Математическая логика

В. Б. Репницкий

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направление: Математика и компьютерные науки
(4 семестр)

Логика как наука о законах и формах мышления имеет многовековую историю.

Математическая же логика сформировалась сравнительно недавно — на рубеже девятнадцатого и двадцатого столетий — в результате применения к логике математических методов.

Учение о высказываниях, называемое логикой высказываний, является исторически первой и наиболее простой частью математической логики. Его законы служат отправной точкой в овладении более трудными разделами данного предмета.

Логика как наука о законах и формах мышления имеет многовековую историю.

Математическая же логика сформировалась сравнительно недавно — на рубеже девятнадцатого и двадцатого столетий — в результате применения к логике математических методов.

Учение о высказываниях, называемое логикой высказываний, является исторически первой и наиболее простой частью математической логики. Его законы служат отправной точкой в овладении более трудными разделами данного предмета.

Логика как наука о законах и формах мышления имеет многовековую историю.

Математическая же логика сформировалась сравнительно недавно — на рубеже девятнадцатого и двадцатого столетий — в результате применения к логике математических методов.

Учение о высказываниях, называемое логикой высказываний, является исторически первой и наиболее простой частью математической логики. Его законы служат отправной точкой в овладении более трудными разделами данного предмета.

Основным объектом изучения логики высказываний являются высказывания и логические связки.

Под высказыванием будем понимать повествовательное предложение, про которое можно сказать, что оно истинно или ложно. Например, предложения "Екатеринбург – крупный административный центр Урала" и "Волга впадает в Черное море" являются высказываниями, различающимися лишь тем, что первое из них истинно, а второе ложно. В дальнейшем мы отвлечемся от содержания высказываний и будем интересоваться только их истинностными значениями.

Высказывания будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C, ..., именуемыми *логическими переменными*, а их значения, т.е. истину или ложь, соответственно цифрами $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, именуемыми *логическими константами*.

Основным объектом изучения логики высказываний являются высказывания и логические связки.

Под высказыванием будем понимать повествовательное предложение, про которое можно сказать, что оно истинно или ложно. Например, предложения “Екатеринбург – крупный административный центр Урала” и “Волга впадает в Черное море” являются высказываниями, различающимися лишь тем, что первое из них истинно, а второе ложно. В дальнейшем мы отвлечемся от содержания высказываний и будем интересоваться только их истинностными значениями.

Высказывания будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C, ..., именуемыми *логическими переменными*, а их значения, т.е. истину или ложь, соответственно цифрами $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, именуемыми *логическими константами*.

Основным объектом изучения логики высказываний являются высказывания и логические связки.

Под высказыванием будем понимать повествовательное предложение, про которое можно сказать, что оно истинно или ложно. Например, предложения "Екатеринбург – крупный административный центр Урала" и "Волга впадает в Черное море" являются высказываниями, различающимися лишь тем, что первое из них истинно, а второе ложно. В дальнейшем мы отвлечемся от содержания высказываний и будем интересоваться только их истинностными значениями.

Высказывания будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C, ..., именуемыми *логическими переменными*, а их значения, т.е. истину или ложь, соответственно цифрами $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$, именуемыми *логическими константами*.

В русском языке из простых высказываний более сложные конструируются с помощью слов “не”, “и ”, “или”, “если ..., то ...”, “тогда и только тогда, когда ...”. В логике им соответствуют символы, называемые *логическими связками*: частице “не” соответствует символ $\neg$ (отрицание), союзу “и” — символ $\wedge$ (конъюнкция), союзу “или” – символ $\vee$ (дизъюнкция), конструкции “если ..., то ...” — символ $\longrightarrow$ (импликация), конструкции “тогда и только тогда, когда ...” — символ $\longleftrightarrow$ (эквиваленция).

Мы обычно записываем высказывания в виде предложений русского языка. В математической логике высказывания принято записывать в виде *формул логики высказываний* (сокращенно ФЛВ). Определим ФЛВ индукцией по длине, т.е. количеству используемых в них логических связок:

(i) логические константы $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ являются ФЛВ;
(ii) логические переменные A, B, C, ... являются ФЛВ;
(iii) если F и G — ФЛВ, то выражения вида $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \longrightarrow G)$ и $(F \longleftrightarrow G)$ также являются ФЛВ;
(iv) других формул нет.

Так, выражения $(((A \longrightarrow B) \vee C) \longleftrightarrow (\neg C \longrightarrow \mathbf{0}))$ и $(((\neg A \vee \mathbf{1}) \wedge (\neg\neg A \vee \mathbf{0})) \longrightarrow (B \longleftrightarrow \neg B))$ — ФЛВ, а выражение $(\vee(A \longleftrightarrow B)\neg C)$ не является ФЛВ.

В целях упрощения записи формул договоримся о силе логических связок: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$; здесь связки расположены по убыванию их силы слева направо. Пользуясь этим соглашением, некоторые скобки в формулах будем опускать; внешние скобки также писать не будем. Например, приведенные выше две формулы можно было бы записать в виде:

$(A \longrightarrow B) \vee C \longleftrightarrow \neg C \longrightarrow \mathbf{0}$
и $(\neg A \vee \mathbf{1}) \wedge (\neg\neg \mathbf{A} \vee \mathbf{0}) \longrightarrow (B \longleftrightarrow \neg B)$.

Зная истинностные значения высказываний A и B, мы можем (в соответствии со здравым смыслом) найти истинностные значения высказываний $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \longrightarrow B$, $A \longleftrightarrow B$. Например, совершенно естественно считать, что $\neg A$ истинно в том и только в том случае, если A ложно, а $A \wedge B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны. Эти интуитивные представления лежат в основе следующей таблицы, позволяющей в конечном счете вычислять истинностные значения сколь угодно сложных высказываний:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \longleftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Из таблицы видно, что высказывание $A \longrightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно. A называется *посылкой*, а B *следствием*. Таким образом, если посылка A ложна, то высказывание $A \longrightarrow B$ всегда истинно независимо от того, истинно или нет следствие B. Это свойство импликации кратко формулируется так: “*из лжи следует все, что угодно*”.

Зная истинностные значения высказываний A и B, мы можем (в соответствии со здравым смыслом) найти истинностные значения высказываний $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \longrightarrow B$, $A \longleftrightarrow B$. Например, совершенно естественно считать, что $\neg A$ истинно в том и только в том случае, если A ложно, а $A \wedge B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны. Эти интуитивные представления лежат в основе следующей таблицы, позволяющей в конечном счете вычислять истинностные значения сколь угодно сложных высказываний:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \longleftrightarrow B$
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**

Из таблицы видно, что высказывание $A \longrightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно. A называется *посылкой*, а B *следствием*. Таким образом, если посылка A ложна, то высказывание $A \longrightarrow B$ всегда истинно независимо от того, истинно или нет следствие B. Это свойство импликации кратко формулируется так: "*из лжи следует все, что угодно*".

Зная истинностные значения высказываний A и B, мы можем (в соответствии со здравым смыслом) найти истинностные значения высказываний $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \longrightarrow B$, $A \longleftrightarrow B$. Например, совершенно естественно считать, что $\neg A$ истинно в том и только в том случае, если A ложно, а $A \wedge B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны. Эти интуитивные представления лежат в основе следующей таблицы, позволяющей в конечном счете вычислять истинностные значения сколь угодно сложных высказываний:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \longleftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Из таблицы видно, что высказывание $A \longrightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно. A называется *посылкой*, а B *следствием*. Таким образом, если посылка A ложна, то высказывание $A \longrightarrow B$ всегда истинно независимо от того, истинно или нет следствие B. Это свойство импликации кратко формулируется так: “*из лжи следует все, что угодно*”.

Интерпретацией одной или нескольких ФЛВ называется произвольное отображение множества их логических переменных в множество логических констант. Пусть F – ФЛВ с множеством логических переменных X и $\phi : X \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ — некоторая интерпретация F. *Истинностное значение* $\phi(F)$ формулы F при интерпретации ϕ определяется индукцией по длине F:

(i) если $F = \mathbf{1}$ или $F = \mathbf{0}$, то соответственно $\phi(F) = \mathbf{1}$ или $\phi(F) = \mathbf{0}$;
(ii) если $F = A$ – логическая переменная, то $\phi(F) = \phi(A)$;
(iii) если $F = \neg G$ или $F = G \wedge H$, или $F = G \vee H$, или $F = G \longrightarrow H$, или $F = G \longleftrightarrow H$, то соответственно $\phi(F) = \neg\phi(G)$ или $\phi(F) = \phi(G) \wedge \phi(H)$, или $\phi(F) = \phi(G) \vee \phi(H)$, или $\phi(F) = \phi(G) \longrightarrow \phi(H)$, или $\phi(F) = \phi(G) \longleftrightarrow \phi(H)$ (см. таблицу выше).

Нетрудно видеть, что если в формулу F входит n логических переменных, то F имеет в точности 2^n попарно различных интерпретаций. Таблицу, в которой для каждой интерпретации формулы F указывается ее истинностное значение, принято называть *таблицей истинности* для F.

Интерпретацией одной или нескольких ФЛВ называется произвольное отображение множества их логических переменных в множество логических констант. Пусть F – ФЛВ с множеством логических переменных X и $\phi : X \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ — некоторая интерпретация F. *Истинностное значение* $\phi(F)$ формулы F при интерпретации ϕ определяется индукцией по длине F:

(i) если $F = \mathbf{1}$ или $F = \mathbf{0}$, то соответственно $\phi(F) = \mathbf{1}$ или $\phi(F) = \mathbf{0}$;
(ii) если $F = A$ – логическая переменная, то $\phi(F) = \phi(A)$;
(iii) если $F = \neg G$ или $F = G \wedge H$, или $F = G \vee H$, или $F = G \longrightarrow H$, или $F = G \longleftrightarrow H$, то соответственно $\phi(F) = \neg\phi(G)$ или $\phi(F) = \phi(G) \wedge \phi(H)$, или $\phi(F) = \phi(G) \vee \phi(H)$, или $\phi(F) = \phi(G) \longrightarrow \phi(H)$, или $\phi(F) = \phi(G) \longleftrightarrow \phi(H)$ (см. таблицу выше).

Нетрудно видеть, что если в формулу F входит n логических переменных, то F имеет в точности 2^n попарно различных интерпретаций. Таблицу, в которой для каждой интерпретации формулы F указывается ее истинностное значение, принято называть *таблицей истинности* для F.

Интерпретацией одной или нескольких ФЛВ называется произвольное отображение множества их логических переменных в множество логических констант. Пусть F – ФЛВ с множеством логических переменных X и $\phi : X \longrightarrow \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ — некоторая интерпретация F. *Истинностное значение* $\phi(F)$ формулы F при интерпретации ϕ определяется индукцией по длине F:

(i) если $F = \mathbf{1}$ или $F = \mathbf{0}$, то соответственно $\phi(F) = \mathbf{1}$ или $\phi(F) = \mathbf{0}$;
(ii) если $F = A$ – логическая переменная, то $\phi(F) = \phi(A)$;
(iii) если $F = \neg G$ или $F = G \wedge H$, или $F = G \vee H$, или $F = G \longrightarrow H$, или $F = G \longleftrightarrow H$, то соответственно $\phi(F) = \neg\phi(G)$ или $\phi(F) = \phi(G) \wedge \phi(H)$, или $\phi(F) = \phi(G) \vee \phi(H)$, или $\phi(F) = \phi(G) \longrightarrow \phi(H)$, или $\phi(F) = \phi(G) \longleftrightarrow \phi(H)$ (см. таблицу выше).

Нетрудно видеть, что если в формулу F входит n логических переменных, то F имеет в точности 2^n попарно различных интерпретаций. Таблицу, в которой для каждой интерпретации формулы F указывается ее истинностное значение, принято называть *таблицей истинности* для F.

Ниже приведена таблица истинности для ФЛВ $F = (A \longrightarrow B \wedge C) \wedge (\neg A \longrightarrow \neg B)$; каждая из восьми ее строк соответствует конкретной интерпретации.

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$B \wedge C$	$A \to B \wedge C$	$\neg A \to \neg B$	F
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1	1	1

Как видим, ФЛВ может принимать различные истинностные значения в зависимости от интерпретации.

ФЛВ называется *тавтологией* (соответственно *противоречием*), если при любой интерпретации она истинна (соответственно ложна).

ФЛВ называется *выполнимой*, если для некоторой интерпретации она принимает значение 1.

Из определения немедленно вытекает, что множество всех ФЛВ разбивается на два непересекающихся класса: класс выполнимых формул и класс противоречий. Первый из них содержит тавтологии в качестве собственного подкласса. Приведенная выше ФЛВ F, не будучи тавтологией, является выполнимой формулой.

ФЛВ называется *тавтологией* (соответственно *противоречием*), если при любой интерпретации она истинна (соответственно ложна).

ФЛВ называется *выполнимой*, если для некоторой интерпретации она принимает значение $\mathbf{1}$.

Из определения немедленно вытекает, что множество всех ФЛВ разбивается на два непересекающихся класса: класс выполнимых формул и класс противоречий. Первый из них содержит тавтологии в качестве собственного подкласса. Приведенная выше ФЛВ F, не будучи тавтологией, является выполнимой формулой.

ФЛВ называется *тавтологией* (соответственно *противоречием*), если при любой интерпретации она истинна (соответственно ложна).

ФЛВ называется *выполнимой*, если для некоторой интерпретации она принимает значение $\mathbf{1}$.

Из определения немедленно вытекает, что множество всех ФЛВ разбивается на два непересекающихся класса: класс выполнимых формул и класс противоречий. Первый из них содержит тавтологии в качестве собственного подкласса. Приведенная выше ФЛВ F, не будучи тавтологией, является выполнимой формулой.

Будем говорить, что две ФЛВ F и G равносильны, и писать $F \equiv G$, если для любой интерпретации ϕ этих формул $\phi(F) = \phi(G)$.

Другими словами, две формулы равносильны, если они определяют одну и ту же булеву функцию.

Очевидно, отношение равносильности на множестве всех ФЛВ рефлексивно, симметрично и транзитивно и, следовательно, является *отношением эквивалентности*, разбивающим это множество на классы равносильных формул.

Примерами таких классов могут служить класс тавтологий и класс противоречий, ибо на тавтологию и на противоречие можно смотреть как на формулы, равносильные соответственно формулам $\mathbf{1}$ и $\mathbf{0}$.

Пусть F, G, H — произвольные ФЛВ.

1. *Законы коммутативности*:
$F \wedge G \equiv G \wedge F$,
$F \vee G \equiv G \vee F$,
$F \longleftrightarrow G \equiv G \longleftrightarrow F$.

2. *Законы ассоциативности*:
$F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$,
$F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$.

3. *Законы дистрибутивности*:
$F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$,
$F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$.

4. *Законы идемпотентности*:
$F \wedge F \equiv F$,
$F \vee F \equiv F$.

5. *Законы поглощения*:
$F \wedge (F \vee G) \equiv F$,
$F \vee (F \wedge G) \equiv F$.

6. *Закон двойного отрицания*:
$\neg\neg F \equiv F$.

7. *Закон импликации*:
$F \longrightarrow G \equiv \neg F \vee G$.

8. *Закон контрапозиции*:
$F \longrightarrow G \equiv \neg G \longrightarrow \neg F$.

9. *Законы де Моргана (двойственности)*:
$\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$,
$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$.

10. *Закон исключенного третьего*:
$F \vee \neg F \equiv \mathbf{1}$.

11. *Закон противоречия*:
$F \wedge \neg F \equiv \mathbf{0}$.

12. *Закон эквиваленции*:
$F \longleftrightarrow G \equiv (F \longrightarrow G) \wedge (G \longrightarrow F)$.

13. $F \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$, $F \wedge \mathbf{1} \equiv F$, $F \vee \mathbf{0} \equiv F$, $F \wedge \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$.

Пример. Сравнивая таблицы истинности формул $\neg(F \wedge G)$ и $\neg F \vee \neg G$, получаем один из законов де Моргана: $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$.

F	G	$F \wedge G$	$\neg(F \wedge G)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

и

F	G	$\neg F$	$\neg G$	$\neg F \vee \neg G$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

Знание основных законов логики высказываний позволяет *упрощать* ФЛВ, а также определять тип ФЛВ.

ПРИМЕР. Упростить формулу и определить ее тип:

$\neg A \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B) \longrightarrow B.$

Выпишем последовательность равносильных формул, указав для удобства над каждым знаком $\equiv$ номер примененного закона:

$$\neg A \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B) \longrightarrow B \equiv^7 \neg(\neg A \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)) \vee B \equiv^9$$
$$(\neg\neg A \vee \neg\neg(\neg A \wedge \neg B)) \vee B \equiv^6 (A \vee (\neg A \wedge \neg B)) \vee B \equiv^3$$
$$(A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B) \vee B \equiv^{10} \mathbf{1} \wedge (A \vee \neg B) \vee B \equiv^{13}$$
$$(A \vee \neg B) \vee B \equiv^2 A \vee (\neg B \vee B) \equiv^{10} A \vee \mathbf{1} \equiv^{13} \mathbf{1}.$$

Поскольку данная формула равносильна $\mathbf{1}$, заключаем, что она является тавтологией.

Понятие логического следования является одной из формализаций доказательства теорем.

Пусть Γ – некоторое множество ФЛВ и F — произвольная ФЛВ.

Будем говорить, что F *логически следует из* Γ, если для любой интерпретации множества формул $\Gamma \cup \{F\}$ из того, что каждая формула из Γ истинна, вытекает, что и F истинна. В этом случае будем писать $\Gamma \models F$ (в противном случае — $\Gamma \not\models F$).

Пользуясь определением логического следования, легко проверить, что, например, $A,\ A \longrightarrow B \models B$, в то время как $B,\ A \longrightarrow B \not\models A$.

Понятие логического следования является одной из формализаций доказательства теорем.

Пусть Γ – некоторое множество ФЛВ и F — произвольная ФЛВ.

Будем говорить, что F *логически следует из* Γ, если для любой интерпретации множества формул $\Gamma \cup \{F\}$ из того, что каждая формула из Γ истинна, вытекает, что и F истинна. В этом случае будем писать $\Gamma \models F$ (в противном случае — $\Gamma \not\models F$).

Пользуясь определением логического следования, легко проверить, что, например, $A,\ A \longrightarrow B \models B$, в то время как $B,\ A \longrightarrow B \not\models A$.

Понятие логического следования является одной из формализаций доказательства теорем.

Пусть Γ – некоторое множество ФЛВ и F — произвольная ФЛВ.

Будем говорить, что F *логически следует из* Γ, если для любой интерпретации множества формул $\Gamma \cup \{F\}$ из того, что каждая формула из Γ истинна, вытекает, что и F истинна. В этом случае будем писать $\Gamma \models F$ (в противном случае — $\Gamma \not\models F$).

Пользуясь определением логического следования, легко проверить, что, например, $A,\ A \longrightarrow B \models B$, в то время как $B,\ A \longrightarrow B \not\models A$.

Понятие логического следования является одной из формализаций доказательства теорем.

Пусть Γ – некоторое множество ФЛВ и F — произвольная ФЛВ.

Будем говорить, что F *логически следует из* Γ, если для любой интерпретации множества формул $\Gamma \cup \{F\}$ из того, что каждая формула из Γ истинна, вытекает, что и F истинна. В этом случае будем писать $\Gamma \models F$ (в противном случае — $\Gamma \not\models F$).

Пользуясь определением логического следования, легко проверить, что, например, $A,\ A \longrightarrow B \models B$, в то время как $B,\ A \longrightarrow B \not\models A$.

ТЕОРЕМА. *Для любых ФЛВ* $F_1, ..., F_n, G$ *выполнено:*

а) $F_1, ..., F_n \models G$ *в том и только в том случае, если формула* $F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G$ *является тавтологией;*

б) $F_1, ..., F_n \models G$ *в том и только в том случае, если формула* $F_1 \wedge ... \wedge F_n \wedge \neg G$ *является противоречием.*

Доказательство. а). Пусть $F_1, ..., F_n \models G$ и ϕ – произвольная интерпретация формулы $F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G$. Тогда если для некоторого $i \in \{1, ..., n\}$ выполнено $\phi(F_i) = \mathbf{0}$, то $\phi(F_1 \wedge ... \wedge F_n) = \mathbf{0}$ и, следовательно, $\phi(F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G) = \mathbf{1}$. Если же для каждого $i \in \{1, ..., n\}$ имеем $\phi(F_i) = \mathbf{1}$, то ввиду $F_1, ..., F_n \models G$ выполнено $\phi(G) = \mathbf{1}$ и потому $\phi(F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G) = \mathbf{1}$. Так как интерпретация ϕ выбрана произвольно, заключаем, что формула $F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G$ является тавтологией.

Обратно, пусть $F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G$ — тавтология и $\phi(F_i) = \mathbf{1}$ при $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\phi(F_1 \wedge ... \wedge F_n) = \mathbf{1}$ и $\phi(F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G) = \mathbf{1}$, откуда $\phi(G) = \mathbf{1}$. Ввиду произвольности ϕ это означает, что $F_1, ..., F_n \models G$.

ТЕОРЕМА. *Для любых ФЛВ $F_1, \dots, F_n, G$ выполнено:*

а) $F_1, \dots, F_n \models G$ в том и только в том случае, если формула $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \longrightarrow G$ является тавтологией;

б) $F_1, \dots, F_n \models G$ в том и только в том случае, если формула $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \neg G$ является противоречием.

Доказательство. а). Пусть $F_1, \dots, F_n \models G$ и ϕ – произвольная интерпретация формулы $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \longrightarrow G$. Тогда если для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$ выполнено $\phi(F_i) = \mathbf{0}$, то $\phi(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) = \mathbf{0}$ и, следовательно, $\phi(F_1 \wedge \dots \wedge F_n \longrightarrow G) = \mathbf{1}$. Если же для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $\phi(F_i) = \mathbf{1}$, то ввиду $F_1, \dots, F_n \models G$ выполнено $\phi(G) = \mathbf{1}$ и потому $\phi(F_1 \wedge \dots \wedge F_n \longrightarrow G) = \mathbf{1}$. Так как интерпретация ϕ выбрана произвольно, заключаем, что формула $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \longrightarrow G$ является тавтологией.

Обратно, пусть $F_1 \wedge \dots \wedge F_n \longrightarrow G$ — тавтология и $\phi(F_i) = \mathbf{1}$ при $i = 1, \dots, n$. Тогда $\phi(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) = \mathbf{1}$ и $\phi(F_1 \wedge \dots \wedge F_n \longrightarrow G) = \mathbf{1}$, откуда $\phi(G) = \mathbf{1}$. Ввиду произвольности ϕ это означает, что $F_1, \dots, F_n \models G$.

ТЕОРЕМА. *Для любых ФЛВ* $F_1, ..., F_n, G$ *выполнено:*

а) $F_1, ..., F_n \models G$ *в том и только в том случае, если формула* $F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G$ *является тавтологией;*

б) $F_1, ..., F_n \models G$ *в том и только в том случае, если формула* $F_1 \wedge ... \wedge F_n \wedge \neg G$ *является противоречием.*

Доказательство. а). Пусть $F_1, ..., F_n \models G$ и ϕ – произвольная интерпретация формулы $F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G$. Тогда если для некоторого $i \in \{1, ..., n\}$ выполнено $\phi(F_i) = \mathbf{0}$, то $\phi(F_1 \wedge ... \wedge F_n) = \mathbf{0}$ и, следовательно, $\phi(F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G) = \mathbf{1}$. Если же для каждого $i \in \{1, ..., n\}$ имеем $\phi(F_i) = \mathbf{1}$, то ввиду $F_1, ..., F_n \models G$ выполнено $\phi(G) = \mathbf{1}$ и потому $\phi(F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G) = \mathbf{1}$. Так как интерпретация ϕ выбрана произвольно, заключаем, что формула $F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G$ является тавтологией.

Обратно, пусть $F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G$ — тавтология и $\phi(F_i) = \mathbf{1}$ при $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\phi(F_1 \wedge ... \wedge F_n) = \mathbf{1}$ и $\phi(F_1 \wedge ... \wedge F_n \longrightarrow G) = \mathbf{1}$, откуда $\phi(G) = \mathbf{1}$. Ввиду произвольности ϕ это означает, что $F_1, ..., F_n \models G$.

б). Заметим, что $\neg(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \longrightarrow G) \equiv \neg(\neg(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \vee G) \equiv \neg\neg(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \wedge \neg G \equiv F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$. Поэтому формула $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \longrightarrow G$ будет тавтологией тогда и только тогда, когда формула $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$ будет противоречием. Отсюда и из доказанного утверждения "а" следует, что $F_1, \ldots, F_n \models G$ в том и только в том случае, если $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$ – противоречие. Теорема доказана.

ПРИМЕР. Выяснить, логично следующее рассуждение или нет:

Кривая является или эллипсом, или параболой, или гиперболой. Если кривая — эллипс или гипербола, то она центральна. Данная кривая не эллипс и не парабола. Следовательно, она центральна и является гиперболой.

Обозначим через A (соответственно B и C) высказывание "данная кривая является эллипсом" (соответственно "параболой" и "гиперболой"), а через D — высказывание "кривая центральна". Мы хотим проверить, верно или нет, что

$$A \vee B \vee C,\ A \vee C \longrightarrow D,\ \neg A \wedge \neg B \models D \wedge C.$$

Для этого ввиду утверждения "б" доказанной теоремы достаточно проверить, будет ли формула

$$F = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee C \longrightarrow D) \wedge (\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(D \wedge C)$$

противоречием.

ПРИМЕР. Выяснить, логично следующее рассуждение или нет:

Кривая является или эллипсом, или параболой, или гиперболой. Если кривая — эллипс или гипербола, то она центральна. Данная кривая не эллипс и не парабола. Следовательно, она центральна и является гиперболой.

Обозначим через A (соответственно B и C) высказывание "данная кривая является эллипсом" (соответственно "параболой" и "гиперболой"), а через D — высказывание "кривая центральна". Мы хотим проверить, верно или нет, что

$$A \vee B \vee C,\ A \vee C \longrightarrow D,\ \neg A \wedge \neg B \models D \wedge C.$$

Для этого ввиду утверждения "б" доказанной теоремы достаточно проверить, будет ли формула

$$F = (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee C \longrightarrow D) \wedge (\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(D \wedge C)$$

противоречием.

Упростим формулу F с помощью равносильных преобразований следующим образом:

$$F \equiv^{1} (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \wedge \neg B) \wedge (A \vee C \longrightarrow D) \wedge \neg(D \wedge C) \equiv^{7,9}$$
$$(A \vee B \vee C) \wedge \neg(A \vee B) \wedge (\neg(A \vee C) \vee D) \wedge (\neg D \vee \neg C) \equiv^{3,9}$$
$$(((A \vee B) \wedge \neg(A \vee B)) \vee (C \wedge \neg(A \vee B))) \wedge ((\neg A \wedge \neg C) \vee D)$$
$$\wedge(\neg D \vee \neg C) \equiv^{11,9}$$
$$(\mathbf{0} \vee (C \wedge \neg A \wedge \neg B)) \wedge ((\neg A \wedge \neg C) \vee D) \wedge (\neg D \vee \neg C) \equiv^{13,3}$$
$$C \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge (\neg A \vee D) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (\neg D \vee \neg C) \equiv^{1,5,3}$$
$$C \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge (\neg C \vee (D \wedge \neg D)) \equiv^{11,13} C \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \equiv^{1,11}$$
$$\mathbf{0} \wedge \neg A \wedge \neg B \equiv^{13} \mathbf{0}.$$

Получили, что формула F, будучи равносильной $\mathbf{0}$, является противоречием. Отсюда заключаем, что

$$A \vee B \vee C, A \vee C \longrightarrow D, \neg A \wedge \neg B \models D \wedge C,$$

т.е. рассуждение логично.

Упростим формулу F с помощью равносильных преобразований следующим образом:

$$F \equiv^{1} (A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \wedge \neg B) \wedge (A \vee C \longrightarrow D) \wedge \neg(D \wedge C) \equiv^{7,9}$$
$$(A \vee B \vee C) \wedge \neg(A \vee B) \wedge (\neg(A \vee C) \vee D) \wedge (\neg D \vee \neg C) \equiv^{3,9}$$
$$(((A \vee B) \wedge \neg(A \vee B)) \vee (C \wedge \neg(A \vee B))) \wedge ((\neg A \wedge \neg C) \vee D)$$
$$\wedge(\neg D \vee \neg C) \equiv^{11,9}$$
$$(\mathbf{0} \vee (C \wedge \neg A \wedge \neg B)) \wedge ((\neg A \wedge \neg C) \vee D) \wedge (\neg D \vee \neg C) \equiv^{13,3}$$
$$C \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge (\neg A \vee D) \wedge (\neg C \vee D) \wedge (\neg D \vee \neg C) \equiv^{1,5,3}$$
$$C \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge (\neg C \vee (D \wedge \neg D)) \equiv^{11,13} C \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \equiv^{1,11}$$
$$\mathbf{0} \wedge \neg A \wedge \neg B \equiv^{13} \mathbf{0}.$$

Получили, что формула F, будучи равносильной $\mathbf{0}$, является противоречием. Отсюда заключаем, что

$$A \vee B \vee C, A \vee C \longrightarrow D, \ \neg A \wedge \neg B \models D \wedge C,$$

т.е. рассуждение логично.

Пусть X – логическая переменная и $A \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Введем следующее обозначение:

$$X^A = \begin{cases} X & \text{, если } A = \mathbf{1}, \\ \neg X & \text{, если } A = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Выражение X^A, т.е. X или $\neg X$, принято называть *литерой* переменной X.

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких литер различных переменных.

Например, выражения X и $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$ суть элементарные конъюнкции.

Две элементарные конъюнкции мы не различаем, если одна из них получается из другой перестановкой литер переменных.

ФЛВ называется *дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно ДНФ), если она является дизъюнкцией одной или нескольких различных элементарных конъюнкций.

ДНФ называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой*(сокращенно СДНФ), если каждая ее элементарная конъюнкция зависит от одного и того же набора логических переменных.

Пусть X – логическая переменная и $A \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Введем следующее обозначение:

$$X^A = \begin{cases} X & \text{, если } A = \mathbf{1}, \\ \neg X & \text{, если } A = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Выражение X^A, т.е. X или $\neg X$, принято называть *литерой* переменной X.

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких литер различных переменных.

Например, выражения X и $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$ суть элементарные конъюнкции.

Две элементарные конъюнкции мы не различаем, если одна из них получается из другой перестановкой литер переменных.

ФЛВ называется *дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно ДНФ), если она является дизъюнкцией одной или нескольких различных элементарных конъюнкций.

ДНФ называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой*(сокращенно СДНФ), если каждая ее элементарная конъюнкция зависит от одного и того же набора логических переменных.

Пусть X – логическая переменная и $A \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Введем следующее обозначение:

$$X^A = \begin{cases} X & \text{, если } A = \mathbf{1}, \\ \neg X & \text{, если } A = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Выражение X^A, т.е. X или $\neg X$, принято называть *литерой* переменной X.

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких литер различных переменных.

Например, выражения X и $\neg X \wedge Y \wedge \neg Z$ суть элементарные конъюнкции.

Две элементарные конъюнкции мы не различаем, если одна из них получается из другой перестановкой литер переменных.

ФЛВ называется *дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно ДНФ), если она является дизъюнкцией одной или нескольких различных элементарных конъюнкций.

ДНФ называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой*(сокращенно СДНФ), если каждая ее элементарная конъюнкция зависит от одного и того же набора логических переменных.

В курсе дискретной математики было доказано, что всякая ненулевая булева функция от n переменных однозначным образом представима в виде СДНФ от этих n переменных. Это утверждение можно переформулировать в следующем эквивалентном виде:

ТЕОРЕМА О СДНФ. *Всякая выполнимая ФЛВ $F(X_1, \ldots, X_n)$ равносильна некоторой СДНФ, причем последняя определяется однозначно с точностью до перестановки элементарных конъюнкций и по набору переменных.*

При этом имеет место равенство:

$$F(X_1, \ldots, X_n) = \bigvee_{F(A_1, \ldots, A_n)=1} (X_1^{A_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{A_n}). \qquad (*)$$

В курсе дискретной математики было доказано, что всякая ненулевая булева функция от n переменных однозначным образом представима в виде СДНФ от этих n переменных. Это утверждение можно переформулировать в следующем эквивалентном виде:

ТЕОРЕМА О СДНФ. *Всякая выполнимая ФЛВ $F(X_1, ..., X_n)$ равносильна некоторой СДНФ, причем последняя определяется однозначно с точностью до перестановки элементарных конъюнкций и по набору переменных.*

При этом имеет место равенство:

$$F(X_1, ..., X_n) = \bigvee_{F(A_1, \ldots, A_n) = 1} (X_1^{A_1} \wedge ... \wedge X_n^{A_n}). \qquad (*)$$

В курсе дискретной математики было доказано, что всякая ненулевая булева функция от n переменных однозначным образом представима в виде СДНФ от этих n переменных. Это утверждение можно переформулировать в следующем эквивалентном виде:

ТЕОРЕМА О СДНФ. *Всякая выполнимая ФЛВ $F(X_1, ..., X_n)$ равносильна некоторой СДНФ, причем последняя определяется однозначно с точностью до перестановки элементарных конъюнкций и по набору переменных.*

При этом имеет место равенство:

$$F(X_1, ..., X_n) = \bigvee_{F(A_1,\ldots,A_n)=1} (X_1^{A_1} \wedge ... \wedge X_n^{A_n}). \qquad (*)$$

Двойственно определяются поняти элементарной дизъюнкции, КНФ и СКНФ. Соответственно, двойственной к теореме о СДНФ является следующая теорема о СКНФ:

ТЕОРЕМА О СКНФ. *Всякая ФЛВ $F(X_1, ..., X_n)$, не являющаяся тавтологией, равносильна некоторой СКНФ, причем последняя определяется однозначно с точностью до перестановки элементарных дизъюнкций и по набору переменных.*

При этом имеет место равенство:

$$F(X_1, ..., X_n) = \bigwedge_{F(A_1,...,A_n)=0} (X_{1_{A_1}} \vee ... \vee X_{n_{A_n}}). \qquad (**)$$

Здесь

$$X_A = \begin{cases} X & \text{, если } A = \mathbf{0}, \\ \neg X & \text{, если } A = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Двойственно определяются поняти элементарной дизъюнкции, КНФ и СКНФ. Соответственно, двойственной к теореме о СДНФ является следующая теорема о СКНФ:

ТЕОРЕМА О СКНФ. *Всякая ФЛВ $F(X_1, ..., X_n)$, не являющаяся тавтологией, равносильна некоторой СКНФ, причем последняя определяется однозначно с точностью до перестановки элементарных дизъюнкций и по набору переменных.*

При этом имеет место равенство:

$$F(X_1, ..., X_n) = \bigwedge_{F(A_1,...,A_n)=0} (X_{1_{A_1}} \vee ... \vee X_{n_{A_n}}). \qquad (**)$$

Здесь

$$X_A = \begin{cases} X & \text{, если } A = 0, \\ \neg X & \text{, если } A = 1. \end{cases}$$

Двойственно определяются поняти элементарной дизъюнкции, КНФ и СКНФ. Соответственно, двойственной к теореме о СДНФ является следующая теорема о СКНФ:

ТЕОРЕМА О СКНФ. *Всякая ФЛВ $F(X_1, ..., X_n)$, не являющаяся тавтологией, равносильна некоторой СКНФ, причем последняя определяется однозначно с точностью до перестановки элементарных дизъюнкций и по набору переменных.*

При этом имеет место равенство:

$$F(X_1, ..., X_n) = \bigwedge_{F(A_1,...,A_n)=\mathbf{0}} (X_{1_{A_1}} \vee ... \vee X_{n_{A_n}}). \qquad (**)$$

Здесь

$$X_A = \begin{cases} X & \text{, если } A = \mathbf{0}, \\ \neg X & \text{, если } A = \mathbf{1}. \end{cases}$$