множества M.

Пусть теперь $P(x_1, \ldots, x_n)$ – произвольный n-местный предикат от переменных $x_1, \ldots, x_n$, заданный на M. Множество M принято называть *предметной областью* предиката P, а переменные $x_1, \ldots, x_n$, принимающие свои значения в M, – его *предметными переменными*.

Число n предметных переменных называется *арностью* или *местностью* предиката. В связи с этим наряду с термином “n-местный предикат” мы часто будем пользоваться и термином “*n-арный предикат*”. Арность n предиката P может принимать значения $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Если P – нульместный предикат (т.е. $n = 0$), то, очевидно, P является некоторым высказыванием об элементах множества M. Обратно, *на всякое высказывание мы можем смотреть как на нульместный предикат*. Исходя из этого, логика высказываний в ее содержательном смысле должна восприниматься как часть (причем наиболее простая) логики предикатов.

Первое определение *n-местного предиката*:

n-местным предикатом, заданным на множестве M, называется предложение, содержащее n переменных и обращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных элементов множества M.

Пусть теперь $P(x_1, \ldots, x_n)$ – произвольный n-местный предикат от переменных $x_1, \ldots, x_n$, заданный на M. Множество M принято называть *предметной областью* предиката P, а переменные $x_1, \ldots, x_n$, принимающие свои значения в M, – его *предметными переменными*.

Число n предметных переменных называется *арностью* или *местностью* предиката. В связи с этим наряду с термином "n-местный предикат" мы часто будем пользоваться и термином "*n-арный предикат*". Арность n предиката P может принимать значения $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Если P – нульместный предикат (т.е. $n = 0$), то, очевидно, P является некоторым высказыванием об элементах множества M. Обратно, *на всякое высказывание мы можем смотреть как на нульместный предикат*. Исходя из этого, логика высказываний в ее содержательном смысле должна восприниматься как часть (причем наиболее простая) логики предикатов.

Первое определение *n-местного предиката*:

n-местным предикатом, заданным на множестве M, называется предложение, содержащее n переменных и обращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных элементов множества M.

Пусть теперь $P(x_1, \dots, x_n)$ – произвольный n-местный предикат от переменных $x_1, \dots, x_n$, заданный на M. Множество M принято называть *предметной областью* предиката P, а переменные $x_1, \dots, x_n$, принимающие свои значения в M, – его *предметными переменными*.

Число n предметных переменных называется *арностью* или *местностью* предиката. В связи с этим наряду с термином "n-местный предикат" мы часто будем пользоваться и термином "*n-арный предикат*". Арность n предиката P может принимать значения $n = 0, 1, 2, \dots$.

Если P – нульместный предикат (т.е. $n = 0$), то, очевидно, P является некоторым высказыванием об элементах множества M. Обратно, *на всякое высказывание мы можем смотреть как на нульместный предикат*. Исходя из этого, логика высказываний в ее содержательном смысле должна восприниматься как часть (причем наиболее простая) логики предикатов.

Первое определение *n-местного предиката*:

n-местным предикатом, заданным на множестве M, называется предложение, содержащее n переменных и обращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных элементов множества M.

Пусть теперь $P(x_1, \ldots, x_n)$ – произвольный n-местный предикат от переменных $x_1, \ldots, x_n$, заданный на M. Множество M принято называть *предметной областью* предиката P, а переменные $x_1, \ldots, x_n$, принимающие свои значения в M, – его *предметными переменными*.

Число n предметных переменных называется *арностью* или *местностью* предиката. В связи с этим наряду с термином "n-местный предикат" мы часто будем пользоваться и термином "*n-арный предикат*". Арность n предиката P может принимать значения $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Если P – нульместный предикат (т.е. $n = 0$), то, очевидно, P является некоторым высказыванием об элементах множества M. Обратно, *на всякое высказывание мы можем смотреть как на нульместный предикат*. Исходя из этого, логика высказываний в ее содержательном смысле должна восприниматься как часть (причем наиболее простая) логики предикатов.

С каждым n-местным предикатом $P(x_1, \ldots, x_n)$, заданным на множестве M, ассоциируется вполне определенная n-местная функция, которая любому кортежу $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ ставит в соответствие константу $\mathbf{1}$ или $\mathbf{0}$ в зависимости от того, истинно или ложно высказывание $P(a_1, \ldots, a_n)$. Для простоты эту функцию, так же как и предикат, будем обозначать $P(x_1, \ldots, x_n)$. Рассмотренный выше предикат $P(x) =$"x – простое число" определяет функцию $P : N \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ такую, что, например, $P(2) = \mathbf{1}$, а $P(4) = \mathbf{0}$. Аналогично, заданный на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел предикат $Q(x, y) =$"x меньше y" определяет функцию $Q : N^2 \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ такую, что $Q(3, 5) = \mathbf{1}$, а $Q(5, 3) = \mathbf{0}$. Таким образом, мы приходим ко второму определению понятия предиката.

Основное определение *n-местного предиката*:

n-местным (n-арным) предикатом, заданным на множестве M, называется отображение n-й декартовой степени множества M в множество логических констант.

Данное определение предиката $P(x_1, \ldots, x_n)$ как функции $P : M^n \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ мы будем считать основным, поскольку, будучи формальным, оно является более строгим, нежели первое определение. В этом случае нульместный предикат – это просто $\mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$.

Основное определение *n-местного предиката*:

n-местным (n-арным) предикатом, заданным на множестве M, называется отображение n-й декартовой степени множества M в множество логических констант.

Данное определение предиката $P(x_1, \ldots, x_n)$ как функции $P : M^n \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ мы будем считать основным, поскольку, будучи формальным, оно является более строгим, нежели первое определение. В этом случае нульместный предикат – это просто $\mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$.

ПРИМЕР 1. Пусть V – множество прямых в трехмерном пространстве. Определим двухместный предикат $P : V^2 \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ следующим образом:

$$P(\pi_1, \pi_2) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{если} \quad \pi_1 \parallel \pi_2, \\ \mathbf{0}, & \text{если} \quad \pi_1 \nparallel \pi_2. \end{cases}$$

ПРИМЕР 2. Пусть R – множество действительных чисел. Определим трехместный предикат $S : R^3 \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ следующим способом:

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{если} \quad \alpha + \beta = \gamma, \\ \mathbf{0}, & \text{если} \quad \alpha + \beta \neq \gamma. \end{cases}$$

Предикат $P : M^n \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ называется *тождественно истинным* *(тождественно ложным)* на множестве M, если для любой n-и $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$ выполнено $P(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{1}$ (соответственно $P(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{0}$).

Рассмотрим в M^n подмножество $T_P = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid P(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{1}\}$.

Множество T_P называется *областью истинности* предиката P. Ясно, что каждый предикат P однозначно определяется своей областью истинности T_P, причем $T_P = M^n$ ($T_P = \emptyset$) тогда и только тогда, когда P – тождественно истинный (соответственно тождественно ложный) предикат.

Предикат $P : M^n \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ называется *тождественно истинным* *(тождественно ложным)* на множестве M, если для любой n-и $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$ выполнено $P(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{1}$ (соответственно $P(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{0}$).

Рассмотрим в M^n подмножество
$T_P = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid P(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{1}\}$.

Множество T_P называется *областью истинности* предиката P. Ясно, что каждый предикат P однозначно определяется своей областью истинности T_P, причем $T_P = M^n$ $(T_P = \emptyset)$ тогда и только тогда, когда P – тождественно истинный (соответственно тождественно ложный) предикат.

Подмножества из M^n обычно называют n-местными отношениями на M. Отображение $f : P \longrightarrow T_P$ устанавливает *взаимно однозначное соответствие между множеством n-местных предикатов и множеством n-местных отношений, заданных на M*. Последнее вытекает из того, что для любого отношения $U \subseteq M^n$ существует предикат $P : M^n \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ такой, что $T_P = U$ и, следовательно, $f(P) = U$; этот предикат P определяется по U очевидным образом: $P(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда $(a_1, \ldots, a_n) \in U$. Более глубокая связь между предикатами и отношениями на множествах устанавливается ниже в связи с рассмотрением на предикатах логических операций.

Пусть $P(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{n-r})$ и $Q(x_1, \ldots, x_r, z_1, \ldots, z_{m-r})$ – предикаты арности n и m соответственно, заданные на множестве M; здесь $x_1, \ldots, x_r$ – общие предметные переменные, участвующие в записи этих предикатов. Тогда предикат $\neg P(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{n-r})$ арности n и предикаты $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \longrightarrow Q$, $P \longleftrightarrow Q$ арности $n + m - r$ от переменных $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_{n-r}, z_1, \ldots, z_{m-r}$ определяются следующим естественным способом:

(1) $\neg P(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{1} \iff P(a_1, \dots, a_n) = \mathbf{0}$;

(2) $P \wedge Q(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_{n-r}, c_1, \dots, c_{m-r}) = \mathbf{1} \iff$
$P(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_{n-r}) = \mathbf{1}$ и $Q(a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_{m-r}) = \mathbf{1}$;

(3) $P \vee Q(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_{n-r}, c_1, \dots, c_{m-r}) = \mathbf{1} \iff$
$P(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_{n-r}) = \mathbf{1}$ или $Q(a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_{m-r}) = \mathbf{1}$;

(4) $P \longrightarrow Q(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_{n-r}, c_1, \dots, c_{m-r}) = \mathbf{1} \iff$
$P(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_{n-r}) = \mathbf{0}$ или $Q(a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_{m-r}) = \mathbf{1}$;

(5) $P \longleftrightarrow Q(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_{n-r}, c_1, \dots, c_{m-r}) = \mathbf{1} \iff$
$P(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_{n-r}) = Q(a_1, \dots, a_r, c_1, \dots, c_{m-r})$; здесь
a_i, b_j, c_k $(1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n-r, 1 \leq k \leq m-r)$ – произвольные элементы из M.

Таким образом, в предикатах $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \longrightarrow Q$, $P \longleftrightarrow Q$ роль логических связок полностью адекватна той роли, которую они играли в логике высказываний.

Между логическими операциями на предикатах и теоретико-множественными операциями на отношениях существует тесная связь, а именно, справедливо следующее легко доказываемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если P и Q – предикаты арности n от одного и того же набора предметных переменных, заданные на множестве M, то*
(1) $T_{\neg P} = \overline{T}_P$, где $\overline{T}_P = M^n \setminus T_P$;
(2) $T_{P \wedge Q} = T_P \cap T_Q$;
(3) $T_{P \vee Q} = T_P \cup T_Q$;
(4) $T_{P \longrightarrow Q} = \overline{T}_P \cup T_Q$;
(5) $T_{P \longleftrightarrow Q} = (\overline{T}_P \cup T_Q) \cap (\overline{T}_Q \cup T_P)$.

При решении задач на нахождение области истинности предикатов, заданных на множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел и имеющих арности $n = 2$ или $n = 3$, удобно для наглядности использовать геометрический подход. Если предикат P есть функция из $\mathbf{R}^2$ в $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, то его область истинности T_P является множеством упорядоченных пар действительных чисел, и потому может интерпретироваться как некоторое множество точек координатной плоскости, которые предикат P отображает в $\mathbf{1}$.

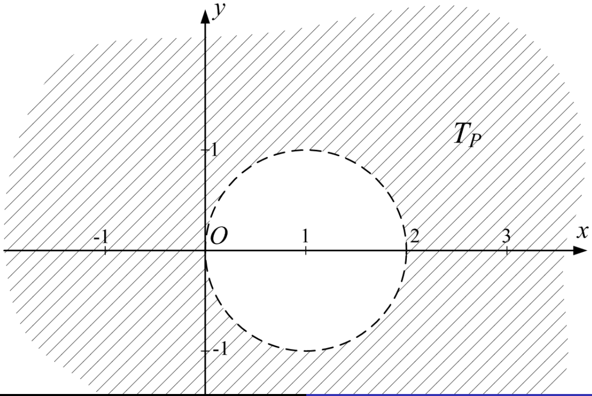
Если же P есть функция из $\mathbf{R}^3$ в $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, то на T_P удобно смотреть как на соответствующее геометрическое место точек трехмерного координатного пространства.

При решении задач на нахождение области истинности предикатов, заданных на множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел и имеющих арности $n = 2$ или $n = 3$, удобно для наглядности использовать геометрический подход. Если предикат P есть функция из $\mathbf{R}^2$ в $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, то его область истинности T_P является множеством упорядоченных пар действительных чисел, и потому может интерпретироваться как некоторое множество точек координатной плоскости, которые предикат P отображает в $\mathbf{1}$.

Если же P есть функция из $\mathbf{R}^3$ в $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, то на T_P удобно смотреть как на соответствующее геометрическое место точек трехмерного координатного пространства.

ПРИМЕР 3. Построить область истинности T_P предиката $P(x, y)$, определенного на **R** следующим образом: $P(x, y) = \mathbf{1} \iff x^2 + y^2 > 2x$.

T_P есть геометрическое место точек на координатной плоскости OXY, задаваемое неравенством $x^2 + y^2 > 2x$. Преобразовывая последнее к неравенству $(x - 1)^2 + y^2 > 1$, получаем, что T_P состоит из точек плоскости, расположенных вне круга единичного радиуса с центром в точке (1,0).



Когда говорят, что логика предикатов имеет больший запас средств, позволяющих исследовать внутреннюю структуру высказывания, нежели логика высказываний, то обычно подразумевают под этим наличие в логике предикатов большего числа операций, с помощью которых можно строить различные высказывания и предикаты. К известным уже операциям – логическим связкам – добавляются две принципиально новые – *квантор общности* $\forall x$ (читается "для любого x") и *квантор существования* $\exists x$ (читается "для некоторого x " или "существует x такой, что", здесь x – предметная переменная). Дадим их определение.

Квантором общности называется функция, сопоставляющая каждому n-местному предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множестве M, где $n \geq 1$, $(n-1)$-местный предикат $Q(x_2, \ldots, x_n) = \forall x_1 P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на этом же множестве, такой, что $Q(a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$ для $a_2, \ldots, a_n \in M$ в том и только в том случае, если **для любого** $a_1 \in M$ выполнено $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$.

Квантором существования называется функция, сопоставляющая каждому n-местному предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множестве M, где $n \geq 1$, $(n-1)$-местный предикат $S(x_2, \ldots, x_n) = \exists x_1 P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ на этом же множестве, такой, что $S(a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$ для $a_2, \ldots, a_n \in M$ в том и только в том случае, если **для некоторого** $a_1 \in M$ выполнено $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$.

Из данного определения следует, в частности, что если $P(x)$ – одноместный предикат, то предикаты $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$ нульместны, т.е. являются высказываниями об элементах множества M.

Квантором общности называется функция, сопоставляющая каждому n-местному предикату $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на множестве M, где $n \geq 1$, $(n-1)$-местный предикат $Q(x_2, \dots, x_n) = \forall x_1 P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на этом же множестве, такой, что $Q(a_2, \dots, a_n) = \mathbf{1}$ для $a_2, \dots, a_n \in M$ в том и только в том случае, если **для любого** $a_1 \in M$ выполнено $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = \mathbf{1}$.

Квантором существования называется функция, сопоставляющая каждому n-местному предикату $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на множестве M, где $n \geq 1$, $(n-1)$-местный предикат $S(x_2, \dots, x_n) = \exists x_1 P(x_1, x_2, \dots, x_n))$ на этом же множестве, такой, что $S(a_2, \dots, a_n) = \mathbf{1}$ для $a_2, \dots, a_n \in M$ в том и только в том случае, если **для некоторого** $a_1 \in M$ выполнено $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = \mathbf{1}$.

Из данного определения следует, в частности, что если $P(x)$ – одноместный предикат, то предикаты $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$ нульместны, т.е. являются высказываниями об элементах множества M.

Квантором общности называется функция, сопоставляющая каждому n-местному предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множестве M, где $n \geq 1$, $(n-1)$-местный предикат $Q(x_2, \ldots, x_n) = \forall x_1 P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на этом же множестве, такой, что $Q(a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$ для $a_2, \ldots, a_n \in M$ в том и только в том случае, если **для любого** $a_1 \in M$ выполнено $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$.

Квантором существования называется функция, сопоставляющая каждому n-местному предикату $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множестве M, где $n \geq 1$, $(n-1)$-местный предикат $S(x_2, \ldots, x_n) = \exists x_1 P(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ на этом же множестве, такой, что $S(a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$ для $a_2, \ldots, a_n \in M$ в том и только в том случае, если **для некоторого** $a_1 \in M$ выполнено $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$.

Из данного определения следует, в частности, что если $P(x)$ – одноместный предикат, то предикаты $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$ нульместны, т.е. являются высказываниями об элементах множества M.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим на множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел двухместный предикат $P : P(x, y) = \mathbf{1} \iff x^2 + y > 10$, и положим $Q(y) = \forall x P(x, y)$ и $S(y) = \exists x P(x, y)$. Тогда по определению $Q(y)$ и $S(y)$ – одноместные предикаты, причем

$Q(b) = \mathbf{1} \iff$ для любого $a \in \mathbf{R} : a^2 + b > 10$,

и

$S(b) = \mathbf{1} \iff$ для некоторого $a \in \mathbf{R} : a^2 + b > 10$.

Поэтому, очевидно, $Q(b) = \mathbf{1} \iff b > 10$, т.е. $T_Q =]10, +\infty[$

и

$S(b) = \mathbf{1}$ при любом $b \in \mathbf{R}$, т.е. $T_S =]-\infty, +\infty[$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим одноместный предикат P на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел: $P(x) = \mathbf{1} \iff x$ – простое число. Тогда предикату $\forall x P(x)$ соответствует ложное высказывание “всякое натуральное число является простым”, а предикату $\exists x P(x)$ – истинное высказывание “существует простое натуральное число”.

ПРИМЕР 3. На множестве $M = \{a, b, c\}$ заданы предикаты P и Q:

$P(x, y)$:

$x \setminus y$	a	b	c
a	0	1	0
b	0	1	0
c	1	1	0

$Q(x, y)$:

$x \setminus y$	a	b	c
a	1	0	1
b	1	0	0
c	1	0	0

Найти область истинности предиката

$$S(y) = \forall x(P(x, y) \vee Q(x, y)).$$

Из определения P и Q следует, что $T_P = \{(a, b), (b, b), (c, a), (c, b)\}$ и $T_Q = \{(a, a), (a, c), (b, a), (c, a)\}$. Поэтому область истинности T_K предиката $K(x, y) = P(x, y) \vee Q(x, y)$ совпадает с множеством пар $T_P \cup T_Q = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\}$, т.е.

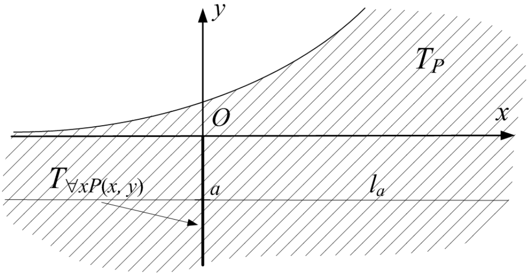
$K(x,y) = P(x,y) \vee Q(x,y)$:

$x \setminus y$	a	b	c
a	**1**	**1**	**1**
b	**1**	**1**	**0**
c	**1**	**1**	**0**

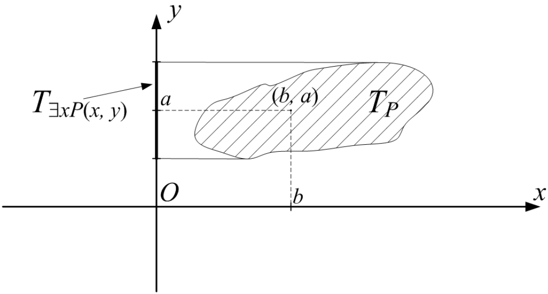
Отсюда получаем: $y \in T_S = T_{\forall x K(x,y)} \iff S(y) = \mathbf{1} \iff$ для любого $x \in M : K(x,y) = \mathbf{1} \iff$ для любого $x \in M : (x,y) \in T_K$, а это, очевидно, истинно при $y = a$ или $y = b$ и ложно при $y = c$, т.е. $T_S = \{a, b\}$.

Если $P(x, y)$ – предикат арности два, заданный на множестве $\mathbf{R}$, то, как отмечалось в предыдущем параграфе, мы можем наглядно изобразить его область истинности T_P на координатной плоскости. Поставим следующий вопрос: *как, зная* T_P*, построить области истинности предикатов* $\forall x P(x, y)$ *и* $\exists x P(x, y)$?

Пусть область истинности предиката P представлена на рисунке внизу. Одноместный предикат $Q(y) = \forall x P(x, y)$ есть функция $Q : \mathbf{R} \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, при этом на $\mathbf{R}$ удобно смотреть как на координатную ось OY и считать, что $y \in OY$. По определению, имеем: $a \in T_Q \iff Q(a) = \mathbf{1} \iff$ для любого $b \in \mathbf{R} : P(b, a) = \mathbf{1} \iff$ для любого $b \in \mathbf{R} : (b, a) \in T_P \iff l_a \subseteq T_P$, где l_a – прямая, проходящая через точку a на оси OY параллельно оси OX.Таким образом, $T_{\forall x P(x,y)}$ *геометрически интерпретируется как множество точек* a *на оси* OY, *для которых прямые* l_a, *определяемые уравнениями* $y = a$, *целиком лежат в области истинности* T_P.



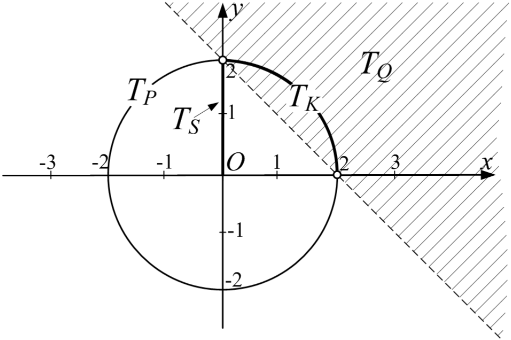
Рассмотрим теперь для предиката $P(x, y)$, область истинности которого изображена на нижнем рисунке, предикат $S(y) = \exists x P(x, y)$. $S(y)$ как функция отображает множество $\mathbf{R}$ в $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Отождествим, как и выше, $\mathbf{R}$ с множеством точек оси OY, а T_S – с некоторым его подмножеством. Тогда имеем: $a \in T_S \iff S(a) = \mathbf{1} \iff$ для некоторого $b \in \mathbf{R} : P(b, a) = \mathbf{1} \iff$ для некоторого $b \in \mathbf{R} : (b, a) \in T_P \iff$ точка a принадлежит проекции T_P на ось OY. Таким образом, $T_{\exists x P(x,y)}$ *геометрически интерпретируется как проекция области истинности* T_P *на ось* OY.



Проведенные рассуждения легко обобщаются на случай трехместного предиката $P(x, y, z)$, действующего как функция $P : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. В этом случае $T_{\forall x P(x,y,z)}$ *состоит из всех таких точек плоскости* OYZ, *что прямые, проходящие через них параллельно оси* OX, *целиком расположены в области истинности* T_P, *а* $T_{\exists x P(x,y,z)}$ *интерпретируется как проекция* T_P *на плоскость* OYZ.

ПРИМЕР 4. На множестве $\mathbf{R}$ заданы двухместные предикаты P и Q: $P(x, y) = \mathbf{1} \iff x^2 + y^2 = 4$, $Q(x, y) = \mathbf{1} \iff x + y > 2$. Найти область истинности предиката $S(y) = \exists x(P(x, y) \wedge Q(x, y))$.

Обозначим через $K(x, y)$ предикат $P(x, y) \wedge Q(x, y)$. Тогда $T_K = T_{P \wedge Q} = T_P \cap T_Q$. Построим области истинности T_P и T_Q и найдем T_K как их пересечение.



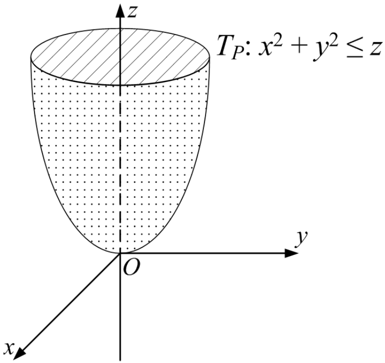
Область истинности T_K геометрически представляет собой дугу окружности радиуса два с центром в начале координат, лежащую в первой четверти. Взяв теперь проекцию T_K на ось OY, получим область истинности T_S предиката $S = \exists x K(x, y) = \exists x (P(x, y) \wedge Q(x, y))$. На рисунке хорошо видно, что $T_S =]0, 2[$, т.е. $S(y) = \mathbf{1} \iff 0 < y < 2$.

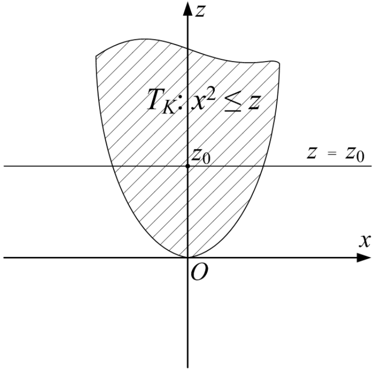
ПРИМЕР 5. Определить, верно или нет следующее утверждение о действительных числах: “*существует такое число* $z \in \mathbf{R}$, *что для любого числа* $x \in \mathbf{R}$ *найдется число* $y \in \mathbf{R}$, *для которого выполнялось бы неравенство:* $x^2 + y^2 \leq z$”.

Обозначим через $P(x, y, z)$ трехместный предикат, заданный на множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел следующим образом: $P(x, y, z) = 1 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 \leq z$. Требуется определить истинностное значение высказывания (или, что то же самое, нульместного предиката) $\exists z \forall x \exists y P(x, y, z)$. С этой целью заметим вначале, что области истинности предиката $P(x, y, z)$ соответствует в трехмерном координатном пространстве $OXYZ$ тело, ограниченное поверхностью, задаваемой уравнением $x^2 + y^2 = z$ и являющейся, как хорошо известно, параболоидом вращения.

ПРИМЕР 5. Определить, верно или нет следующее утверждение о действительных числах: “*существует такое число* $z \in \mathbf{R}$, *что для любого числа* $x \in \mathbf{R}$ *найдется число* $y \in \mathbf{R}$, *для которого выполнялось бы неравенство:* $x^2 + y^2 \leq z$”.

Обозначим через $P(x, y, z)$ трехместный предикат, заданный на множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел следующим образом: $P(x, y, z) = \mathbf{1} \iff x^2 + y^2 \leq z$. Требуется определить истинностное значение высказывания (или, что то же самое, нульместного предиката) $\exists z \forall x \exists y P(x, y, z)$. С этой целью заметим вначале, что области истинности предиката $P(x, y, z)$ соответствует в трехмерном координатном пространстве $OXYZ$ тело, ограниченное поверхностью, задаваемой уравнением $x^2 + y^2 = z$ и являющейся, как хорошо известно, параболоидом вращения.





Тогда область истинности двухместного предиката $K(x,z) = \exists y P(x,y,z)$ находится геометрически как проекция указанного тела на координатную плоскость OXZ (см. рис.9). Далее, область истинности предиката $S(z) = \forall x K(x,z)$ составляют все те числа $z_0 \in \mathbf{R}$, для которых прямые с уравнением $z = z_0$ целиком принадлежат T_K. Поскольку таких чисел нет, получаем $T_S = \emptyset$, т.е. для любого $z \in \mathbf{R}$ имеем $S(z) = \mathbf{0}$, а потому $S(z)$ – тождественно ложный предикат. Это означает, что высказывание $\exists z S(z) = \exists z \forall x \exists y P(x,y,z)$ ложно, т.е. утверждение неверно.

Заметим, что в разобранном примере о правильном ответе несложно догадаться на интуитивном уровне. Конечно, сделать это было бы гораздо труднее, если бы в рассматриваемом высказывании участвовало не три, а большее число кванторов. Данный пример показывает, как можно в ряде случаев формально, не слишком вдумываясь в смысл высказывания, правильно отвечать на вопрос о его истинностном значении.

Как и высказывания, предикаты в логике записываются в виде *формул логики предикатов* (сокращенно ФЛП). Зафиксируем некоторый набор предикатных символов $P^{(n)}, Q^{(n)}, R^{(n)}, \ldots$ (здесь n – арность соответствующего символа, принимающая значения $n = 0, 1, 2, \ldots$), некоторый набор $x, y, z, \ldots$ символов предметных переменных, возможно, индексированных натуральными числами, а также счетное множество *функциональных символов* $f^{(n)}, g^{(n)}, h^{(n)}, \ldots (n \geq 0)$.

Предикатным символам при интерпретациях формул будут соответствовать конкретные предикаты на множествах. Но на множествах помимо предикатов можно рассматривать и различные операции[1]; они и будут соответствовать функциональным символам при интерпретациях.

[1]Напомним, что n-арной операцией на множестве M называется любое отображение $M^n \longrightarrow M$. Нульарные операции – это выделенные элементы из M; их еще называют константами.

Как и высказывания, предикаты в логике записываются в виде *формул логики предикатов* (сокращенно ФЛП). Зафиксируем некоторый набор предикатных символов $P^{(n)}, Q^{(n)}, R^{(n)}, \ldots$ (здесь n – арность соответствующего символа, принимающая значения $n = 0, 1, 2, \ldots$), некоторый набор $x, y, z, \ldots$ символов предметных переменных, возможно, индексированных натуральными числами, а также счетное множество *функциональных символов* $f^{(n)}, g^{(n)}, h^{(n)}, \ldots (n \geq 0)$.

Предикатным символам при интерпретациях формул будут соответствовать конкретные предикаты на множествах. Но на множествах помимо предикатов можно рассматривать и различные операции[1]; они и будут соответствовать функциональным символам при интерпретациях.

[1]Напомним, что n-арной операцией на множестве M называется любое отображение $M^n \longrightarrow M$. Нульарные операции – это выделенные элементы из M; их еще называют константами.

Прежде чем дать определение формулы в логике предикатов, введем понятие *терма*.

(a) предметные переменные $x, y, z, \ldots$, а также нульарные функциональные символы $f^{(0)}, g^{(0)}, h^{(0)}, \ldots$ суть термы;
(b) для произвольного функционального символа $f^{(n)}$ $\quad (n \geq 1)$ и термов $t_1, \ldots, t_n$ выражение вида $f^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ тоже есть терм;
(c) других термов нет.

Определим ФЛП индукцией по длине:

(0) логические константы $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ являются ФЛП;
(1) если $P^{(n)}$ – предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ – термы $(n \geq 0)$, то выражения вида $P^{(0)}$ и $P^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ являются ФЛП; такие формулы называются *атомарными*;
(2) если F и G – ФЛП и x – предметная переменная, то выражения вида $\neg F, (F \wedge G), (F \vee G), (F \longrightarrow G), (F \longleftrightarrow G), \forall x F, \exists x F$ также суть ФЛП; в двух последних случаях формула F называется *областью действия квантора по переменной* x;
(3) других формул нет.

Так же как и в случае ФЛВ, договоримся опускать в ФЛП внешние скобки и будем считать, что по убыванию "силы" логические операции располагаются в следующем порядке: $\neg, \forall, \exists, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow$.

Определим ФЛП индукцией по длине:

(0) логические константы $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ являются ФЛП;
(1) если $P^{(n)}$ – предикатный символ и $t_1, \ldots, t_n$ – термы $(n \geq 0)$, то выражения вида $P^{(0)}$ и $P^{(n)}(t_1, \ldots, t_n)$ являются ФЛП; такие формулы называются *атомарными*;
(2) если F и G – ФЛП и x – предметная переменная, то выражения вида $\neg F, (F \wedge G), (F \vee G), (F \longrightarrow G), (F \longleftrightarrow G), \forall x F, \exists x F$ также суть ФЛП; в двух последних случаях формула F называется *областью действия квантора по переменной* x;
(3) других формул нет.

Так же как и в случае ФЛВ, договоримся опускать в ФЛП внешние скобки и будем считать, что по убыванию "силы" логические операции располагаются в следующем порядке: $\neg, \forall, \exists, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow$.

При интерпретациях ФЛП (определение см. ниже) n-арные предикатные символы будут отображаться в конкретные n-арные предикаты на множествах; в частности, нульарным предикатным символам будут соответствовать нульарные предикаты, т.е. $\mathbf{0}$ или $\mathbf{1}$. Поэтому нульарные предикатные символы в ФЛП играют ту же роль, что и логические переменные в ФЛВ. Ввиду данного замечания *на всякую ФЛВ мы можем смотреть как на ФЛП, не содержащую кванторов и функциональных символов, а также предикатных символов арности больше нуля*.

Вхождение предметной переменной в ФЛП называется *связанным*, если оно находится сразу за некоторым кванторным символом или входит в область действия квантора по этой переменной. В противном случае вхождение переменной в ФЛП называется *свободным*. *Предметная переменная* называется *свободной (связанной)* в ФЛП, если она имеет по крайней мере одно свободное (соответственно связанное) вхождение в эту формулу. Например, в ФЛП

$$F(x, y) = \forall x \exists z (P^{(2)}(f^{(1)}(x), y) \vee Q^{(1)}(g^{(2)}(z, y))) \longrightarrow Q^{(1)}(x)$$

связанными являются первое и второе вхождения переменной x и оба вхождения переменной z, а свободными – третье вхождение переменной x и оба вхождения переменной y. Поэтому в этой формуле переменная x является одновременно и свободной, и связанной, z только связана, а y только свободна.

Если переменные $x_1, \ldots, x_k$ свободны в ФЛП F, то часто вместо F пишут $F(x_1, \ldots, x_k)$.

Сигнатурой называется произвольное фиксированное множество предикатных и функциональных символов. Говорят, что ФЛП F является *формулой сигнатуры* Σ , если каждый предикатный и функциональный символ, используемый в записи F, принадлежит Σ.

Вхождение предметной переменной в ФЛП называется *связанным*, если оно находится сразу за некоторым кванторным символом или входит в область действия квантора по этой переменной. В противном случае вхождение переменной в ФЛП называется *свободным*. *Предметная переменная* называется *свободной (связанной)* в ФЛП, если она имеет по крайней мере одно свободное (соответственно связанное) вхождение в эту формулу. Например, в ФЛП

$$F(x,y) = \forall x \exists z (P^{(2)}(f^{(1)}(x), y) \vee Q^{(1)}(g^{(2)}(z,y))) \longrightarrow Q^{(1)}(x)$$

связанными являются первое и второе вхождения переменной x и оба вхождения переменной z, а свободными – третье вхождение переменной x и оба вхождения переменной y. Поэтому в этой формуле переменная x является одновременно и свободной, и связанной, z только связана, а y только свободна.

Если переменные $x_1, \ldots, x_k$ свободны в ФЛП F, то часто вместо F пишут $F(x_1, \ldots, x_k)$.

Сигнатурой называется произвольное фиксированное множество предикатных и функциональных символов. Говорят, что ФЛП F является *формулой сигнатуры* Σ , если каждый предикатный и функциональный символ, используемый в записи F, принадлежит Σ.

Вхождение предметной переменной в ФЛП называется *связанным*, если оно находится сразу за некоторым кванторным символом или входит в область действия квантора по этой переменной. В противном случае вхождение переменной в ФЛП называется *свободным*. *Предметная переменная* называется *свободной (связанной)* в ФЛП, если она имеет по крайней мере одно свободное (соответственно связанное) вхождение в эту формулу. Например, в ФЛП

$$F(x,y) = \forall x \exists z (P^{(2)}(f^{(1)}(x), y) \vee Q^{(1)}(g^{(2)}(z,y))) \longrightarrow Q^{(1)}(x)$$

связанными являются первое и второе вхождения переменной x и оба вхождения переменной z, а свободными – третье вхождение переменной x и оба вхождения переменной y. Поэтому в этой формуле переменная x является одновременно и свободной, и связанной, z только связана, а y только свободна.

Если переменные $x_1, \ldots, x_k$ свободны в ФЛП F, то часто вместо F пишут $F(x_1, \ldots, x_k)$.

Сигнатурой называется произвольное фиксированное множество предикатных и функциональных символов. Говорят, что ФЛП F является *формулой сигнатуры* Σ , если каждый предикатный и функциональный символ, используемый в записи F, принадлежит Σ.

Пусть M – некоторое непустое множество, на котором определены предикаты из множества $\mathcal{P}$ и функции из множества $\mathcal{F}$. Множество M с заданными на нем предикатами и функциями обычно называется *моделью логики предикатов*.

Интерперетацией формулы F сигнатуры Σ в модель M называется отображение $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{P} \cup \mathcal{F}$, при котором предикатным символам арности n ставятся в соответствие конкретные предикаты из $\mathcal{P}$ той же арности, каждой константе из Σ – конкретный элемент множества M, а каждому функциональному символу арности n ставится в соответствие конкретная функция той же арности из $\mathcal{F}$, заданная на M.

Пусть M – некоторое непустое множество, на котором определены предикаты из множества $\mathcal{P}$ и функции из множества $\mathcal{F}$. Множество M с заданными на нем предикатами и функциями обычно называется *моделью логики предикатов*.

Интерперетацией формулы F сигнатуры Σ в модель M называется отображение $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{P} \cup \mathcal{F}$, при котором предикатным символам арности n ставятся в соответствие конкретные предикаты из $\mathcal{P}$ той же арности, каждой константе из Σ – конкретный элемент множества M, а каждому функциональному символу арности n ставится в соответствие конкретная функция той же арности из $\mathcal{F}$, заданная на M.

При любой конкретной интерпретации ϕ формула F переходит в конкретный предикат на модели M:

$$\phi : F(x_1, \ldots, x_k) \longmapsto (\phi F)(x_1, \ldots, x_k).$$

ФЛП $F(x_1, \ldots, x_k)$ называется *логически общезначимой* (или *тождественно истинной*), если для любой интерпретации ϕ этой формулы в произвольную модель M $\quad (\phi F)(x_1, \ldots, x_k)$ – тождественно истинный предикат на M, т.е.

$$\forall a_1, ..., \forall a_k \in M : \quad (\phi F)(a_1, \ldots, a_k) = 1.$$

ФЛП $F(x_1, \ldots, x_k)$ называется *логически противоречивой* (или *тождественно ложной*, или *невыполнимой*), если для любой интерпретации ϕ этой формулы в произвольную модель M $(\phi F)(x_1, \ldots, x_k)$ – тождественно ложный предикат на M, т.е.

$$\forall a_1, ..., \forall a_k \in M : \quad (\phi F)(a_1, \ldots, a_k) = 0.$$

При любой конкретной интерпретации ϕ формула F переходит в конкретный предикат на модели M:

$$\phi : F(x_1, \ldots, x_k) \longmapsto (\phi F)(x_1, \ldots, x_k).$$

ФЛП $F(x_1, \ldots, x_k)$ называется *логически общезначимой* (или *тождественно истинной*), если для любой интерпретации ϕ этой формулы в произвольную модель M $\quad(\phi F)(x_1, \ldots, x_k)$ – тождественно истинный предикат на M, т.е.

$$\forall a_1, ..., \forall a_k \in M : \quad (\phi F)(a_1, \ldots, a_k) = 1.$$

ФЛП $F(x_1, \ldots, x_k)$ называется *логически противоречивой* (или *тождественно ложной*, или *невыполнимой*), если для любой интерпретации ϕ этой формулы в произвольную модель M $(\phi F)(x_1, \ldots, x_k)$ – тождественно ложный предикат на M, т.е.

$$\forall a_1, ..., \forall a_k \in M : \quad (\phi F)(a_1, \ldots, a_k) = 0.$$

При любой конкретной интерпретации ϕ формула F переходит в конкретный предикат на модели M:

$$\phi : F(x_1, \dots, x_k) \longmapsto (\phi F)(x_1, \dots, x_k).$$

ФЛП $F(x_1, \dots, x_k)$ называется *логически общезначимой* (или *тождественно истинной*), если для любой интерпретации ϕ этой формулы в произвольную модель M $\quad(\phi F)(x_1, \dots, x_k)$ – тождественно истинный предикат на M, т.е.

$$\forall a_1, ..., \forall a_k \in M : \quad (\phi F)(a_1, \dots, a_k) = 1.$$

ФЛП $F(x_1, \dots, x_k)$ называется *логически противоречивой* (или *тождественно ложной*, или *невыполнимой*), если для любой интерпретации ϕ этой формулы в произвольную модель M $(\phi F)(x_1, \dots, x_k)$ – тождественно ложный предикат на M, т.е.

$$\forall a_1, ..., \forall a_k \in M : \quad (\phi F)(a_1, \dots, a_k) = 0.$$

ФЛП $F(x_1, \ldots, x_k)$ называется *выполнимой*, если существует интерпретация ϕ этой формулы в подходящую модель M, для которой предикат $(\phi F)(x_1, \ldots, x_k)$ выполним на M, т.е. принимает значение истина при каком-то наборе значений предметных переменных:

$$\exists a_1, ..., \exists a_k \in M : \quad (\phi F)(a_1, \ldots, a_k) = 1.$$

Набор формул $F_1(x_1, \ldots, x_k)$,..., $F_n(x_1, \ldots, x_k)$ логики предикатов называется выполнимым, если существует интерпретация ϕ этих формул в подходящую модель M и существуют $a_1, ..., a_n \in M$ такие, что

$$\forall i = 1, 2, ..., n \quad (\phi F_i)(a_1, \ldots, a_k) = 1.$$

ФЛП $F(x_1, \dots, x_k)$ называется *выполнимой*, если существует интерпретация ϕ этой формулы в подходящую модель M, для которой предикат $(\phi F)(x_1, \dots, x_k)$ выполним на M, т.е. принимает значение истина при каком-то наборе значений предметных переменных:

$$\exists a_1, ..., \exists a_k \in M : \quad (\phi F)(a_1, \dots, a_k) = 1.$$

Набор формул $F_1(x_1, \dots, x_k)$,..., $F_n(x_1, \dots, x_k)$ логики предикатов называется выполнимым, если существует интерпретация ϕ этих формул в подходящую модель M и существуют $a_1, ..., a_n \in M$ такие, что

$$\forall i = 1, 2, ..., n \quad (\phi F_i)(a_1, \dots, a_k) = 1.$$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим формулу

$$F(x) = P^{(1)}(x) \wedge \forall y (P^{(1)}(y) \longrightarrow D^{(2)}(x, y))$$

и модель с основным множеством $M = \{2, 3, 6, 9, 12, 15\}$ и заданными на нем предикатами

$P(x) =$"x – простое число", $\quad D(x, y) =$ "$x \leq y$".

Тогда при интерпретации $\phi_1 : P^{(1)} \longmapsto P, \quad D^{(2)} \longmapsto D$ эта формула перейдет в одноместный предикат на множестве M:

$(\phi_1\ F)(x) =$ " x – простое число и $\forall y \in M$ (если y – простое, то $x \leq y$)" .

Ясно, что это предикат "$x = 2$".

Если же мы рассмотрим другую модель с этим же множеством $M = \{2, 3, 6, 9, 12, 15\}$, но другими предикатами на нем

$P(x) =$"x – нечетное число", $D(x, y) =$ "x делит y",

то формула при интерпретации $\phi_2 : P^{(1)} \longmapsto P, \;\; D^{(2)} \longmapsto D$ перейдет в другой предикат на этом множестве

$(\phi_2\ F)(x) =$ " x – нечетное число и $\forall y \in M$ (если y – нечетное, то x делит y)" .

Ясно, что это предикат "$x = 3$".

ПРИМЕР 2. Вычислить истинностное значение ФЛП

$$F = \forall x(P^{(2)}(x, f^{(0)}) \longrightarrow Q^{(2)}(x, f^{(0)}) \vee Q^{(2)}(x, g^{(0)}))$$

в модели с основным множеством $\mathbf{N}$ при интерпретации ϕ:

$P^{(2)} \mapsto P : P(m, n) = \mathbf{1} \iff m \mid n,$

$Q^{(2)} \mapsto \ Q : Q(m, n) = \mathbf{1} \iff n = m,$

$f^{(0)} \mapsto 5, g^{(0)} \mapsto 1.$

При интерпретации ϕ формула F переходит в следующее высказывание ϕF о натуральных числах: *"для любого натурального числа x из того, что x делит 5, вытекает, что $x = 5$ или $x = 1$"*. Так как в силу простоты числа 5 это высказывание истинно, получаем $\phi F = \mathbf{1}$.

ПРИМЕР 2. Вычислить истинностное значение ФЛП

$$F = \forall x(P^{(2)}(x, f^{(0)}) \longrightarrow Q^{(2)}(x, f^{(0)}) \vee Q^{(2)}(x, g^{(0)}))$$

в модели с основным множеством $\mathbf{N}$ при интерпретации ϕ:

$P^{(2)} \mapsto P : P(m, n) = \mathbf{1} \iff m \mid n,$

$Q^{(2)} \mapsto \ Q : Q(m, n) = \mathbf{1} \iff n = m,$

$f^{(0)} \mapsto 5, g^{(0)} \mapsto 1.$

При интерпретации ϕ формула F переходит в следующее высказывание ϕF о натуральных числах: *"для любого натурального числа x из того, что x делит 5, вытекает, что $x = 5$ или $x = 1$"*. Так как в силу простоты числа 5 это высказывание истинно, получаем $\phi F = \mathbf{1}$.

На языке ФЛП могут быть выражены свойства многих математических объектов, что выгодно отличает этот язык от более бедного языка ФЛВ. Приведем поясняющие примеры.

ПРИМЕР 3. Записать с помощью ФЛП свойство числа быть наибольшим общим делителем двух натуральных чисел.

Напомним, что $w =$НОД(u, v), если, во-первых, w – общий делитель чисел u и v и, во-вторых, w делится на любой общий делитель u и v. В данном определении НОД встречается двухместный предикат $P(n, m)$ "деления нацело числа n на число m", заданный на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел: $P(n, m) = 1 \iff m \mid n$. Следовательно, нам понадобится один двухместный предикатный символ $P^{(2)}$. Рассмотрим формулу

$$F(u, v, w) = P^{(2)}(u, w) \wedge P^{(2)}(v, w) \wedge \forall x(P^{(2)}(u, x) \wedge P^{(2)}(v, x) \to P^{(2)}(w, x))$$

сигнатуры $\{P^{(2)}\}$. Эта формула является, очевидно, искомой в том смысле, что для ее интерпретации ϕ в множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, замещающей предикатный символ $P^{(2)}$ предикатом P делимости нацело, выполнено $(\phi F)(u, b, w) = 1$ тогда и только тогда, когда $w =$НОД(u, v).

На языке ФЛП могут быть выражены свойства многих математических объектов, что выгодно отличает этот язык от более бедного языка ФЛВ. Приведем поясняющие примеры.

ПРИМЕР 3. Записать с помощью ФЛП свойство числа быть наибольшим общим делителем двух натуральных чисел.

Напомним, что $w =$НОД(u, v), если, во-первых, w – общий делитель чисел u и v и, во-вторых, w делится на любой общий делитель u и v. В данном определении НОД встречается двухместный предикат $P(n, m)$ “деления нацело числа n на число m”, заданный на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел: $P(n, m) = 1 \iff m \mid n$. Следовательно, нам понадобится один двухместный предикатный символ $P^{(2)}$. Рассмотрим формулу

$$F(u, v, w) = P^{(2)}(u, w) \wedge P^{(2)}(v, w) \wedge \forall x(P^{(2)}(u, x) \wedge P^{(2)}(v, x) \to P^{(2)}(w, x))$$

сигнатуры $\{P^{(2)}\}$. Эта формула является, очевидно, искомой в том смысле, что для ее интерпретации ϕ в множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел, замещающей предикатный символ $P^{(2)}$ предикатом P делимости нацело, выполнено $(\phi F)(u, b, w) = 1$ тогда и только тогда, когда $w =$НОД(u, v).

На языке ФЛП могут быть выражены свойства многих математических объектов, что выгодно отличает этот язык от более бедного языка ФЛВ. Приведем поясняющие примеры.

ПРИМЕР 3. Записать с помощью ФЛП свойство числа быть наибольшим общим делителем двух натуральных чисел.

Напомним, что $w =$НОД(u, v), если, во-первых, w – общий делитель чисел u и v и, во-вторых, w делится на любой общий делитель u и v. В данном определении НОД встречается двухместный предикат $P(n, m)$ "деления нацело числа n на число m", заданный на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел: $P(n, m) = \mathbf{1} \Longleftrightarrow m \mid n$. Следовательно, нам понадобится один двухместный предикатный символ $P^{(2)}$. Рассмотрим формулу

$$F(u, v, w) = P^{(2)}(u, w) \wedge P^{(2)}(v, w) \wedge \forall x(P^{(2)}(u, x) \wedge P^{(2)}(v, x) \to P^{(2)}(w, x))$$

сигнатуры $\{P^{(2)}\}$. Эта формула является, очевидно, искомой в том смысле, что для ее интерпретации ϕ в множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел, замещающей предикатный символ $P^{(2)}$ предикатом P делимости нацело, выполнено $(\phi F)(u, b, w) = \mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда $w =$НОД(u, v).

На языке ФЛП могут быть выражены свойства многих математических объектов, что выгодно отличает этот язык от более бедного языка ФЛВ. Приведем поясняющие примеры.

ПРИМЕР 3. Записать с помощью ФЛП свойство числа быть наибольшим общим делителем двух натуральных чисел.

Напомним, что $w =$НОД(u, v), если, во-первых, w – общий делитель чисел u и v и, во-вторых, w делится на любой общий делитель u и v. В данном определении НОД встречается двухместный предикат $P(n, m)$ “деления нацело числа n на число m”, заданный на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел: $P(n, m) = \mathbf{1} \iff m \mid n$. Следовательно, нам понадобится один двухместный предикатный символ $P^{(2)}$. Рассмотрим формулу

$$F(u, v, w) = P^{(2)}(u, w) \wedge P^{(2)}(v, w) \wedge \forall x(P^{(2)}(u, x) \wedge P^{(2)}(v, x) \to P^{(2)}(w, x))$$

сигнатуры $\{P^{(2)}\}$. Эта формула является, очевидно, искомой в том смысле, что для ее интерпретации ϕ в множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел, замещающей предикатный символ $P^{(2)}$ предикатом P делимости нацело, выполнено $(\phi F)(u, b, w) = \mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда $w =$НОД(u, v).

ПРИМЕР 4. Записать с помощью ФЛП свойство натурального числа быть простым числом.

Число $u \in \mathbf{N}$ простое, если высказывание " для любого $x \in \mathbf{N}$ условие $x \mid u$ влечет за собой $x = u$ или $x = 1$" истинно. В данном высказывании фигурируют два двухместных предиката, заданных на $\mathbf{N}$: $P(n, m) = \mathbf{1} \iff m \mid n$ и $Q(n, m) = \mathbf{1} \iff n = m$ (предикат равенства). В искомой формуле им будут соответствовать предикатные символы $P^{(2)}$ и $Q^{(2)}$. Поскольку в формулу символ числа один не может входить (это не предметная переменная), нам необходимо выразить еще на языке ФЛП свойство натурального числа быть единицей. Это легко сделать, например, используя тот факт, что число y из $\mathbf{N}$ равно единице в том и только в том случае, если высказывание "всякое натуральное число x делится на y" истинно. Учитывая сказанное, получаем, что формула

$$F(u) = \exists y(\forall x P^{(2)}(x, y) \wedge \forall x(P^{(2)}(u, x) \longrightarrow Q^{(2)}(x, u) \vee Q^{(2)}(x, y)))$$

является искомой.

Говорят, что *модель конечна* или *бесконечна* в зависимости от того, конечно или бесконечно ее основное множество. Важно отметить, что язык логики предикатов позволяет различать понятия конечного и бесконечного, на что "не способен" язык логики высказываний.

УПРАЖНЕНИЕ. Убедиться, что ФЛП $F = \forall x \forall y \forall z(\neg P^{(2)}(x,x) \wedge (P^{(2)}(x,y) \wedge P^{(2)}(y,z) \longrightarrow P^{(2)}(x,z))) \wedge \forall x \exists y P^{(2)}(x,y)$ выполнима в некоторой бесконечной модели и не выполнима ни в какой конечной модели.

Говорят, что *модель конечна* или *бесконечна* в зависимости от того, конечно или бесконечно ее основное множество. Важно отметить, что язык логики предикатов позволяет различать понятия конечного и бесконечного, на что “не способен” язык логики высказываний.

УПРАЖНЕНИЕ. Убедиться, что ФЛП $F = \forall x \forall y \forall z(\neg P^{(2)}(x,x) \wedge (P^{(2)}(x,y) \wedge P^{(2)}(y,z) \longrightarrow P^{(2)}(x,z))) \wedge \forall x \exists y P^{(2)}(x,y)$ выполнима в некоторой бесконечной модели и не выполнима ни в какой конечной модели.

Понятие равносильности ФЛВ естественным образом переносится на ФЛП. Две ФЛП F и G называются *равносильными*, если для любой интерпретации ϕ этих формул в произвольную модель имеем $\phi F = \phi G$. Другими словами, формулы равносильны, если они не различимы на моделях. Ясно, что отношение равносильности является эквивалентностью, разбивающей множество ФЛП на классы равносильных формул. Примерами таких классов являются классы логически общезначимых и логически противоречивых формул. Как обычно, пишем $F \equiv G$, если F и G равносильны.

0. Все законы логики высказываний справедливы и в логике предикатов.
1. *Законы отрицания:*

$$\neg\forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x),$$

$$\neg\exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x).$$

2. *Законы перестановочности однотипных кванторов:*

$$\forall x \forall y F(x,y) \equiv \forall y \forall x F(x,y),$$

$$\exists x \exists y F(x,y) \equiv \exists y \exists x F(x,y).$$

3. *Законы дистрибутивности* $\forall$ *относительно* $\wedge$ *и* $\exists$ *относительно* $\vee$*:*

$$\forall x (F(x) \wedge G(x)) \equiv \forall x F(x) \wedge \forall x G(x),$$

$$\exists x (F(x) \vee G(x)) \equiv \exists x F(x) \vee \exists x G(x).$$

4. Если переменная x не встречается в формуле G или всякое вхождение x в G является связанным, то имеют место законы:

$$\forall x(F(x) \wedge G) \equiv \forall x F(x) \wedge G,$$

$$\forall x(F(x) \vee G) \equiv \forall x F(x) \vee G,$$

$$\exists x(F(x) \wedge G) \equiv \exists x F(x) \wedge G,$$

$$\exists x(F(x) \vee G) \equiv \exists x F(x) \vee G.$$

5. Если переменная y не встречается в формуле $F(x)$, то допустима *подстановка y вместо переменной x* в формулах $\forall x F(x)$ и $\exists x F(x)$, а именно:

$$\forall x F(x) \equiv \forall y F(y),$$

$$\exists x F(x) \equiv \exists y F(y).$$

Проверим, например, один из законов отрицания: $\neg\forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$. Для этого выпишем наряду с x *все* свободные предметные переменные, входящие в формулу F: $x, x_1, \dots, x_n$, и рассмотрим интерпретацию ϕ формул $\neg\forall x F(x)$ и $\exists x \neg F(x)$ в произвольную модель с основным множеством M . Надо доказать, что предикаты $(\phi\neg\forall x F(x))(x_1, \dots, x_n)$ и $(\phi\exists x \neg F(x))(x_1, \dots, x_n)$ на M, в которые переходят эти формулы, равны. Для этого надо проверить, что для любых $a_1, \dots, a_n \in M$ выполнено равенство $(\phi\neg\forall x F(x))(a_1, \dots, a_n) = (\phi\exists x \neg F(x))(a_1, \dots, a_n)$. Действительно, имеем $(\phi\neg\forall x F(x))(a_1, \dots, a_n) = 1 \iff$ не для любого $x \in M$ выполнено $(\phi F(x))(a_1, \dots, a_n) = 1 \iff$ существует $b \in M$ такой, что $(\phi F(b))(a_1, \dots, a_n) = 0 \iff$ существует $b \in M$ такой, что $(\phi\neg F(b))(a_1, \dots, a_n) = 1 \iff (\phi\exists x \neg F(x))(a_1, \dots, a_n) = 1$. Таким образом, $(\phi\neg\forall x F(x))(a_1, \dots, a_n) = (\phi\exists x \neg F(x))(a_1, \dots, a_n)$ для любой интерпретации ϕ этих формул, а значит, $\neg\forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$.

Аналогично проверяются остальные законы логики предикатов.

Проверим, например, один из законов отрицания: $\neg\forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$. Для этого выпишем наряду с x *все* свободные предметные переменные, входящие в формулу F: $x, x_1, \ldots, x_n$, и рассмотрим интерпретацию ϕ формул $\neg\forall x F(x)$ и $\exists x \neg F(x)$ в произвольную модель с основным множеством M . Надо доказать, что предикаты $(\phi\neg\forall x F(x))(x_1, \ldots, x_n)$ и $(\phi\exists x \neg F(x))(x_1, \ldots, x_n)$ на M, в которые переходят эти формулы, равны. Для этого надо проверить, что для любых $a_1, \ldots, a_n \in M$ выполнено равенство $(\phi\neg\forall x F(x))(a_1, \ldots, a_n) = (\phi\exists x \neg F(x))(a_1, \ldots, a_n)$. Действительно, имеем $(\phi\neg\forall x F(x))(a_1, \ldots, a_n) = 1 \iff$ не для любого $x \in M$ выполнено $(\phi F(x))(a_1, \ldots, a_n) = 1 \iff$ существует $b \in M$ такой, что $(\phi F(b))(a_1, \ldots, a_n) = 0 \iff$ существует $b \in M$ такой, что $(\phi\neg F(b))(a_1, \ldots, a_n) = 1 \iff (\phi\exists x \neg F(x))(a_1, \ldots, a_n) = 1$. Таким образом, $(\phi\neg\forall x F(x))(a_1, \ldots, a_n) = (\phi\exists x \neg F(x))(a_1, \ldots, a_n)$ для любой интерпретации ϕ этих формул, а значит, $\neg\forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$.

Аналогично проверяются остальные законы логики предикатов.

Важно отметить,что в общем случае $\forall x(F(x) \vee G(x)) \not\equiv \forall x F(x) \vee \forall x G(x)$ и $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \not\equiv \exists x F(x) \wedge \exists x G(x)$.

Покажем, например, что $\forall x(F(x) \vee G(x)) \not\equiv \forall x F(x) \vee \forall x G(x)$ для некоторых атомарных формул $F(x)$ и $G(x)$ (считаем, что F и G – одноместные предикатные символы). Для этого рассмотрим модель с основным множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел и одноместными предикатами P и Q на нем, определяемыми следующим образом: $P(x) = \mathbf{1} \iff x \leq 2$ и $Q(x) = \mathbf{1} \iff x > 2$. Рассмотрим интерпретацию ϕ: $\phi(F) = P$ и $\phi(G) = Q$. Тогда, очевидно, $\phi\forall x(F(x) \vee G(x)) = \mathbf{1}$, в то время как $\phi(\forall x F(x) \vee \forall x G(x)) = \phi\forall x F(x) \vee \phi\forall x G(x) = \mathbf{0} \vee \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Следовательно, формулы $\forall x(F(x) \vee G(x))$ и $\forall x F(x) \vee \forall x G(x)$ не равносильны.

Важно отметить,что в общем случае $\forall x(F(x) \vee G(x)) \not\equiv \forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ и $\exists x(F(x) \wedge G(x)) \not\equiv \exists xF(x) \wedge \exists xG(x)$.

Покажем, например, что $\forall x(F(x) \vee G(x)) \not\equiv \forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ для некоторых атомарных формул $F(x)$ и $G(x)$ (считаем, что F и G – одноместные предикатные символы). Для этого рассмотрим модель с основным множеством $\mathbf{N}$ натуральных чисел и одноместными предикатами P и Q на нем, определяемыми следующим образом: $P(x) = \mathbf{1} \iff x \leq 2$ и $Q(x) = \mathbf{1} \iff x > 2$. Рассмотрим интерпретацию ϕ: $\phi(F) = P$ и $\phi(G) = Q$. Тогда, очевидно, $\phi\forall x(F(x) \vee G(x)) = \mathbf{1}$, в то время как $\phi(\forall xF(x) \vee \forall xG(x)) = \phi\forall xF(x) \vee \phi\forall xG(x) = \mathbf{0} \vee \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Следовательно, формулы $\forall x(F(x) \vee G(x))$ и $\forall xF(x) \vee \forall xG(x)$ не равносильны.

Отметим некоторые важные следствия из выписанных законов логики предикатов:

1′. $$\exists x(F(x) \longrightarrow G(x)) \equiv \forall x F(x) \longrightarrow \exists x G(x).$$

2′. Если переменная x не встречается в формуле G или всякое вхождение x в G является связанным, то

$$\exists x(F(x) \longrightarrow G) \equiv \forall x F(x) \longrightarrow G,$$

$$\forall x(F(x) \longrightarrow G) \equiv \exists x F(x) \longrightarrow G,$$

$$\exists x(G \longrightarrow F(x)) \equiv G \longrightarrow \exists x F(x),$$

$$\forall x(G \longrightarrow F(x)) \equiv G \longrightarrow \forall x F(x).$$

Докажем равносильность 1′. В самом деле,
$\exists x(F(x) \longrightarrow G(x)) \equiv \exists x(\neg F(x) \vee G(x)) \equiv \exists x \neg F(x) \vee \exists x G(x) \equiv \neg \forall x F(x) \vee \exists x G(x) \equiv \forall x F(x) \longrightarrow \exists x G(x)$.

Первая и третья равносильности пункта 2′ вытекают из 1′, а остальные получаются аналогично 1′ применением законов логики предикатов из пункта 4.

Отметим некоторые важные следствия из выписанных законов логики предикатов:

1′. $$\exists x(F(x) \longrightarrow G(x)) \equiv \forall x F(x) \longrightarrow \exists x G(x).$$

2′. Если переменная x не встречается в формуле G или всякое вхождение x в G является связанным, то

$$\exists x(F(x) \longrightarrow G) \equiv \forall x F(x) \longrightarrow G,$$

$$\forall x(F(x) \longrightarrow G) \equiv \exists x F(x) \longrightarrow G,$$

$$\exists x(G \longrightarrow F(x)) \equiv G \longrightarrow \exists x F(x),$$

$$\forall x(G \longrightarrow F(x)) \equiv G \longrightarrow \forall x F(x).$$

Докажем равносильность 1′. В самом деле,
$\exists x(F(x) \longrightarrow G(x)) \equiv \exists x(\neg F(x) \vee G(x)) \equiv \exists x \neg F(x) \vee \exists x G(x) \equiv \neg \forall x F(x) \vee \exists x G(x) \equiv \forall x F(x) \longrightarrow \exists x G(x)$.

Первая и третья равносильности пункта 2′ вытекают из 1′, а остальные получаются аналогично 1′ применением законов логики предикатов из пункта 4.

Отметим некоторые важные следствия из выписанных законов логики предикатов:

$1'$. $$\exists x(F(x) \longrightarrow G(x)) \equiv \forall x F(x) \longrightarrow \exists x G(x).$$

$2'$. Если переменная x не встречается в формуле G или всякое вхождение x в G является связанным, то

$$\exists x(F(x) \longrightarrow G) \equiv \forall x F(x) \longrightarrow G,$$

$$\forall x(F(x) \longrightarrow G) \equiv \exists x F(x) \longrightarrow G,$$

$$\exists x(G \longrightarrow F(x)) \equiv G \longrightarrow \exists x F(x),$$

$$\forall x(G \longrightarrow F(x)) \equiv G \longrightarrow \forall x F(x).$$

Докажем равносильность $1'$. В самом деле,
$\exists x(F(x) \longrightarrow G(x)) \equiv \exists x(\neg F(x) \vee G(x)) \equiv \exists x \neg F(x) \vee \exists x G(x) \equiv \neg \forall x F(x) \vee \exists x G(x) \equiv \forall x F(x) \longrightarrow \exists x G(x)$.

Первая и третья равносильности пункта $2'$ вытекают из $1'$, а остальные получаются аналогично $1'$ применением законов логики предикатов из пункта 4.

ПРИМЕР 1. Доказать, что ФЛП

$$F = \exists x P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \exists u Q^{(3)}(y, t, u) \wedge \forall x R^{(1)}(g^{(1)}(x))$$

и

$$G = \forall x \forall z \exists u (P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}((g^{(1)}(z)))$$

равносильны.

Действительно, $F = \exists x P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \exists u Q^{(3)}(y, t, u) \wedge \forall x R^{(1)}(g^{(1)}(x))$
$\equiv^4 \exists x P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \forall x (\exists u Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}(g^{(1)}(x)))$
$\equiv^4 \exists x P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \forall x \exists u (Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}(g^{(1)}(x)))$
$\equiv^5 \exists x P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \forall z \exists u (Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}(g^{(1)}(z)))$
$\equiv^{2'} \forall x (P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \forall z \exists u (Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}(g^{(1)}(z))))$
$\equiv^{2'} \forall x \forall z (P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \exists u (Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}(g^{(1)}z)))$
$\equiv^{2'} \forall x \forall z \exists u (P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}(g^{(1)}(z))) = G.$

ПРИМЕР 1. Доказать, что ФЛП

$$F = \exists x P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \exists u Q^{(3)}(y, t, u) \wedge \forall x R^{(1)}(g^{(1)}(x))$$

и

$$G = \forall x \forall z \exists u (P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}((g^{(1)}(z)))$$

равносильны.

Действительно, $F = \exists x P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \exists u Q^{(3)}(y, t, u) \wedge \forall x R^{(1)}(g^{(1)}(x))$
$\equiv^4 \exists x P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \forall x(\exists u Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}(g^{(1)}(x)))$
$\equiv^4 \exists x P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \forall x \exists u(Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}(g^{(1)}(x)))$
$\equiv^5 \exists x P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \forall z \exists u(Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}(g^{(1)}(z)))$
$\equiv^{2'} \forall x(P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \forall z \exists u(Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}(g^{(1)}(z))))$
$\equiv^{2'} \forall x \forall z(P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow \exists u(Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}(g^{(1)} z))))$
$\equiv^{2'} \forall x \forall z \exists u(P^{(2)}(x, f^{(1)}(t)) \longrightarrow Q^{(3)}(y, t, u) \wedge R^{(1)}(g^{(1)}(z))) = G.$

ПРИМЕР 2. Доказать, что ФЛП

$$F(y) = \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (\exists x P^{(1)}(x) \longrightarrow \exists x Q^{(2)}(x,y))$$

логически общезначима.

Проверять логическую общезначимость формулы $F(y)$, используя непосредственно определение, довольно сложно. Поэтому мы сначала упростим $F(y)$ с помощью равносильных преобразований:

$F(y) = \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (\exists x P^{(1)}(x) \longrightarrow \exists x Q^{(2)}(x,y))$
$\equiv^5 \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (\exists z P^{(1)}(z) \longrightarrow \exists x Q^{(2)}(x,y))$
$\equiv^{2'} \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow \exists x(\exists z P^{(1)}(z) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y))$
$\equiv^{2'} \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow \exists x \forall z(P^{(1)}(z) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y))$
$\equiv^{1'} \exists x((P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow \forall z(P^{(1)}(z) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)))$
$\equiv^{2'} \exists x \forall z((P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (P^{(1)}(z) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)))$
$\equiv^0 \exists x \forall z(\neg(\neg P^{(1)}(x) \vee Q^{(2)}(x,y)) \vee (\neg P^{(1)}(z) \vee Q^{(2)}(x,y)))$
$\equiv^0 \exists x \forall z(P^{(1)}(x) \vee \neg P^{(1)}(z) \vee Q^{(2)}(x,y))$.

ПРИМЕР 2. Доказать, что ФЛП

$$F(y) = \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (\exists x P^{(1)}(x) \longrightarrow \exists x Q^{(2)}(x,y))$$

логически общезначима.

Проверять логическую общезначимость формулы $F(y)$, используя непосредственно определение, довольно сложно. Поэтому мы сначала упростим $F(y)$ с помощью равносильных преобразований:

$F(y) = \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (\exists x P^{(1)}(x) \longrightarrow \exists x Q^{(2)}(x,y))$
$\equiv^{5} \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (\exists z P^{(1)}(z) \longrightarrow \exists x Q^{(2)}(x,y))$
$\equiv^{2'} \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow \exists x(\exists z P^{(1)}(z) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y))$
$\equiv^{2'} \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow \exists x \forall z(P^{(1)}(z) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y))$
$\equiv^{1'} \exists x((P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow \forall z(P^{(1)}(z) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)))$
$\equiv^{2'} \exists x \forall z((P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (P^{(1)}(z) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)))$
$\equiv^{0} \exists x \forall z(\neg(\neg P^{(1)}(x) \vee Q^{(2)}(x,y)) \vee (\neg P^{(1)}(z) \vee Q^{(2)}(x,y)))$
$\equiv^{0} \exists x \forall z(P^{(1)}(x) \vee \neg P^{(1)}(z) \vee Q^{(2)}(x,y))$.

Законы логики предикатов

Итак, $F(y) \equiv G(y)$, где $G(y) = \exists x \forall z (P^{(1)}(x) \vee \neg P^{(1)}(z) \vee Q^{(2)}(x,y))$. Покажем теперь, что формула $G(y)$ логически общезначима.

Зафиксируем произвольную модель с основным множеством M, на котором заданы одноместный предикат P и двухместный предикат Q, и пусть интерпретация ϕ такова, что $\phi(P^{(1)}) = P$, $\phi(Q^{(2)}) = Q$. Тогда формула $G(y)$ перейдет при интерпретации ϕ в следующий одноместный предикат $\phi G(y)$ на множестве M :

“существует $x \in M$ такой, что для любого $z \in M$ справедливо $P(x) = \mathbf{1}$ или $\neg P(z) = \mathbf{1}$, или $Q(x,y) = \mathbf{1}$”.

Надо убедиться, что этот предикат всегда является тождественно истинным, т.е. для всякого элемента $b \in M$: $\phi G(b) = 1$, т.е. истинно высказывание:

“существует $x \in M$ такой, что для любого $z \in M$ справедливо $P(x) = \mathbf{1}$ или $\neg P(z) = \mathbf{1}$, или $Q(x,b) = \mathbf{1}$” .

Действительно, если найдется элемент $x \in M$ такой, что $P(x) = \mathbf{1}$, то данное высказывание, очевидно, истинно. В противном случае P – тождественно ложный предикат и, следовательно, для любого элемента $z \in M$ имеем $\neg P(z) = \mathbf{1}$, что, в свою очередь, опять влечет за собой истинность рассматриваемого высказывания.

Итак, $F(y) \equiv G(y)$, где $G(y) = \exists x \forall z(P^{(1)}(x) \vee \neg P^{(1)}(z) \vee Q^{(2)}(x, y))$. Покажем теперь, что формула $G(y)$ логически общезначима.

Зафиксируем произвольную модель с основным множеством M, на котором заданы одноместный предикат P и двухместный предикат Q, и пусть интерпретация ϕ такова, что $\phi(P^{(1)}) = P$, $\phi(Q^{(2)}) = Q$. Тогда формула $G(y)$ перейдет при интерпретации ϕ в следующий одноместный предикат $\phi G(y)$ на множестве M :

"существует $x \in M$ такой, что для любого $z \in M$ справедливо $P(x) = \mathbf{1}$ или $\neg P(z) = \mathbf{1}$, или $Q(x, y) = \mathbf{1}$".

Надо убедиться, что этот предикат всегда является тождественно истинным, т.е. для всякого элемента $b \in M$: $\phi G(b) = 1$, т.е. истинно высказывание:

"существует $x \in M$ такой, что для любого $z \in M$ справедливо $P(x) = \mathbf{1}$ или $\neg P(z) = \mathbf{1}$, или $Q(x, b) = \mathbf{1}$" .

Действительно, если найдется элемент $x \in M$ такой, что $P(x) = \mathbf{1}$, то данное высказывание, очевидно, истинно. В противном случае P – тождественно ложный предикат и, следовательно, для любого элемента $z \in M$ имеем $\neg P(z) = \mathbf{1}$, что, в свою очередь, опять влечет за собой истинность рассматриваемого высказывания.

Таким образом, $\phi G(b) = 1$ для любого элемента $b \in M$, а значит формула $G(y)$ при интерпретации ϕ в любую модель переходит в тождественно истинный предикат $\phi G(y)$. Это означает, что формула $G(y)$, а следовательно и равносильная ей формула $F(y)$, является логически общезначимой.

Законы логики предикатов позволяют правильно строить отрицания различных предложений.

ПРИМЕР 3. Записать условие для действительного числа u, означающее, что u не является пределом функции $f(x)$ в точке x_0.

Приведем сначала определение предела функции действительного аргумента: *число u называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного ϵ существует положительное δ такое, что для любого числа x неравенство $\mid x - x_0 \mid < \delta$ влечет за собой $\mid f(x) - u \mid < \epsilon$.* Запишем данное определение на языке ФЛП:

$$F(u, x_0) = \forall \epsilon (\epsilon > 0 \longrightarrow \exists \delta (\delta > 0 \land \forall x (\mid x - x_0 \mid < \delta \longrightarrow \mid f(x) - u \mid < \epsilon)));$$

здесь мы отождествляем для простоты предметные переменные с действительными числами, а вместо символов предикатов пишем сами предикаты "$\epsilon > 0$", "$\delta > 0$", "$\mid x - x_0 \mid < \delta$" и "$\mid f(x) - u \mid < \epsilon$".

Законы логики предикатов позволяют правильно строить отрицания различных предложений.

ПРИМЕР 3. Записать условие для действительного числа u, означающее, что u не является пределом функции $f(x)$ в точке x_0.

Приведем сначала определение предела функции действительного аргумента: *число u называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного ϵ существует положительное δ такое, что для любого числа x неравенство $\mid x - x_0 \mid < \delta$ влечет за собой $\mid f(x) - u \mid < \epsilon$.*
Запишем данное определение на языке ФЛП:

$$F(u, x_0) = \forall \epsilon (\epsilon > 0 \longrightarrow \exists \delta (\delta > 0 \wedge \forall x (\mid x - x_0 \mid < \delta \longrightarrow \mid f(x) - u \mid < \epsilon)));$$

здесь мы отождествляем для простоты предметные переменные с действительными числами, а вместо символов предикатов пишем сами предикаты "$\epsilon > 0$", "$\delta > 0$", "$\mid x - x_0 \mid < \delta$" и "$\mid f(x) - u \mid < \epsilon$".

Законы логики предикатов позволяют правильно строить отрицания различных предложений.

ПРИМЕР 3. Записать условие для действительного числа u, означающее, что u не является пределом функции $f(x)$ в точке x_0.

Приведем сначала определение предела функции действительного аргумента: *число u называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного ϵ существует положительное δ такое, что для любого числа x неравенство $| x - x_0 | < \delta$ влечет за собой $| f(x) - u | < \epsilon$.*
Запишем данное определение на языке ФЛП:

$$F(u, x_0) = \forall\epsilon(\epsilon > 0 \longrightarrow \exists\delta(\delta > 0 \wedge \forall x(| x - x_0 | < \delta \longrightarrow | f(x) - u | < \epsilon)));$$

здесь мы отождествляем для простоты предметные переменные с действительными числами, а вместо символов предикатов пишем сами предикаты "$\epsilon > 0$", "$\delta > 0$", "$| x - x_0 | < \delta$" и "$| f(x) - u | < \epsilon$".

Тогда имеем:

$$\neg F(u,x_0) = \neg\forall\epsilon(\epsilon > 0 \longrightarrow \exists\delta(\delta > 0 \wedge \forall x(\mid x - x_0 \mid< \delta \longrightarrow\mid f(x) - u \mid< \epsilon)))$$
$$\equiv \exists\epsilon\neg(\epsilon > 0 \longrightarrow \exists\delta(\delta > 0 \wedge \forall x(\mid x - x_0 \mid< \delta \longrightarrow\mid f(x) - u \mid< \epsilon)))$$
$$\equiv \exists\epsilon\neg(\neg(\epsilon > 0) \vee \exists\delta(\delta > 0 \wedge \forall x(\neg(\mid x - x_0 \mid< \delta)\vee \mid f(x) - u \mid< \epsilon)))$$
$$\equiv \exists\epsilon(\epsilon > 0 \wedge \forall\delta\neg(\delta > 0 \wedge \forall x(\neg(\mid x - x_0 \mid< \delta)\vee \mid f(x) - u \mid< \epsilon)))$$
$$\equiv \exists\epsilon(\epsilon > 0 \wedge \forall\delta(\neg(\delta > 0) \vee \neg\forall x(\neg(\mid x - x_0 \mid< \delta)\vee \mid f(x) - u \mid< \epsilon)))$$
$$\equiv \exists\epsilon(\epsilon > 0 \wedge \forall\delta(\neg(\delta > 0) \vee \exists x(\neg\neg(\mid x - x_0 \mid< \delta) \wedge \neg(\mid f(x) - u \mid< \epsilon))))$$
$$\equiv \exists\epsilon(\epsilon > 0 \wedge \forall\delta(\delta > 0 \longrightarrow \exists x(\mid x - x_0 \mid< \delta\wedge \mid f(x) - u \mid\geq \epsilon))).$$

Таким образом, *число u не является пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если (и только если) существует положительное ϵ такое, что для любого положительного δ найдется число x, для которого $\mid x - x_0 \mid< \delta$ и тем не менее $\mid f(x) - u \mid\geq \epsilon$.*

Тогда имеем:

$$\neg F(u, x_0) = \neg\forall\epsilon(\epsilon > 0 \longrightarrow \exists\delta(\delta > 0 \wedge \forall x(| x - x_0 |< \delta \longrightarrow | f(x) - u |< \epsilon)))$$
$$\equiv \exists\epsilon\neg(\epsilon > 0 \longrightarrow \exists\delta(\delta > 0 \wedge \forall x(| x - x_0 |< \delta \longrightarrow | f(x) - u |< \epsilon)))$$
$$\equiv \exists\epsilon\neg(\neg(\epsilon > 0) \vee \exists\delta(\delta > 0 \wedge \forall x(\neg(| x - x_0 |< \delta) \vee | f(x) - u |< \epsilon)))$$
$$\equiv \exists\epsilon(\epsilon > 0 \wedge \forall\delta\neg(\delta > 0 \wedge \forall x(\neg(| x - x_0 |< \delta) \vee | f(x) - u |< \epsilon)))$$
$$\equiv \exists\epsilon(\epsilon > 0 \wedge \forall\delta(\neg(\delta > 0) \vee \neg\forall x(\neg(| x - x_0 |< \delta) \vee | f(x) - u |< \epsilon)))$$
$$\equiv \exists\epsilon(\epsilon > 0 \wedge \forall\delta(\neg(\delta > 0) \vee \exists x(\neg\neg(| x - x_0 |< \delta) \wedge \neg(| f(x) - u |< \epsilon))))$$
$$\equiv \exists\epsilon(\epsilon > 0 \wedge \forall\delta(\delta > 0 \longrightarrow \exists x(| x - x_0 |< \delta \wedge | f(x) - u |\geq \epsilon))).$$

Таким образом, *число u не является пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если (и только если) существует положительное ϵ такое, что для любого положительного δ найдется число x, для которого $| x - x_0 |< \delta$ и тем не менее $| f(x) - u |\geq \epsilon$.*

ФЛП называется *предваренной нормальной формой* (сокращенно ПНФ), если она имеет вид

$$\mathbf{q}_1 x_1 \mathbf{q}_2 x_2 \cdots \mathbf{q}_n x_n F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $\mathbf{q}_i \in \{\forall, \exists\}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$ и формула F не содержит кванторов. Таким образом, в ПНФ все кванторы (если они есть) "вынесены вперед" . При этом последовательность кванторов $\mathbf{q}_1 x_1 \mathbf{q}_2 x_2 \cdots \mathbf{q}_n x_n$ называется *кванторной приставкой*, а формула $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – бескванторной частью ПНФ. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Всякая ФЛП равносильна некоторой ПНФ.*

ФЛП называется *предваренной нормальной формой* (сокращенно ПНФ), если она имеет вид

$$\mathbf{q}_1 x_1 \mathbf{q}_2 x_2 \cdots \mathbf{q}_n x_n F(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $\mathbf{q}_i \in \{\forall, \exists\}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$ и формула F не содержит кванторов. Таким образом, в ПНФ все кванторы (если они есть) "вынесены вперед" . При этом последовательность кванторов $\mathbf{q}_1 x_1 \mathbf{q}_2 x_2 \cdots \mathbf{q}_n x_n$ называется *кванторной приставкой*, а формула $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – бескванторной частью ПНФ. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Всякая ФЛП равносильна некоторой ПНФ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – произвольная ФЛП. Поскольку все логические связки могут быть выражены через связки $\neg$ и $\wedge$, а квантор $\exists x$ – через квантор $\forall x$ и отрицание $\neg$ (т.к. $\exists x H(x) \equiv \neg\forall\neg H(x)$), считаем без ограничения общности, что в формулу G входят лишь символы логических операций $\neg, \wedge$ и $\forall$. Далее доказательство будем проводить индукцией по длине формулы G.

Случай 1: *G равна* $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ *или атомарной формуле.* Тогда G сама является ПНФ.

Случай 2: $G = \neg H$. По предположению индукции, формула H равносильна ПНФ вида $\mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n H'(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $G \equiv \neg H \equiv \neg\mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n H'(x_1, \ldots, x_n) \equiv \bar{\mathbf{q}}_1 x_1 \cdots \bar{\mathbf{q}}_n x_n \neg H'(x_1, \ldots, x_n)$, где

$$\bar{\mathbf{q}}_i = \begin{cases} \forall, & \text{если} \quad \mathbf{q}_i = \exists, \\ \exists, & \text{если} \quad \mathbf{q}_i = \forall. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – произвольная ФЛП. Поскольку все логические связки могут быть выражены через связки $\neg$ и $\wedge$, а квантор $\exists x$ – через квантор $\forall x$ и отрицание $\neg$ (т.к. $\exists x H(x) \equiv \neg\forall\neg H(x)$), считаем без ограничения общности, что в формулу G входят лишь символы логических операций $\neg, \wedge$ и $\forall$. Далее доказательство будем проводить индукцией по длине формулы G.

Случай 1: *G равна* $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ *или атомарной формуле*. Тогда G сама является ПНФ.

Случай 2: $G = \neg H$. По предположению индукции, формула H равносильна ПНФ вида $\mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n H'(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $G \equiv \neg H \equiv \neg \mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n H'(x_1, \ldots, x_n) \equiv \bar{\mathbf{q}}_1 x_1 \cdots \bar{\mathbf{q}}_n x_n \neg H'(x_1, \ldots, x_n)$, где

$$\bar{\mathbf{q}}_i = \begin{cases} \forall, & \text{если} \quad \mathbf{q}_i = \exists, \\ \exists, & \text{если} \quad \mathbf{q}_i = \forall. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – произвольная ФЛП. Поскольку все логические связки могут быть выражены через связки $\neg$ и $\wedge$, а квантор $\exists x$ – через квантор $\forall x$ и отрицание $\neg$ (т.к. $\exists x H(x) \equiv \neg\forall\neg H(x)$), считаем без ограничения общности, что в формулу G входят лишь символы логических операций $\neg, \wedge$ и $\forall$. Далее доказательство будем проводить индукцией по длине формулы G.

Случай 1: *G равна $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ или атомарной формуле*. Тогда G сама является ПНФ.

Случай 2: $G = \neg H$. По предположению индукции, формула H равносильна ПНФ вида $\mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n H'(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $G \equiv \neg H \equiv \neg \mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n H'(x_1, \ldots, x_n) \equiv \bar{\mathbf{q}}_1 x_1 \cdots \bar{\mathbf{q}}_n x_n \neg H'(x_1, \ldots, x_n)$, где

$$\bar{\mathbf{q}}_i = \begin{cases} \forall, & \text{если} \quad \mathbf{q}_i = \exists, \\ \exists, & \text{если} \quad \mathbf{q}_i = \forall. \end{cases}$$

Случай 3: $G = H_1 \wedge H_2$. Применяя индуктивное предположение к формулам H_1 и H_2, имеющим меньшую длину, чем G, получаем, что они равносильны соответственно ПНФ вида $\mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n H_1'(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{q}_1' y_1 \cdots \mathbf{q}_m' y_m H_2'(y_1, \ldots, y_m)$. Ввиду законов 5 логики предикатов мы имеем право при необходимости переименовывать связанные вхождения переменных в ФЛП, а значит, можем считать, что переменные $x_1, \ldots, x_n$ не встречаются в записи формулы $\mathbf{q}_1' y_1 \cdots \mathbf{q}_n' y_m H_2'(y_1, \ldots, y_m)$, а переменные $y_1, \ldots, y_m$ – в записи формулы $\mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n H_1'(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда, учитывая законы 4 логики предикатов, получаем $G = H_1 \wedge H_2 \equiv \mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n H_1'(x_1, \ldots, x_n) \wedge \mathbf{q}_1' y_1 \cdots \mathbf{q}_m' y_m H_2'(y_1, \ldots, y_m) \equiv$ $\mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n \mathbf{q}_1' y_1 \cdots \mathbf{q}_m' y_m (H_1'(x_1, \ldots, x_n) \wedge H_2'(y_1, \ldots, y_m))$. Последняя формула является ПНФ, равносильной G.

Случай 4: $G = \forall x H(x)$. По предположению индукции, $H(x)$ равносильна некоторой ПНФ вида $\mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n H'(x, x_1, \ldots, x_n)$, причем из соображений, приведенных выше, также можно считать, что переменные $x_1, \ldots, x_n$ отличны от x. Тогда, очевидно, формула $G = \forall x H(x)$ равносильна ПНФ вида $\forall x \mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n H'(x, x_1, \ldots, x_n)$. Теорема доказана.

В доказательстве этой теоремы указан, по существу, алгоритм приведения любой ФЛП к равносильной ей ПНФ. При этом, конечно, не обязательно приводить сначала данную ФЛП к формуле, содержащей лишь символы логических операций $\neg$, $\wedge$, $\forall$; законы логики предикатов 3,4 и 5, а также следствия $1'$ и $2'$ из этих законов позволяют легко выносить вперед все кванторы в любом конкретном случае.

Случай 4: $G = \forall x H(x)$. По предположению индукции, $H(x)$ равносильна некоторой ПНФ вида $\mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n H'(x, x_1, \ldots, x_n)$, причем из соображений, приведенных выше, также можно считать, что переменные $x_1, \ldots, x_n$ отличны от x. Тогда, очевидно, формула $G = \forall x H(x)$ равносильна ПНФ вида $\forall x \mathbf{q}_1 x_1 \cdots \mathbf{q}_n x_n H'(x, x_1, \ldots, x_n)$. Теорема доказана.

В доказательстве этой теоремы указан, по существу, алгоритм приведения любой ФЛП к равносильной ей ПНФ. При этом, конечно, не обязательно приводить сначала данную ФЛП к формуле, содержащей лишь символы логических операций $\neg$, $\wedge$, $\forall$; законы логики предикатов 3,4 и 5, а также следствия $1'$ и $2'$ из этих законов позволяют легко выносить вперед все кванторы в любом конкретном случае.

ПРИМЕР 1. Построить ПНФ, равносильную следующей ФЛП:

$$F = \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (\forall y P^{(1)}(y) \vee \exists z Q^{(2)}(y,z).$$

Имеем:

$$F \equiv \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (\forall u P^{(1)}(u) \vee \exists z Q^{(2)}(y,z))$$
$$\equiv \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow \forall u \exists z(P^{(1)}(u) \vee Q^{(2)}(y,z))$$
$$\equiv \exists x((P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow \forall u \exists z(P^{(1)}(u) \vee Q^{(2)}(y,z)))$$
$$\equiv \exists x \forall u \exists z((P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (P^{(1)}(u) \vee Q^{(2)}(y,z))).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. *Приведение к ПНФ формул логики предикатов не является однозначным.* Действительно, легко видеть, например, что формула F в разобранном примере может быть приведена и к ПНФ вида

$$\forall u \exists z \exists x((P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (P^{(1)}(u) \vee Q^{(2)}(y,z)))$$

с *существенно другой* кванторной приставкой.

ПРИМЕР 1. Построить ПНФ, равносильную следующей ФЛП:

$$F = \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (\forall y P^{(1)}(y) \vee \exists z Q^{(2)}(y,z).$$

Имеем:

$$F \equiv \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (\forall u P^{(1)}(u) \vee \exists z Q^{(2)}(y,z))$$
$$\equiv \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow \forall u \exists z(P^{(1)}(u) \vee Q^{(2)}(y,z))$$
$$\equiv \exists x((P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow \forall u \exists z(P^{(1)}(u) \vee Q^{(2)}(y,z)))$$
$$\equiv \exists x \forall u \exists z((P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (P^{(1)}(u) \vee Q^{(2)}(y,z))).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. *Приведение к ПНФ формул логики предикатов не является однозначным*. Действительно, легко видеть, например, что формула F в разобранном примере может быть приведена и к ПНФ вида

$$\forall u \exists z \exists x((P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (P^{(1)}(u) \vee Q^{(2)}(y,z)))$$

с *существенно другой* кванторной приставкой.

ПРИМЕР 1. Построить ПНФ, равносильную следующей ФЛП:

$$F = \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (\forall y P^{(1)}(y) \vee \exists z Q^{(2)}(y,z).$$

Имеем:

$$F \equiv \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (\forall u P^{(1)}(u) \vee \exists z Q^{(2)}(y,z))$$
$$\equiv \forall x(P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow \forall u \exists z(P^{(1)}(u) \vee Q^{(2)}(y,z))$$
$$\equiv \exists x((P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow \forall u \exists z(P^{(1)}(u) \vee Q^{(2)}(y,z)))$$
$$\equiv \exists x \forall u \exists z((P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (P^{(1)}(u) \vee Q^{(2)}(y,z))).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. *Приведение к ПНФ формул логики предикатов не является однозначным.* Действительно, легко видеть, например, что формула F в разобранном примере может быть приведена и к ПНФ вида

$$\forall u \exists z \exists x((P^{(1)}(x) \longrightarrow Q^{(2)}(x,y)) \longrightarrow (P^{(1)}(u) \vee Q^{(2)}(y,z)))$$

с *существенно другой* кванторной приставкой.

ПРИМЕР 2. Доказать равносильность ФЛП приведением их к ПНФ:

$$F_1 = \exists x(\forall y P^{(2)}(x,y) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y));$$
$$F_2 = \exists z(\exists x \neg P^{(2)}(x,z) \vee \exists x Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y)).$$

Имеем:

$$F_1 \equiv \exists x(\forall z P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists x \exists z(P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y));$$

$$F_2 \equiv \exists z(\exists x(\neg P^{(2)}(x,z) \vee Q^{(1)}(x)) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists z \exists x(\neg P^{(2)}(x,z) \vee Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists z \exists x(P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists x \exists z(P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y)).$$

Так как полученные ПНФ для формул F_1 и F_2 совпадают, заключаем, что $F_1 \equiv F_2$.

ПРИМЕР 2. Доказать равносильность ФЛП приведением их к ПНФ:

$$F_1 = \exists x(\forall y P^{(2)}(x,y) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y));$$
$$F_2 = \exists z(\exists x \neg P^{(2)}(x,z) \vee \exists x Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y)).$$

Имеем:

$$F_1 \equiv \exists x(\forall z P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists x \exists z(P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y));$$

$$F_2 \equiv \exists z(\exists x(\neg P^{(2)}(x,z) \vee Q^{(1)}(x)) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists z \exists x(\neg P^{(2)}(x,z) \vee Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists z \exists x(P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists x \exists z(P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y)).$$

Так как полученные ПНФ для формул F_1 и F_2 совпадают, заключаем, что $F_1 \equiv F_2$.

ПРИМЕР 2. Доказать равносильность ФЛП приведением их к ПНФ:

$$F_1 = \exists x(\forall y P^{(2)}(x,y) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y));$$
$$F_2 = \exists z(\exists x \neg P^{(2)}(x,z) \vee \exists x Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y)).$$

Имеем:

$$F_1 \equiv \exists x(\forall z P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists x \exists z(P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y));$$

$$F_2 \equiv \exists z(\exists x(\neg P^{(2)}(x,z) \vee Q^{(1)}(x)) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists z \exists x(\neg P^{(2)}(x,z) \vee Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists z \exists x(P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists x \exists z(P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y)).$$

Так как полученные ПНФ для формул F_1 и F_2 совпадают, заключаем, что $F_1 \equiv F_2$.

ПРИМЕР 2. Доказать равносильность ФЛП приведением их к ПНФ:

$$F_1 = \exists x(\forall y P^{(2)}(x,y) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y));$$
$$F_2 = \exists z(\exists x \neg P^{(2)}(x,z) \vee \exists x Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y)).$$

Имеем:

$$F_1 \equiv \exists x(\forall z P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists x \exists z(P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y));$$

$$F_2 \equiv \exists z(\exists x(\neg P^{(2)}(x,z) \vee Q^{(1)}(x)) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists z \exists x(\neg P^{(2)}(x,z) \vee Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists z \exists x(P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y))$$
$$\equiv \exists x \exists z(P^{(2)}(x,z) \longrightarrow Q^{(1)}(x) \vee R^{(1)}(y)).$$

Так как полученные ПНФ для формул F_1 и F_2 совпадают, заключаем, что $F_1 \equiv F_2$.

Формула логики предикатов есть *конъюнктивная нормальная форма* (КНФ), если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций, где каждая элементарная дизъюнкция – это дизъюнкция атомарных формул или их отрицаний. Говорят, что формула G есть *сколемовская нормальная форма* (сокращенно СНФ), если она имеет вид:

$$G = \forall x_1 \dots \forall x_n H,$$

где формула H не содержит кванторов и является КНФ.

Например, формула

$$\forall x(P^{(1)}(x) \wedge (P^{(1)}(y) \vee \neg Q^{(2)}(x, y)))$$

имеет сколемовскую нормальную форму.

В так называемом методе резолюций, который мы рассмотрим на практике, для нас будет важно уметь приводить произвольную ФЛП F к СНФ. В отличие от соответствующей ПНФ, которая равносильна исходной формуле F, она не обязана быть ей равносильной, но будет удовлетворять существенно более слабому, но тоже важному свойству, а именно: полученная СНФ будет одновременно с исходной формулой F выполнимой или не выполнимой.

Формула логики предикатов есть *конъюнктивная нормальная форма* (КНФ), если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций, где каждая элементарная дизъюнкция – это дизъюнкция атомарных формул или их отрицаний. Говорят, что формула G есть *сколемовская нормальная форма* (сокращенно СНФ), если она имеет вид:

$$G = \forall x_1 \ldots \forall x_n H,$$

где формула H не содержит кванторов и является КНФ.

Например, формула

$$\forall x(P^{(1)}(x) \wedge (P^{(1)}(y) \vee \neg Q^{(2)}(x, y)))$$

имеет сколемовскую нормальную форму.

В так называемом методе резолюций, который мы рассмотрим на практике, для нас будет важно уметь приводить произвольную ФЛП F к СНФ. В отличие от соответствующей ПНФ, которая равносильна исходной формуле F, она не обязана быть ей равносильной, но будет удовлетворять существенно более слабому, но тоже важному свойству, а именно: полученная СНФ будет одновременно с исходной формулой F выполнимой или не выполнимой.

Формула логики предикатов есть *конъюнктивная нормальная форма* (КНФ), если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций, где каждая элементарная дизъюнкция – это дизъюнкция атомарных формул или их отрицаний. Говорят, что формула G есть *сколемовская нормальная форма* (сокращенно СНФ), если она имеет вид:

$$G = \forall x_1 \ldots \forall x_n H,$$

где формула H не содержит кванторов и является КНФ.

Например, формула

$$\forall x(P^{(1)}(x) \wedge (P^{(1)}(y) \vee \neg Q^{(2)}(x, y)))$$

имеет сколемовскую нормальную форму.

В так называемом методе резолюций, который мы рассмотрим на практике, для нас будет важно уметь приводить произвольную ФЛП F к СНФ. В отличие от соответствующей ПНФ, которая равносильна исходной формуле F, она не обязана быть ей равносильной, но будет удовлетворять существенно более слабому, но тоже важному свойству, а именно: полученная СНФ будет одновременно с исходной формулой F выполнимой или не выполнимой.

Алгоритм приведения
к сколемовской нормальной форме

Шаг 1. Приводим формулу F к предваренной нормальной форме.

Шаг 2. Бескванторную часть приводим к конъюнктивной нормальной форме.

Шаг 3: исключение кванторов существования. Изложим его на примере. Пусть после выполнения шага 2 мы получили формулу

$$F = \exists x \forall y \exists z \forall u \exists v \; H(x, y, z, u, v),$$

где H не содержит кванторов. Предположим, что она не содержит константы c, одноместного функционального символа f и двухместного функционального символа g. Тогда в формуле H заменим x на c, z –на $f(y)$, v заменим на $g(y, u)$. Все кванторы существования вычеркнем. Получим формулу

$$G = \forall y \forall u \; H(c, y, f(y), u, g(y, u)).$$

Приведем пример приведения с СНФ. Пусть

$$F = \exists x \forall y (P(x, y) \longrightarrow \exists z (Q(x, z) \wedge R(y))).$$

Шаг 1. Приводим формулу к ПНФ:

$$F_1 = \exists x \forall y \exists z (\neg P(x, y) \vee (Q(x, z) \wedge R(y))).$$

Шаг 2. Бескванторную часть записываем в виде КНФ:

$$F_1 = \exists x \forall y \exists z ((\neg P(x, y) \vee Q(x, z)) \wedge (\neg P(x, y) \vee R(y))).$$

Шаг 3. Исключаем кванторы существования: сделав подстановку $x = a$, $z = f(y)$, получим искомую формулу

$$F_1 = \forall y ((\neg P(a, y) \vee Q(a, f(y))) \wedge (\neg P(a, y) \vee R(y))).$$

ТЕОРЕМА. Для всякой формулы F существует формула G, имеющая сколемовскую нормальную форму и одновременно с F выполнимая или не выполнимая. Формула G получается из F с помощью приведенного выше алгоритма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем формулу F к равносильной ей предваренной нормальной форме $E(u_1, ..., u_n)$, бескванторная часть которой имеет вид КНФ. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Полученная ПНФ имеет вид:

$$E(u_1, ..., u_n) = \exists y\ E'(y, u_1, ..., u_n).$$

Тогда надо доказать, что формула

$$D(u_1, ..., u_n) = E'(c, u_1, ..., u_n),$$

где c – константа, выполнима тогда и только тогда, когда E выполнима. Действительно, пусть $E(u_1, ..., u_n)$ выполнима, т.е. существует интерпретация ϕ в некоторую модель с множеством M такая, что при подходящих элементах $a_1, ..., a_n \in M$ имеет место равенство $(\phi E)(a_1, ..., a_n) = 1$, т.е. для некоторого $b \in M$ имеем $(\phi E')(b, a_1, ..., a_n) = 1$.

ТЕОРЕМА. Для всякой формулы F существует формула G, имеющая сколемовскую нормальную форму и одновременно с F выполнимая или не выполнимая. Формула G получается из F с помощью приведенного выше алгоритма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем формулу F к равносильной ей предваренной нормальной форме $E(u_1, ..., u_n)$, бескванторная часть которой имеет вид КНФ. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Полученная ПНФ имеет вид:

$$E(u_1, ..., u_n) = \exists y \ E'(y, u_1, ..., u_n).$$

Тогда надо доказать, что формула

$$D(u_1, ..., u_n) = E'(c, u_1, ..., u_n),$$

где c – константа, выполнима тогда и только тогда, когда E выполнима. Действительно, пусть $E(u_1, ..., u_n)$ выполнима, т.е. существует интерпретация ϕ в некоторую модель с множеством M такая, что при подходящих элементах $a_1, ..., a_n \in M$ имеет место равенство $(\phi E)(a_1, ..., a_n) = 1$, т.е. для некоторого $b \in M$ имеем $(\phi E')(b, a_1, ..., a_n) = 1$.

ТЕОРЕМА. Для всякой формулы F существует формула G, имеющая сколемовскую нормальную форму и одновременно с F выполнимая или не выполнимая. Формула G получается из F с помощью приведенного выше алгоритма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем формулу F к равносильной ей предваренной нормальной форме $E(u_1, ..., u_n)$, бескванторная часть которой имеет вид КНФ. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Полученная ПНФ имеет вид:

$$E(u_1, ..., u_n) = \exists y \; E'(y, u_1, ..., u_n).$$

Тогда надо доказать, что формула

$$D(u_1, ..., u_n) = E'(c, u_1, ..., u_n),$$

где c – константа, выполнима тогда и только тогда, когда E выполнима. Действительно, пусть $E(u_1, ..., u_n)$ выполнима, т.е. существует интерпретация ϕ в некоторую модель с множеством M такая, что при подходящих элементах $a_1, ..., a_n \in M$ имеет место равенство $(\phi E)(a_1, ..., a_n) = 1$, т.е. для некоторого $b \in M$ имеем $(\phi E')(b, a_1, ..., a_n) = 1$.

ТЕОРЕМА. Для всякой формулы F существует формула G, имеющая сколемовскую нормальную форму и одновременно с F выполнимая или не выполнимая. Формула G получается из F с помощью приведенного выше алгоритма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем формулу F к равносильной ей предваренной нормальной форме $E(u_1, ..., u_n)$, бескванторная часть которой имеет вид КНФ. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Полученная ПНФ имеет вид:

$$E(u_1, ..., u_n) = \exists y \; E'(y, u_1, ..., u_n).$$

Тогда надо доказать, что формула

$$D(u_1, ..., u_n) = E'(c, u_1, ..., u_n),$$

где c – константа, выполнима тогда и только тогда, когда E выполнима. Действительно, пусть $E(u_1, ..., u_n)$ выполнима, т.е. существует интерпретация ϕ в некоторую модель с множеством M такая, что при подходящих элементах $a_1, ..., a_n \in M$ имеет место равенство $(\phi E)(a_1, ..., a_n) = 1$, т.е. для некоторого $b \in M$ имеем $(\phi E')(b, a_1, ..., a_n) = 1$.

Обозначим через ψ интерпретацию формулы D в область M, которая совпадает с ϕ на всех предикатных и функциональных символах, входящих в E, и такую, что $\psi(c) = b$. Тогда

$$(\psi D)(a_1, ..., a_n) = (\phi E')(b, a_1, ..., a_n) = 1.$$

Это означает, что формула D выполнима.

Обратно, пусть формула $D(u_1, ..., u_n)$ выполнима. Покажем, что $E(u_1, ..., u_n)$ выполнима. Действительно, из выполнимости D вытекает, что существует интерпретация ψ формулы D в подходящую модель с множеством M такая, что для некоторых $a_1, ..., a_n \in M$ выполнено: $(\psi D)(a_1, ..., a_n) = 1$, т.е. $(\psi E')(\psi(c), a_1, ..., a_n) = 1$. А это означает, что существует такой элемент $y \in M$ (а именно, $y = \psi(c)$), что $(\psi E')(y, a_1, ..., a_n) = 1$, т.е. $(\psi E)(a_1, ..., a_n) = 1$. Таким образом, получили, что формула $E(u_1, ..., u_n)$ выполнима.

Обозначим через ψ интерпретацию формулы D в область M, которая совпадает с ϕ на всех предикатных и функциональных символах, входящих в E, и такую, что $\psi(c) = b$. Тогда

$$(\psi D)(a_1, ..., a_n) = (\phi E')(b, a_1, ..., a_n) = 1.$$

Это означает, что формула D выполнима.

Обратно, пусть формула $D(u_1, ..., u_n)$ выполнима. Покажем, что $E(u_1, ..., u_n)$ выполнима. Действительно, из выполнимости D вытекает, что существует интерпретация ψ формулы D в подходящую модель с множеством M такая, что для некоторых $a_1, ..., a_n \in M$ выполнено: $(\psi D)(a_1, ..., a_n) = 1$, т.е. $(\psi E')(\psi(c), a_1, ..., a_n) = 1$. А это означает, что существует такой элемент $y \in M$ (а именно, $y = \psi(c)$), что $(\psi E')(y, a_1, ..., a_n) = 1$, т.е. $(\psi E)(a_1, ..., a_n) = 1$. Таким образом, получили, что формула $E(u_1, ..., u_n)$ выполнима.

Случай 2: первый квантор существования в формуле E стоит за k кванторами общности:

$$E(u_1, ..., u_n) = \forall x_1 ... \forall x_k \exists y E'(x_1, ..., x_k, y, u_1, ..., u_n).$$

Исключение квантора существования по переменной y приводит к формуле

$$D(u_1, ..., u_n) = \forall x_1 ... \forall x_k E'(x_1, ..., x_k, f(x_1, ..., x_k), u_1, ..., u_n),$$

где f – k-местный функциональный символ, не содержащийся в E.

Пусть формула $E(u_1, ..., u_n)$ выполнима, что означает существование интерпретации ϕ в модель M и элементов $a_1, ..., a_n \in M$ таких, что $(\phi E)(a_1, ..., a_n) = 1$. Это означает, что для любых элементов $x_1, ..., x_k \in M$ найдется элемент $y \in M$ такой, что

$$(\phi E')(x_1, ..., x_k, y, a_1, ..., a_n) = 1.$$

Зафиксируем теперь функцию $i : M^k \longrightarrow M$, которая ставит в соответствие элементам $x_1, ..., x_k \in M$ один из таких элементов $y \in M$.

Случай 2: первый квантор существования в формуле E стоит за k кванторами общности:

$$E(u_1, ..., u_n) = \forall x_1 ... \forall x_k \exists y E'(x_1, ..., x_k, y, u_1, ..., u_n).$$

Исключение квантора существования по переменной y приводит к формуле

$$D(u_1, ..., u_n) = \forall x_1 ... \forall x_k E'(x_1, ..., x_k, f(x_1, ..., x_k), u_1, ..., u_n),$$

где f – k-местный функциональный символ, не содержащийся в E.

Пусть формула $E(u_1, ..., u_n)$ выполнима, что означает существование интерпретации ϕ в модель M и элементов $a_1, ..., a_n \in M$ таких, что $(\phi E)(a_1, ..., a_n) = 1$. Это означает, что для любых элементов $x_1, ..., x_k \in M$ найдется элемент $y \in M$ такой, что

$$(\phi E')(x_1, ..., x_k, y, a_1, ..., a_n) = 1.$$

Зафиксируем теперь функцию $i : M^k \longrightarrow M$, которая ставит в соответствие элементам $x_1, ..., x_k \in M$ один из таких элементов $y \in M$.

Случай 2: первый квантор существования в формуле E стоит за k кванторами общности:

$$E(u_1, ..., u_n) = \forall x_1 ... \forall x_k \exists y E'(x_1, ..., x_k, y, u_1, ..., u_n).$$

Исключение квантора существования по переменной y приводит к формуле

$$D(u_1, ..., u_n) = \forall x_1 ... \forall x_k E'(x_1, ..., x_k, f(x_1, ..., x_k), u_1, ..., u_n),$$

где f – k-местный функциональный символ, не содержащийся в E.

Пусть формула $E(u_1, ..., u_n)$ выполнима, что означает существование интерпретации ϕ в модель M и элементов $a_1, \dots, a_n \in M$ таких, что $(\phi E)(a_1, \dots, a_n) = 1$. Это означает, что для любых элементов $x_1, \dots, x_k \in M$ найдется элемент $y \in M$ такой, что

$$(\phi E')(x_1, ..., x_k, y, a_1, ..., a_n) = 1.$$

Зафиксируем теперь функцию $i : M^k \longrightarrow M$, которая ставит в соответствие элементам $x_1, \dots, x_k \in M$ один из таких элементов $y \in M$.

Случай 2: первый квантор существования в формуле E стоит за k кванторами общности:

$$E(u_1, ..., u_n) = \forall x_1 ... \forall x_k \exists y E'(x_1, ..., x_k, y, u_1, ..., u_n).$$

Исключение квантора существования по переменной y приводит к формуле

$$D(u_1, ..., u_n) = \forall x_1 ... \forall x_k E'(x_1, ..., x_k, f(x_1, ..., x_k), u_1, ..., u_n),$$

где f – k-местный функциональный символ, не содержащийся в E.

Пусть формула $E(u_1, ..., u_n)$ выполнима, что означает существование интерпретации ϕ в модель M и элементов $a_1, ..., a_n \in M$ таких, что $(\phi E)(a_1, ..., a_n) = 1$. Это означает, что для любых элементов $x_1, ..., x_k \in M$ найдется элемент $y \in M$ такой, что

$$(\phi E')(x_1, ..., x_k, y, a_1, ..., a_n) = 1.$$

Зафиксируем теперь функцию $i : M^k \longrightarrow M$, которая ставит в соответствие элементам $x_1, ..., x_k \in M$ один из таких элементов $y \in M$.

Тогда

$$(\phi E')(x_1, ..., x_k, i(x_1, ..., x_k), a_1, ..., a_n) = 1$$

для всех $x_1, ..., x_k \in M$.

Рассмотрим интерпретацию ψ, которая совпадает с ϕ на всех функциональных и предикатных символах, входящих в запись формулы E, и пусть $\psi(f) = i$. Тогда

$$(\psi D)(a_1, ..., a_n) = \forall x_1 ... \forall x_k (\phi E')(x_1, ..., x_k, i(x_1, ..., x_k), a_1, ..., a_n).$$

Последнее высказывание, как мы видели выше, истинно. Следовательно, получили, что формула $D(u_1, ..., u_n)$ выполнима.

Обратно, пусть теперь выполнима формула D. Это означает, что существует интерпретация ψ в какой-то модели M и элементы $a_1, \ldots, a_n \in M$ такие, что $(\psi D)(a_1, \ldots, a_n) = 1$ или, что то же самое, высказывание

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k (\psi E')(x_1, \ldots, x_k, (\psi f)(x_1, \ldots, x_k), a_1, \ldots, a_n)$$

истинно. Отсюда следует, что для любых $x_1, \ldots, x_k \in M$ найдется $y \in M$, а именно $y = (\psi f)(x_1, \ldots, x_k)$, такой, что высказывание

$$(\psi E')(x_1, \ldots, x_k, y, a_1, \ldots, a_n)$$

истинно. Следовательно, истинно высказывание

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y (\psi E')(x_1, \ldots, x_k, y, a_1, \ldots, a_n),$$

или, что то же самое, – высказывание $(\psi E)(a_1, \ldots, a_n)$, а значит формула $E(u_1, \ldots, u_n)$ выполнима. Мы доказали, что из выполнимости $D(u_1, \ldots, u_n)$ следует выполнимость $E(u_1, \ldots, u_n)$.

Теорема доказана.

Пусть $\Gamma = \{F_i(x_1, ..., x_n) \mid i \in I\}$ – некоторое множество ФЛП и $G(x_1, ..., x_n)$ – произвольная ФЛП. Говорим, что G *логически следует из* Γ, если для любой интерпретации ϕ этих формул в произвольную модель M из того, что все формулы из Γ принимают значение тождественно истинных предикатов $(\phi F_i)(x_1, ..., x_n)$ на M при этой интерпретации, следует, что и G переходит в тождественно истинный предикат $(\phi G)(x_1, ..., x_n)$ на M.

Введенное нами для ФЛП понятие логического следования обобщает понятие логического следования, которое мы вводили ранее в логике высказываний.

ФЛП называется *замкнутой*, если она не содержит свободных переменных. Следующее полезное утверждение обобщает соответствующую теорему, которая была в логике высказываний.

ТЕОРЕМА. *Пусть $F_1, \ldots, F_n, G$ – ФЛП, причем формулы $F_1, \ldots, F_n$ замкнуты. Тогда справедливо:*
а) $F_1, \ldots, F_n \models G$ в том и только в том случае, если формула $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \longrightarrow G$ логически общезначима;

б) $F_1, \ldots, F_n \models G$ в том и только в том случае, если формула $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G$ логически противоречива.

Пусть $\Gamma = \{F_i(x_1, ..., x_n) \mid i \in I\}$ – некоторое множество ФЛП и $G(x_1, ..., x_n)$ – произвольная ФЛП. Говорим, что G *логически следует из* Γ, если для любой интерпретации ϕ этих формул в произвольную модель M из того, что все формулы из Γ принимают значение тождественно истинных предикатов $(\phi F_i)(x_1, ..., x_n)$ на M при этой интерпретации, следует, что и G переходит в тождественно истинный предикат $(\phi G)(x_1, ..., x_n)$ на M.

Введенное нами для ФЛП понятие логического следования обобщает понятие логического следования, которое мы вводили ранее в логике высказываний.

ФЛП называется *замкнутой*, если она не содержит свободных переменных. Следующее полезное утверждение обобщает соответствующую теорему, которая была в логике высказываний.

ТЕОРЕМА. *Пусть $F_1, \ldots, F_n, G$ – ФЛП, причем формулы $F_1, \ldots, F_n$ замкнуты. Тогда справедливо:*
а) $F_1, \ldots, F_n \models G$ в том и только в том случае, если формула $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \longrightarrow G$ логически общезначима;

б) $F_1, \ldots, F_n \models G$ в том и только в том случае, если формула $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G$ логически противоречива.

Пусть $\Gamma = \{F_i(x_1, ..., x_n) \mid i \in I\}$ – некоторое множество ФЛП и $G(x_1, ..., x_n)$ – произвольная ФЛП. Говорим, что G *логически следует из* Γ, если для любой интерпретации ϕ этих формул в произвольную модель M из того, что все формулы из Γ принимают значение тождественно истинных предикатов $(\phi F_i)(x_1, ..., x_n)$ на M при этой интерпретации, следует, что и G переходит в тождественно истинный предикат $(\phi G)(x_1, ..., x_n)$ на M.

Введенное нами для ФЛП понятие логического следования обобщает понятие логического следования, которое мы вводили ранее в логике высказываний.

ФЛП называется *замкнутой*, если она не содержит свободных переменных. Следующее полезное утверждение обобщает соответствующую теорему, которая была в логике высказываний.

ТЕОРЕМА. *Пусть $F_1, \dots, F_n, G$ – ФЛП, причем формулы $F_1, \dots, F_n$ замкнуты. Тогда справедливо:*
а) $F_1, \dots, F_n \models G$ в том и только в том случае, если формула $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \longrightarrow G$ логически общезначима;

б) $F_1, \dots, F_n \models G$ в том и только в том случае, если формула $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \neg G$ логически противоречива.

Пусть $\Gamma = \{F_i(x_1, ..., x_n) \mid i \in I\}$ – некоторое множество ФЛП и $G(x_1, ..., x_n)$ – произвольная ФЛП. Говорим, что G *логически следует из* Γ, если для любой интерпретации ϕ этих формул в произвольную модель M из того, что все формулы из Γ принимают значение тождественно истинных предикатов $(\phi F_i)(x_1, ..., x_n)$ на M при этой интерпретации, следует, что и G переходит в тождественно истинный предикат $(\phi G)(x_1, ..., x_n)$ на M.

Введенное нами для ФЛП понятие логического следования обобщает понятие логического следования, которое мы вводили ранее в логике высказываний.

ФЛП называется *замкнутой*, если она не содержит свободных переменных. Следующее полезное утверждение обобщает соответствующую теорему, которая была в логике высказываний.

ТЕОРЕМА. *Пусть $F_1, \dots, F_n, G$ – ФЛП, причем формулы $F_1, \dots, F_n$ замкнуты. Тогда справедливо:*
а) $F_1, \dots, F_n \models G$ в том и только в том случае, если формула $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \longrightarrow G$ логически общезначима;

б) $F_1, \dots, F_n \models G$ в том и только в том случае, если формула $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G$ логически противоречива.

Рассмотрим примеры на анализ корректности рассуждений.

ПРИМЕР 1. Некоторые студенты любят учиться. Ни один студент не любит нравоучений. Следовательно, никакое учение не является нравоучением.

В данное рассуждение входят такие предикаты:
$P(x) = \mathbf{1} \iff x$ – студент,
$B(x) = \mathbf{1} \iff x$ – учение,
$D(x) = \mathbf{1} \iff x$ – нравоучение,
$L(x, y) = \mathbf{1} \iff x$ любит y.
Приводимые высказывания можно записать с помощью следующих ФЛП (здесь для простоты вместо предикатных символов пишем в ФЛП сами предикаты):
$F_1 = \exists x(P(x) \wedge \forall y(B(y) \longrightarrow L(x, y)))$,
$F_2 = \forall x(P(x) \longrightarrow \forall y(D(y) \longrightarrow \neg L(x, y)))$,
$G = \forall x(B(x) \longrightarrow \neg D(x))$.

Рассмотрим примеры на анализ корректности рассуждений.

ПРИМЕР 1. Некоторые студенты любят учиться. Ни один студент не любит нравоучений. Следовательно, никакое учение не является нравоучением.

В данное рассуждение входят такие предикаты:
$P(x) = \mathbf{1} \iff x$ – студент,
$B(x) = \mathbf{1} \iff x$ – учение,
$D(x) = \mathbf{1} \iff x$ – нравоучение,
$L(x, y) = \mathbf{1} \iff x$ любит y.
Приводимые высказывания можно записать с помощью следующих ФЛП (здесь для простоты вместо предикатных символов пишем в ФЛП сами предикаты):
$F_1 = \exists x(P(x) \wedge \forall y(B(y) \longrightarrow L(x, y)))$,
$F_2 = \forall x(P(x) \longrightarrow \forall y(D(y) \longrightarrow \neg L(x, y)))$,
$G = \forall x(B(x) \longrightarrow \neg D(x))$.

Покажем, также исходя непосредственно из определения логического следования, что $F_1, F_2 \models G$. Пусть формулы F_1 и F_2 тождественно истинны на некоторой модели. Из истинности формулы F_1 вытекает, что найдется элемент a в основном множестве модели такой, что

$$P(a) = \mathbf{1} \text{ и } \forall y(B(y) \longrightarrow L(a, y)) = \mathbf{1}.$$

Из истинности F_2 следует, в частности, что

$$P(a) \longrightarrow \forall y(D(y) \longrightarrow \neg L(a, y)) = \mathbf{1}$$

и, поскольку $P(a) = \mathbf{1}$, справедливо равенство $\forall y(D(y) \longrightarrow \neg L(a, y)) = \mathbf{1}$.

Отсюда и из равенства $\forall y(B(y) \longrightarrow L(a, y)) = \mathbf{1}$ выводим, что предикаты $D(y) \longrightarrow \neg L(a, y)$ и $B(y) \longrightarrow L(a, y)$ тождественно истинны, а потому тождественно истинным является и предикат

$$((D(y) \longrightarrow \neg L(a, y)) \wedge (B(y) \longrightarrow L(a, y))) \vee \neg B(y) \vee \neg D(y)$$
$$\equiv ((\neg D(y) \vee \neg L(a, y)) \wedge (\neg B(y) \vee L(a, y))) \vee \neg B(y) \vee \neg D(y)$$
$$\equiv (\neg D(y) \wedge \neg B(y)) \vee (\neg L(a, y) \wedge \neg B(y)) \vee (\neg D(y) \wedge L(a, y))$$
$$\vee (\neg L(a, y) \wedge L(a, y)) \vee \neg B(y) \vee \neg D(y)$$
$$\equiv (\neg L(a, y) \wedge L(a, y)) \vee \neg B(y) \vee \neg D(y) \equiv \mathbf{0} \vee \neg B(y) \vee \neg D(y)$$
$$\equiv \neg B(y) \vee \neg D(y) \equiv B(y) \longrightarrow \neg D(y).$$

Следовательно, предикат $B(x) \longrightarrow \neg D(x)$ так же тождественно истинен, т.е. на данной модели истинна формула $G = \forall x(B(x) \longrightarrow \neg D(x))$. Таким образом, мы доказали, что $F_1, F_2 \models G$, и значит рассуждение логично.

ПРИМЕР 2. Некоторые студенты приходят на лекции всегда вовремя. Все студенты, которые поздно ложатся спать, опаздывают на лекции. Следовательно, есть студенты, которые никогда не ложатся поздно спать.

В этом рассуждении встречаются предикаты:
$P(x) = 1 \iff x$ – студент,
$Q(x) = 1 \iff x$ приходит на лекции всегда вовремя,
$R(x) = 1 \iff x$ поздно ложится спать.
Соответствующие высказывания записываются в виде следующих ФЛП:
$F_1 = \exists x(P(x) \wedge Q(x))$,
$F_2 = \forall x(P(x) \longrightarrow (R(x) \longrightarrow \neg Q(x)))$,
$G = \exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$.

Мы хотим проверить, верно ли, что $F_1, F_2 \models G$. Для этого ввиду замкнутости формул F_1 и F_2 мы можем применить приведенную выше теорему. Рассмотрим формулу $F_1 \wedge F_2 \wedge \neg G$ и докажем, что она логически противоречива.

Следовательно, предикат $B(x) \longrightarrow \neg D(x)$ так же тождественно истинен, т.е. на данной модели истинна формула $G = \forall x(B(x) \longrightarrow \neg D(x))$. Таким образом, мы доказали, что $F_1, F_2 \models G$, и значит рассуждение логично.

ПРИМЕР 2. Некоторые студенты приходят на лекции всегда вовремя. Все студенты, которые поздно ложатся спать, опаздывают на лекции. Следовательно, есть студенты, которые никогда не ложатся поздно спать.

В этом рассуждении встречаются предикаты:
$P(x) = 1 \iff x$ – студент,
$Q(x) = 1 \iff x$ приходит на лекции всегда вовремя,
$R(x) = 1 \iff x$ поздно ложится спать.
Соответствующие высказывания записываются в виде следующих ФЛП:
$F_1 = \exists x(P(x) \wedge Q(x))$,
$F_2 = \forall x(P(x) \longrightarrow (R(x) \longrightarrow \neg Q(x)))$,
$G = \exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$.

Мы хотим проверить, верно ли, что $F_1, F_2 \models G$. Для этого ввиду замкнутости формул F_1 и F_2 мы можем применить приведенную выше теорему. Рассмотрим формулу $F_1 \wedge F_2 \wedge \neg G$ и докажем, что она логически противоречива.

Следовательно, предикат $B(x) \longrightarrow \neg D(x)$ так же тождественно истинен, т.е. на данной модели истинна формула $G = \forall x(B(x) \longrightarrow \neg D(x))$. Таким образом, мы доказали, что $F_1, F_2 \models G$, и значит рассуждение логично.

ПРИМЕР 2. Некоторые студенты приходят на лекции всегда вовремя. Все студенты, которые поздно ложатся спать, опаздывают на лекции. Следовательно, есть студенты, которые никогда не ложатся поздно спать.

В этом рассуждении встречаются предикаты:
$P(x) = \mathbf{1} \iff x$ – студент,
$Q(x) = \mathbf{1} \iff x$ приходит на лекции всегда вовремя,
$R(x) = \mathbf{1} \iff x$ поздно ложится спать.
Соответствующие высказывания записываются в виде следующих ФЛП:
$F_1 = \exists x(P(x) \wedge Q(x))$,
$F_2 = \forall x(P(x) \longrightarrow (R(x) \longrightarrow \neg Q(x)))$,
$G = \exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$.

Мы хотим проверить, верно ли, что $F_1, F_2 \models G$. Для этого ввиду замкнутости формул F_1 и F_2 мы можем применить приведенную выше теорему. Рассмотрим формулу $F_1 \wedge F_2 \wedge \neg G$ и докажем, что она логически противоречива.

Следовательно, предикат $B(x) \longrightarrow \neg D(x)$ так же тождественно истинен, т.е. на данной модели истинна формула $G = \forall x(B(x) \longrightarrow \neg D(x))$. Таким образом, мы доказали, что $F_1, F_2 \models G$, и значит рассуждение логично.

ПРИМЕР 2. Некоторые студенты приходят на лекции всегда вовремя. Все студенты, которые поздно ложатся спать, опаздывают на лекции. Следовательно, есть студенты, которые никогда не ложатся поздно спать.

В этом рассуждении встречаются предикаты:
$P(x) = \mathbf{1} \iff x$ – студент,
$Q(x) = \mathbf{1} \iff x$ приходит на лекции всегда вовремя,
$R(x) = \mathbf{1} \iff x$ поздно ложится спать.
Соответствующие высказывания записываются в виде следующих ФЛП:
$F_1 = \exists x(P(x) \wedge Q(x))$,
$F_2 = \forall x(P(x) \longrightarrow (R(x) \longrightarrow \neg Q(x)))$,
$G = \exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$.

Мы хотим проверить, верно ли, что $F_1, F_2 \models G$. Для этого ввиду замкнутости формул F_1 и F_2 мы можем применить приведенную выше теорему. Рассмотрим формулу $F_1 \wedge F_2 \wedge \neg G$ и докажем, что она логически противоречива.

Следовательно, предикат $B(x) \longrightarrow \neg D(x)$ так же тождественно истинен, т.е. на данной модели истинна формула $G = \forall x(B(x) \longrightarrow \neg D(x))$.
Таким образом, мы доказали, что $F_1, F_2 \models G$, и значит рассуждение логично.

ПРИМЕР 2. Некоторые студенты приходят на лекции всегда вовремя. Все студенты, которые поздно ложатся спать, опаздывают на лекции. Следовательно, есть студенты, которые никогда не ложатся поздно спать.

В этом рассуждении встречаются предикаты:
$P(x) = \mathbf{1} \iff x$ – студент,
$Q(x) = \mathbf{1} \iff x$ приходит на лекции всегда вовремя,
$R(x) = \mathbf{1} \iff x$ поздно ложится спать.
Соответствующие высказывания записываются в виде следующих ФЛП:
$F_1 = \exists x(P(x) \wedge Q(x))$,
$F_2 = \forall x(P(x) \longrightarrow (R(x) \longrightarrow \neg Q(x)))$,
$G = \exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$.

Мы хотим проверить, верно ли, что $F_1, F_2 \models G$. Для этого ввиду замкнутости формул F_1 и F_2 мы можем применить приведенную выше теорему. Рассмотрим формулу $F_1 \wedge F_2 \wedge \neg G$ и докажем, что она логически противоречива.

В самом деле, имеем:

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \neg G \equiv F_1 \wedge \forall x(P(x) \longrightarrow (R(x) \longrightarrow \neg Q(x))) \wedge \neg G$$
$$\equiv F_1 \wedge \forall x(\neg P(x) \vee \neg R(x) \vee \neg Q(x)) \wedge \neg G$$
$$\equiv F_1 \wedge \forall x \neg(P(x) \wedge R(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg G$$
$$\equiv F_1 \wedge \neg\exists x(P(x) \wedge R(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg G$$
$$\equiv F_1 \wedge \neg\exists x(P(x) \wedge R(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg\exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$$
$$\equiv F_1 \wedge \neg(\exists x(P(x) \wedge R(x) \wedge Q(x)) \vee \exists x(P(x) \wedge \neg R(x)))$$
$$\equiv F_1 \wedge \neg\exists x((P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)) \vee (P(x) \wedge \neg R(x)))$$
$$\equiv F_1 \wedge \neg\exists x((P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge \neg R(x)))$$
$$\equiv F_1 \wedge \neg\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \neg\exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$$
$$\equiv F_1 \wedge \neg F_1 \wedge \neg\exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$$
$$\equiv \mathbf{0} \wedge \neg\exists x(P(x) \wedge \neg R(x)) \equiv \mathbf{0}.$$

Отсюда в силу пункта (б) теоремы заключаем $F_1, F_2 \models G$, т.е. исследуемое рассуждение корректно.

В логике высказываний вопрос о том, будет ли данная формула тавтологией или выполнимой формулой, решается очень просто – методом построения ее таблицы истинности (или, что то же самое, методом интерпретаций). К сожалению, распространить этот метод на все ФЛП невозможно по той простой причине, что тогда пришлось бы интерпретировать ту или иную формулу в *бесконечном* множестве моделей для доказательства ее общезначимости или выполнимости. Поэтому в логике предикатов естественна постановка следующей задачи, носящей название *проблемы разрешения: указать единый эффективный способ, т.е. алгоритм, для определения по произвольной ФЛП, выполнима она (соответственно логически общезначима) или нет.*

Заметим, что вопрос об общезначимости ФЛП полностью сводится к вопросу о выполнимости соответствующих формул. В самом деле, формула F логически общезначима тогда и только тогда, когда формула $\neg F$ логически противоречива, т.е. невыполнима. Поэтому, проверяя, выполнима или нет формула $\neg F$, мы тем самым отвечаем на вопрос, общезначима формула F или нет, и наоборот. К сожалению, в отличие от логики высказываний, проблема разрешения в логике предикатов оказалась связанной с большими трудностями. Причины этих затруднений были выяснены лишь в 30-е годы XX века, когда в математике было дано строгое определение понятия алгоритма. Это помогло американскому логику *Алонзо Чёрчу* впервые установить, что *проблема разрешения для логики предикатов неразрешима, т.е. искомый в этой проблеме алгоритм невозможен*.

В переводе на компьютерный язык последнее означает, что нельзя написать программу, которая бы позволяла по *произвольной* ФЛП выдавать за конечное время ответ (положительный или отрицательный) о выполнимости или общезначимости этой формулы. Вместе с тем, в логике имеется ряд мощных методов, помогающих в ряде весьма общих случаев решать данную задачу. Один из таких методов, а именно, *правило резолюций*, мы подробно изучим на практических занятиях. Отметим, что указанный метод, в отличие от того, на что "способен" универсальный алгоритм, позволяет лишь для любой ФЛП, которая невыполнима (что, разумеется, заранее не известно), через конечное число шагов подтвердить этот факт. Если же формула, подаваемая на входе в компьютер, выполнима, то программа, написанная по методу резолюций, может бесконечно долго работать ("циклить"), при этом пользователь априори не будет знать о том, происходит "зацикливание" или все же через какое-то конечное время работы компьютер остановится и выдаст ответ.

Неразрешимость в общем случае указанной проблемы для логики предикатов не означает, что мы не сможем в каких-то конкретных случаях определить, является данная ФЛП выполнимой (логически общезначимой) или нет. Более того, для некоторых не слишком широких, но важных классов ФЛП решение данной проблемы может быть осуществлено. К числу таких формул относятся, например, ФЛП, содержащие только предикатные символы, арности которых равны единице (т.е. они содержат в своей записи лишь атомарные формулы от одной переменной). Часть логики, в которой употребляются только такие выражения, связана с именем Аристотеля, который впервые ее исследовал. Известные виды умозаключений этой логики, так называемые "модусы силлогизмов", полностью выражаются на языке формул от одной предметной переменной (вспомним хотя бы умозаключение : "Все люди смертны. Сократ – человек. Следовательно, Сократ смертен").

В связи с этим сформулируем без доказательства следующее принципиальное утверждение.

ТЕОРЕМА. *Если ФЛП, содержащая только предикатные символы арности один, выполнима на некоторой модели, то она выполнима и на модели, основное множество которой содержит не более чем 2^n элементов, где n – число предикатных символов в этой формуле.*

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть формула F содержит только предикатные символы арности один и является тождественно истинной на всякой модели с основным множеством, не превышающем 2^n элементов, где n – число предикатных символов в F. Тогда формула F логически общезначима.*

Доказательство. В самом деле, допустим, что F не является логически общезначимой формулой. В таком случае ее отрицание $\neg F$ выполнимо на некоторой модели. Так как $\neg F$ также удовлетворяет условиям теоремы, найдется модель с основным множеством, содержащим не более чем 2^n элементов, на которой формула $\neg F$ выполнима. Следовательно, F не может быть тождественно истинной на данной модели, а это противоречит условию следствия. Итак, предположение, что формула F не является логически общезначимой, приводит к противоречию, что и требовалось доказать.

В связи с этим сформулируем без доказательства следующее принципиальное утверждение.

ТЕОРЕМА. *Если ФЛП, содержащая только предикатные символы арности один, выполнима на некоторой модели, то она выполнима и на модели, основное множество которой содержит не более чем 2^n элементов, где n – число предикатных символов в этой формуле.*

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть формула F содержит только предикатные символы арности один и является тождественно истинной на всякой модели с основным множеством, не превышающем 2^n элементов, где n – число предикатных символов в F. Тогда формула F логически общезначима.*

Доказательство. В самом деле, допустим, что F не является логически общезначимой формулой. В таком случае ее отрицание $\neg F$ выполнимо на некоторой модели. Так как $\neg F$ также удовлетворяет условиям теоремы, найдется модель с основным множеством, содержащим не более чем 2^n элементов, на которой формула $\neg F$ выполнима. Следовательно, F не может быть тождественно истинной на данной модели, а это противоречит условию следствия. Итак, предположение, что формула F не является логически общезначимой, приводит к противоречию, что и требовалось доказать.

В связи с этим сформулируем без доказательства следующее принципиальное утверждение.

ТЕОРЕМА. *Если ФЛП, содержащая только предикатные символы арности один, выполнима на некоторой модели, то она выполнима и на модели, основное множество которой содержит не более чем* 2^n *элементов, где* n *– число предикатных символов в этой формуле.*

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть формула* F *содержит только предикатные символы арности один и является тождественно истинной на всякой модели с основным множеством, не превышающем* 2^n *элементов, где* n *– число предикатных символов в* F*. Тогда формула* F *логически общезначима.*

Доказательство. В самом деле, допустим, что F не является логически общезначимой формулой. В таком случае ее отрицание $\neg F$ выполнимо на некоторой модели. Так как $\neg F$ также удовлетворяет условиям теоремы, найдется модель с основным множеством, содержащим не более чем 2^n элементов, на которой формула $\neg F$ выполнима. Следовательно, F не может быть тождественно истинной на данной модели, а это противоречит условию следствия. Итак, предположение, что формула F не является логически общезначимой, приводит к противоречию, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. В классе формул логики предикатов, содержащих только предикатные символы арности один, алгоритмически разрешима проблема проверки формулы на логическую общезначимость. Другими словами, существует алгоритм, позволяющий по любой ФЛП, содержащей только предикатные символы арности один, ответить на вопрос, является ли она логически общезначимой или нет.

ПРИМЕР. Выяснить, является ли ФЛП
$F(x,y) = P^{(1)}(x) \wedge Q^{(1)}(y) \longrightarrow (Q^{(1)}(x) \longrightarrow \forall z P^{(1)}(z))$
логически общезначимой или нет.

Упростим формулу $F(x,y)$:

$F(x,y) \equiv \neg P^{(1)}(x) \vee \neg Q^{(1)}(y) \vee \neg Q^{(1)}(x) \vee \forall z P^{(1)}(z) = H(x,y)$.

Покажем, что формула $H(x,y)$ не является логически общезначимой. Для этого ввиду доказанного выше следствия из теоремы мы должны найти опровергающую для этой формулы модель, основное множество M которой содержит не более $2^2 = 4$ элементов. В данном случае легко подбирается пример такой модели даже с основным множеством из двух элементов. В самом деле, положим $M = \{a, b\}$ и определим одноместные предикаты P и Q на M следующим образом:

x	$P(x)$
a	$\mathbf{1}$
b	$\mathbf{0}$

и

x	$Q(x)$
a	$\mathbf{1}$
b	$\mathbf{1}$

Тогда для интерпретации $\phi : P^{(1)} \mapsto P$ и $Q^{(1)} \mapsto Q$ имеем
$(\phi H)(a,b) = \neg P(a) \vee \neg Q(b) \vee \neg Q(a) \vee \forall z P(z) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0$, т.е. формула H, а значит и F, не логически общезначима.

ПРИМЕР. Выяснить, является ли ФЛП
$F(x,y) = P^{(1)}(x) \wedge Q^{(1)}(y) \longrightarrow (Q^{(1)}(x) \longrightarrow \forall z P^{(1)}(z))$
логически общезначимой или нет.

Упростим формулу $F(x,y)$:

$$F(x,y) \equiv \neg P^{(1)}(x) \vee \neg Q^{(1)}(y) \vee \neg Q^{(1)}(x) \vee \forall z P^{(1)}(z) = H(x,y).$$

Покажем, что формула $H(x,y)$ не является логически общезначимой. Для этого ввиду доказанного выше следствия из теоремы мы должны найти опровергающую для этой формулы модель, основное множество M которой содержит не более $2^2 = 4$ элементов. В данном случае легко подбирается пример такой модели даже с основным множеством из двух элементов. В самом деле, положим $M = \{a,b\}$ и определим одноместные предикаты P и Q на M следующим образом:

x	$P(x)$
a	**1**
b	**0**

и

x	$Q(x)$
a	**1**
b	**1**

Тогда для интерпретации $\phi : P^{(1)} \mapsto P$ и $Q^{(1)} \mapsto Q$ имеем $(\phi H)(a,b) = \neg P(a) \vee \neg Q(b) \vee \neg Q(a) \vee \forall z P(z) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0$, т.е. формула H, а значит и F, не логически общезначима.

ПРИМЕР. Выяснить, является ли ФЛП
$F(x,y) = P^{(1)}(x) \wedge Q^{(1)}(y) \longrightarrow (Q^{(1)}(x) \longrightarrow \forall z P^{(1)}(z))$
логически общезначимой или нет.

Упростим формулу $F(x,y)$:

$$F(x,y) \equiv \neg P^{(1)}(x) \vee \neg Q^{(1)}(y) \vee \neg Q^{(1)}(x) \vee \forall z P^{(1)}(z) = H(x,y).$$

Покажем, что формула $H(x,y)$ не является логически общезначимой. Для этого ввиду доказанного выше следствия из теоремы мы должны найти опровергающую для этой формулы модель, основное множество M которой содержит не более $2^2 = 4$ элементов. В данном случае легко подбирается пример такой модели даже с основным множеством из двух элементов. В самом деле, положим $M = \{a, b\}$ и определим одноместные предикаты P и Q на M следующим образом:

x	$P(x)$
a	$\mathbf{1}$
b	$\mathbf{0}$

и

x	$Q(x)$
a	$\mathbf{1}$
b	$\mathbf{1}$

Тогда для интерпретации $\phi : P^{(1)} \mapsto P$ и $Q^{(1)} \mapsto Q$ имеем
$(\phi H)(a,b) = \neg P(a) \vee \neg Q(b) \vee \neg Q(a) \vee \forall z P(z) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0$, т.е. формула H, а значит и F, не логически общезначима.

ПРИМЕР. Выяснить, является ли ФЛП
$F(x,y) = P^{(1)}(x) \wedge Q^{(1)}(y) \longrightarrow (Q^{(1)}(x) \longrightarrow \forall z P^{(1)}(z))$
логически общезначимой или нет.

Упростим формулу $F(x,y)$:

$$F(x,y) \equiv \neg P^{(1)}(x) \vee \neg Q^{(1)}(y) \vee \neg Q^{(1)}(x) \vee \forall z P^{(1)}(z) = H(x,y).$$

Покажем, что формула $H(x,y)$ не является логически общезначимой. Для этого ввиду доказанного выше следствия из теоремы мы должны найти опровергающую для этой формулы модель, основное множество M которой содержит не более $2^2 = 4$ элементов. В данном случае легко подбирается пример такой модели даже с основным множеством из двух элементов. В самом деле, положим $M = \{a, b\}$ и определим одноместные предикаты P и Q на M следующим образом:

x	$P(x)$
a	**1**
b	**0**

и

x	$Q(x)$
a	**1**
b	**1**

Тогда для интерпретации $\phi : P^{(1)} \mapsto P$ и $Q^{(1)} \mapsto Q$ имеем
$(\phi H)(a,b) = \neg P(a) \vee \neg Q(b) \vee \neg Q(a) \vee \forall z P(z) = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0$, т.е.
формула H, а значит и F, не логически общезначима.

В заключение параграфа обратим внимание на то, что проблема разрешения тесным образом связана со следующей задачей: *указать универсальный алгоритм для определения по двум произвольным ФЛП, равносильны они или нет*. Как мы знаем, в логике высказываний такой алгоритм существует: это способ сравнения истинностных таблиц. В логике предикатов подобный алгоритм невозможен, поскольку вопрос о равносильности ФЛП F и G сводится, очевидно, к вопросу об общезначимости формулы $F \longleftrightarrow G$, а эта задача в общем случае неразрешима. Однако при определенных ограничениях на F и G такой алгоритм существует; например, если формулы F и G содержат в своей записи только атомарные формулы от одной переменной. Последнее замечание вытекает из установленной в данном параграфе разрешимости проблемы разрешения в классе ФЛП, содержащих лишь предикатное символы арности один.