Лекция 3. Бинарные и другие отношения

Мы уже обсудили, что множества играют фундаментальную роль в самой математике и многообразных её приложениях. Однако описывая окружающий мир, мы не только перечисляем интересующие нас объекты, т.е. задаём множество, но и указываем отношения, которыми эти объекты могут быть связаны. Такие связи могут быть весьма разнообразными, но мы начнем с наиболее общего представления об отношениях элементов множеств.

В отношениях могут находиться элементы самых разнообразных множеств. Например, могут быть родственные отношения между людьми, скажем, один человек другому является братом; между числами – одно число меньше другого; между геометрическими объектами – некоторая точка принадлежит той или иной прямой и т.д.

Совсем не обязательно, чтобы отношение связывало равно два объекта – человека с человеком, число с числом, точку и прямую. Например, отношение точка A лежит между точками B и C связывает, как мы видим, 3 объекта.

Придумайте ещё примеры отношений, которые связывают а) два объекта, б) три объекта; в) четыре объекта.

1. Определение отношения

Как нередко фиксируются отношения в обыденной жизни? Например, что два человека стали мужем и женой. Идут в ЗАГС, и там им выдают бумагу, в которой так и написано, что эти два человека – муж и жена. Как фиксируется, что такой-то является сыном или дочерью таких-то двух человек? То же самое – выдаётся бумага, в которой фигурируют эти три человека. Как фиксируется, что данный человек принят на работу в такое-то предприятие? Заключается договор между этим человеком и уполномоченным представителем предприятия. Что общего во всех этих примерах? В каждом из них просто фиксируется, кто именно (или что именно) находится в рассматриваемом отношении. Если отвлечься от того, о чём эти отношения, то становится понятно, что задать отношение – это записать те объекты, которые находятся в данном отношении. Такую запись удобно представлять кортежем, а список всех таких записей и есть описание данного отношения. Каждый кортеж в свою очередь – это элемент декартова произведения тех множеств, откуда берутся элементы кортежа. Тем самым мы приходим к следующему определению.

Определение 3.1. Пусть M_1, M_2, …, M_n – некоторые множества. *Отношением* на совокупности этих множеств называется любое подмножество декартова произведения этих множеств. Если $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, то говорят об отношении на множестве M.

Определение 3.2. Количество множителей в декартовом произведении (т.е. количество компонентов в каждом кортеже) называют *арностью*, или *местностью*, данного отношения.

Таким образом, отношения бывают двуместные, или бинарные, трёхместные, четырёхместные и т.д. Отношение «меньше» на множестве чисел бинарное, отношение «точка лежит внутри треугольника» тоже бинарное на совокупности из двух множеств – множества точек и множества треугольников; отношение «лежать между» на множестве точек трёхместное, отношение «четыре точки лежат на одной окружности» на множестве точек плоскости четырёхместное.

Определите арность отношений
а) точки A, B и C лежат на одной прямой;
б) точки A, B и C лежат на прямой l.

Отношение мы будем обычно обозначать буквой R (от английского relation – отношение). Тогда факт, что некоторая совокупность объектов a_1, a_2, …, a_n находится в отношении R, можно записать так: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$. Правда, такая запись довольно непривычна для бинарных отношений – никто не пишет $(x, y) \in <$ для чисел x и y (здесь символ $<$ – стандартное обозначение отношения «меньше»), или $(l, m) \in \parallel$ для прямых l и m (здесь символ $\parallel$ – стандартное обозначение отношения «быть параллельными»). Все привыкли писать $x < y$ и $l \parallel m$. Поэтому и мы для бинарных отношений позволим себе (и вам) писать $a_1\, R\, a_2$.

Можно ли, по вашему мнению, говорить об унарном (одноместном) отношении? Если нет, то почему, Если да, то как понимать, что означает такое отношение.

Среди всевозможных отношений на совокупности множеств M_1, M_2, …, M_n есть два особых отношения. Одно из них совпадает с $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ и называется *универсальным*, другое – пустое множество, которое естественно называть *пустым* отношением.

Поскольку отношение – это по определению некоторое множество, то его можно задавать так же, как задают множества: списком или с указанием свойства. По существу задание отношения списком мы обсудили, когда вводили само понятие отношения. Ясно, что такой способ продуктивен, когда множества, на которых рассматривается отношение, конечны. Если же среди множеств имеются бесконечные, то в этом случае отношение задаётся свойством. На самом деле с этим вариантом задания отношения мы тоже уже встречались: отношение «меньше» на множестве чисел списком не задашь и отношение «лежать между» на множестве точек плоскости тоже.

На числовой прямой заданы точки с координатами –2, 0, 3, 5, 8. Отношение R на множестве, состоящем из этих точек, задано свойством: $(x, y, z) \in R$, если точка с координатой y лежит строго между точками с координатами x и z. Запишите отношение R списком.

2. Операции над отношениями

Поскольку отношения – это подмножества $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, для них определены теоретико-множественные операции объединения и пересечения. Они называются соответственно операциями *объединения* и *пересечения* отношений. Можно также брать дополнение заданного отношения до универсального отношения. Обозначения этих операций такие же, как и для любых множеств.

На множестве прямых в пространстве заданы следующие бинарные отношения: $(l, m) \in R_1$, если прямые l и m параллельны; $(l, m) \in R_2$, если прямые l и m пересекаются. Каким общим свойством на множестве всех прямых пространства можно описать отношение $R_1 \cup R_2$? Каким общим свойством на множестве всех прямых пространства можно описать отношение $\overline{R_1} \cap \overline{R_2}$

Для отношений определена ещё одна особая операция, которую принято называть произведением отношений.

Определение 3.3. Пусть отношение $R_1 \subseteq L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_k \times M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_s$, а отношение $R_2 \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_s \times N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t$. Тогда отношение $R_3 \subseteq L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_k \times N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_t$ называется *произведением* отношений R_1 и R_2, если кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_k, c_1, c_2, \ldots, c_t) \in R_3$ в том и только том случае, когда существуют такие элементы $b_1 \in M_1$, $b_2 \in M_2$, … $b_s \in M_s$, для которых

$(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_s) \in R_1$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_s, c_1, c_2, \ldots, c_t) \in R_2$. Множества M_1, $M_2, \ldots, M_s$ называются *связывающими* отношения R_1 и R_2. Если связывающие множества отсутствуют, произведение R_1 и R_2 совпадает с $R_1 \times R_2$.

Операцию умножения отношений будем обозначать символом $\circ$. Из определения произведения отношений видно, что произведение отношения арности $k + s$ на отношение арности $s + t$ даёт отношение арности $k + t$.

Множества $M_1 = M_2 = M_3 = \{-2, 0, 3, 5, 8\}$. Отношения $R_1 \subseteq M_1 \times M_2 \times M_3$ и $R_2 \subseteq M_2 \times M_3 \times M_1$ заданы свойством: $(x, y, z) \in R_i$, $i \in \{1; 2\}$, если $x < y < z$.
а) Вычислите произведение $R_1 \circ R_2$, если связывающие множества – это M_2 и M_3. Каким свойством задано отношение $R_1 \circ R_2$?
б) Вычислите произведение $R_2 \circ R_1$, если связывающее множество – это M_1.

3. Из недавнего прошлого в довольно скорое будущее: несколько слов о базах данных

Раз вы учитесь на компьютерной специальности, значит, ещё недавно сдавали ЕГЭ по информатике. Есть там задание 4, которое начинается словами: «Ниже представлены два фрагмента таблиц из базы данных о…». Нам не так уж важно, о чём эта база данных. Допустим, это база данных некоторого оператора сотовой связи. Одна из таблиц этой базы вполне может выглядеть так:

Номер звонившего	Дата звонка	Код региона	Продолжительность звонка
111-22-33	01.01.2020	77	7
111-22-33	02.01.2020	28	9
111-33-44	01.01.2020	13	20
111-33-44	02.01.2020	66	17
111-33-44	02.01.2020	77	7
111-33-45	01.01.2020	13	11
…	…	…	…

Таких номеров телефонов, конечно, не существует, так что нас нельзя обвинить в разглашении персональных данных.

Данная таблица фактически представляет собой четырёхместное отношение:

каждая строка – это кортеж из $M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4$, где M_1 – множество телефонных номеров, M_2 – множество дат, M_3 – множество кодов субъектов РФ и зарубежных стран, M_4 – множество натуральных чисел.

Эта таблица постоянно обновляется: в неё добавляются новые строки, а какие-то по истечению срока хранения (например, месяца) удаляются. Но есть таблицы, т.е. отношения, которые в меньшей степени подвержены изменениям. Скажем, такая:

Фамилия И.О.	Номер телефона
Иванов М.С.	111-22-33
Иванов М.С.	111-33-45
Петров К.Л.	111-33-44
…	…

Ясно, что эта информация хранится столько времени, сколько данный абонент будет клиентом данного оператора.

Как получить информацию, сколько времени суммарно Иванов пользовался услугами данного оператора? Ясно, что надо перемножить эти два отношения по связывающему множеству «Номер телефона».

Конечно, теория баз данных не сводится к использованию операции умножения многоместных отношений. В ней используются и другие операции, но это всё равно некоторые операции над отношениями.

4. Частный случай: бинарные отношения. Свойства бинарных отношений

Бинарные отношения занимают особое место среди всех отношений, поскольку многие из наиболее важных отношений бинарные. Даже среди рассмотренных выше примеров бинарных отношений больше, чем отношений других арностей. Напомним, что для бинарных отношений мы договорились записывать символ отношения между элементами, находящимися в данном отношении. Запись aRb обычно читают «элемент a находится в отношении R с элементом b». Например, запись $a < b$ читают «число a меньше числа b». ☺

Как и отношение произвольной арности, бинарные отношения можно задавать списком или указанием свойства. Но для бинарных отношений есть и другие способы задания. Например, бинарное отношение $R \subseteq A \times B$ можно изобразить двудольным орграфом:

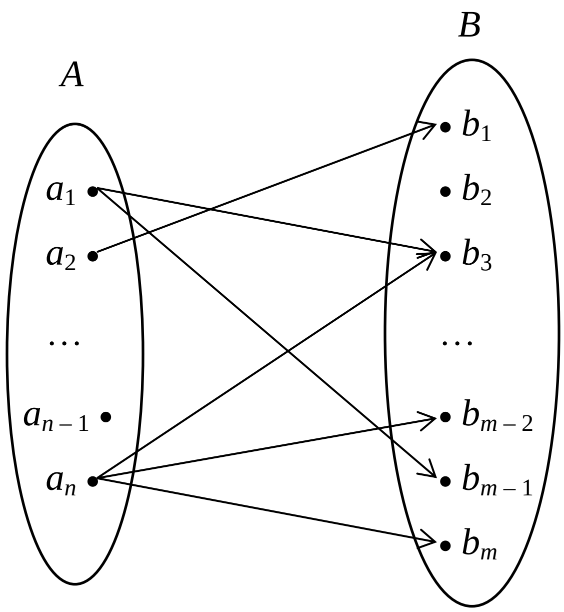

Рис. 3.1. Изображение отношения R в виде двудольного орграфа

Стрелка, ведущая из вершины a_i в вершину b_j, означает, что a_iRb_j. Нетрудно понять, что задание отношения списком пар – это в точности задание соответствующего ему орграфа списком рёбер.

Теоретико-множественные операции над бинарными отношениями выполняются так же, как и над любыми другими. А вот об умножении поговорим подробнее. Прежде всего, хотелось бы, чтобы произведение бинарных отношений снова было бинарным отношением. Поэтому, говоря об умножении бинарных отношений R_1 и R_2, обычно договариваются, что $R_1 \subseteq A \times B$, а $R_2 \subseteq B \times C$, и множество B выступает в роли связывающего. Мы тоже будем придерживаться этой договорённости.

Операция умножения бинарных отношений обладает очень важным свойством, которое в математике называется *ассоциативностью*, а в школе – сочетательным законом.

Теорема 3.1. Для любых бинарных отношений $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$ и $R_3 \subseteq C \times D$ справедливо равенство $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$.

Доказательство. Нам требуется доказать равенство двух множеств: $(R_1 \circ R_2) \circ R_3$ и $R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$. Заметим, прежде всего, что $R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$, $R_2 \circ R_3 \subseteq B \times D$, а оба множества $(R_1 \circ R_2) \circ R_3$ и $R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$ – это подмножества множества $A \times D$.

Пусть $(a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$. Это значит, что существует такой элемент c из множества C, что $(a, c) \in R_1 \circ R_2$ и в то же время $(c, d) \in R_3$. Условие $(a, c) \in R_1 \circ$

R_2 означает, что существует такой элемент $b \in B$, для которого $(a, b) \in R_1$ и $(b, c) \in R_2$. Поскольку для найденных нами элементов $b \in B$ и $c \in C$ выполнено условие $(b, c) \in R_2$ и $(c, d) \in R_3$, можно сделать вывод, что $(b, d) \in R_2 \circ R_3$. Учитывая $(a, b) \in R_1$, получаем, что $(a, d) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$. Значит, $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 \subseteq R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$.

Включение $R_1 \circ (R_2 \circ R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \circ R_3$ докажите самостоятельно.

Следовательно, $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$. □

Введём для бинарных отношений ещё одну операцию: обращение отношения.

Определение 3.4. Отношение $S \subseteq B \times A$ называется обратным к отношению $R \subseteq A \times B$, если bSa тогда и только тогда, когда aRb.

Например, обратным к отношению «точка лежит на прямой» на множестве прямых в пространстве является отношение «прямая проходит через точку».

Какое отношение на множестве действительных чисел является обратным к отношению «меньше»?

Отношение, обратное к отношению R, будем обозначать R^{-1}.

Пусть для бинарного отношения R построен соответствующий ему орграф. Как по этому орграфу построить орграф отношения R^{-1}?

Особое внимание к бинарным отношениям объясняется ещё и тем, что любое n-арное отношение R при $n > 2$ можно формально рассматривать как бинарное. Для этого произведение $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k \times M_{k+1} \times \ldots \times M_n$ представим в виде $(M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k) \times (M_{k+1} \times \ldots \times M_n)$ и обозначим множество $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$ через N_1, а множество $M_{k+1} \times \ldots \times M_n$ через N_2. Тогда кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ из отношения R будет представлен кортежем $((a_1, a_2, \ldots, a_k), (a_{k+1}, \ldots, a_n))$ из бинарного отношения $R' \subseteq N_1 \times N_2$.

5. Бинарные отношения на множестве и их свойства

Теперь мы займёмся ещё более частным случаем: бинарными отношениями на множестве. В этом случае отношение можно изобразить орграфом другой структуры: вершинами считать элементы множества и соединять их стрелкой в том и только том случае, если соответствующие этим вершинам элементы находятся в данном отношении.

На рисунке 3.2 изображён ромб с проведёнными в нём диагоналями. Множество M – множество, состоящее из шести отрезков: AB, BC, CD, DA, AC и BD. Изобразите соответствующим орграфом каждое из перечисленных ниже бинарных отношений на множестве M:

а) отрезки пересекаются (т.е. имеют ровно одну общую точку);

б) отрезки не пересекаются (т.е. не имеют общих точек);

в) отрезки имеют хотя бы одну общую точку.

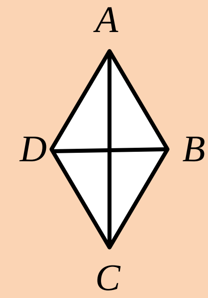

Рис. 3.2

Если R – некоторое бинарное отношение на множестве M, то для него определены отношения $R \circ R$, $R \circ R \circ R$, …, $\underbrace{R \circ R \ldots \circ R}_{n \text{ раз}}$. Такие произведения мы будем обозначать соответственно R^2, R^3, …, R^n.

Некоторые бинарные отношения на множестве обладают рядом важных свойств. Мы в этом пункте будем говорить только о четырёх из них: рефлексивности, симметричности, транзитивности и антисимметричности.

Определение 3.5. Отношение R на множестве M называется *рефлексивным*, если для любого элемента a из M справедливо, что aRa.

Вот несколько примеров рефлексивных отношений:

– на множестве целых чисел: меньше или равно;
– на множестве воздушных шаров: быть одного цвета;
– на множестве людей: быть одноклассником.

Определите, какие из следующих отношений рефлексивны:

а) отношение подобия на множестве треугольников;

б) отношение «делиться нацело» на множестве натуральных чисел;

в) отношение перпендикулярности на множестве прямых;

г) отношение «быть старше» на множестве людей.

Рефлексивным, очевидно, является универсальное отношение на любом множестве. Также очевидно, что пустое отношение рефлексивным не является. Для заданного множества M обозначим символом Δ множество пар вида (a, a), построенных для всех элементов a из M. Отношение Δ на множестве M называется *отношением равенства*. Легко понять, что отношение Δ

рефлексивно. Более того, для любого рефлексивного отношения R справедливо $\Delta \subseteq R$.

Верно ли обратное утверждение: если $\Delta \subseteq R$, то отношение R рефлексивно?

Определение 3.6. Отношение R на множестве M называется *симметричным*, если для любых элементов a и b множества M из выполнения утверждения aRb следует справедливость утверждения bRa.

Вот несколько примеров симметричных отношений:

– на множестве прямых: быть параллельными;
– на множестве целых чисел: быть одного знака;
– на множестве людей: быть одноклассниками.

Определите, какие из следующих отношений симметричны:
а) отношение подобия на множестве треугольников;
б) отношение «меньше» на множестве натуральных чисел;
в) отношение перпендикулярности на множестве прямых;
г) отношение «быть братом» на множестве людей.

Свойство симметричности отношения на множестве легко записать с помощью операций над отношениями: отношение R симметрично тогда и только тогда, когда $R^{-1} \subseteq R$.

Докажите это утверждение самостоятельно.

Если отношение изображено соответствующим ему орграфом, то легко увидеть, будет ли данное отношение симметричным: отношение симметрично тогда и только тогда, когда в соответствующем ему графе для каждой стрелки, ведущей из вершины a в вершину b, есть стрелка, ведущая из вершины b в вершину a. Фактически это означает, что граф является неориентированным.

Определение 3.7. Отношение R на множестве M называется *транзитивным*, если для любых элементов a, b и c множества M из выполнения утверждений aRb и bRc следует справедливость утверждения aRc.

Вот несколько примеров транзитивных отношений:

– на множестве кругов: лежать внутри;
– на множестве целых чисел: делиться нацело;
– на множестве вершин орграфа: быть сильно связанными;
– на множестве сотрудников одной организации: быть начальником.

Определите, какие из следующих отношений транзитивны:

а) отношение подобия на множестве треугольников;

б) отношение «меньше» на множестве натуральных чисел;

в) отношение параллельности на множестве прямых;

г) отношение «быть братом» на множестве людей.

Свойство отношения «быть транзитивным» также можно записать с помощью операций над отношениями.

Теорема 3.2. Отношение R на множестве M транзитивно тогда и только тогда, когда $R^2 \subseteq R$.

Доказательство. Пусть отношение R транзитивно. Проверим, что тогда из $(a, b) \in R^2$ следует $(a, b) \in R$. Действительно, $(a, b) \in R^2$ означает, что существует такой элемент $c \in M$, для которого $(a, c) \in R$ и $(c, b) \in R$. Ввиду транзитивности отношения R получаем $(a, b) \in R$. Тем самым, $R^2 \subseteq R$.

Обратно. Пусть $R^2 \subseteq R$ и для элементов a, b и c выполнено aRb и bRc. По определению умножения отношений это означает, что $(a, c) \in R^2$. Но тогда $(a, c) \in R$ и, следовательно, отношение R транзитивно. □

Определение 3.8. Отношение R на множестве M называется *антисимметричным*, если для любых элементов a и b множества M из выполнения утверждений aRb и bRa следует, что элементы a и b совпадают.

Вот несколько примеров антисимметричных отношений:

– на множестве целых чисел: меньше или равно;
– на множестве всех подмножеств некоторого множества: быть подмножеством;
– на множестве натуральных чисел: делиться нацело.

С помощью операций отношение антисимметричности записывается так: отношение R на множестве M антисимметрично тогда и только тогда, когда $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta$.

Докажите это утверждение самостоятельно.

Если отношение изображено соответствующим ему орграфом, то и в этом случае легко увидеть, будет ли данное отношение антисимметричным: отношение антисимметрично тогда и только тогда, когда в соответствующем ему графе для каждой стрелки, ведущей из вершины a в другую вершину b, нет стрелки, ведущей из вершины b в вершину a.

Пусть в наборе некоторых бинарных отношений на одном и том же множестве каждое из них обладает некоторым свойством. Будет ли тогда этим свойством обладать результат применения к этим отношениям какой-либо операции? Ответ на это вопрос для операции пересечения отношений даёт следующая теорема.

Теорема 3.3. Пересечение любого набора рефлексивных (симметричных, транзитивных, антисимметричных) отношений является рефлексивным (соответственно симметричным, транзитивным, антисимметричным) отношением.

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор транзитивных отношений R_i. Обозначим через R пересечение всех отношений данного набора. Пусть пары (x, y) и (y, z) принадлежат R. Тогда для каждого множества R_i обе эти пары принадлежат R_i. Поскольку каждое отношение R_i транзитивно, пара (x, z) принадлежит каждому множеству R_i, а, значит, принадлежит и их пересечению, т.е. отношению R. Следовательно, отношение R транзитивно. □

✋ Для остальных трёх свойств Теорему 3.2 докажите самостоятельно.

Для объединения отношений ситуация иная.

✋ Исследуйте, для каких из четырёх рассматриваемых нами свойств объединение двух отношений, обладающих данным свойством, также обладает этим свойством.

Рассмотрим операцию обращения отношения.

Теорема 3.4. Отношение, обратное к рефлексивному (симметричному, транзитивному, антисимметричному) отношению является рефлексивным (соответственно симметричным, транзитивным, антисимметричным) отношением.

✋ Докажите Теорему 3.4 самостоятельно для остальных трёх свойств.

6. Отношения эквивалентности

Среди всех бинарных отношений особую роль играют отношения двух видов: отношения эквивалентности и отношения порядка. В этом пункте мы рассмотрим отношения эквивалентности.

Определение 3.9. Отношение на множестве M называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Вот несколько примеров отношений эквивалентности:

– на любом множестве: отношение равенства;
– на множестве треугольников: отношение подобия;
– на множестве действительных чисел: иметь одинаковую целую часть;
– на множестве вершин графа: быть связанными;
– на множестве людей: быть одного года рождения.

Проверьте, что каждое из указанных отношений действительно является отношением эквивалентности. Приведите еще 2 – 3 примера отношений эквивалентности на различных множествах.

Понятие отношения эквивалентности связано с еще одним важным понятием теории множеств – разбиением.

Определение 3.10. *Разбиением* множества M называется его представление в виде объединения непустых непересекающихся подмножеств.

Вот, к примеру, два разбиения множества M = {}:

M = {} ∪ {} и M = {} ∪ {} ∪ {}.

Объясните, почему для множества $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$следующие записи нельзя считать разбиениями множества M:

а) $\{1, 2, 3\} \cup \{5, 4, 3\}$;

б) $\{1, 3\} \cup \{5, 4\}$;

в) $\{1, 2, 3\} \cup \varnothing \cup \{5, 4\}$.

Теорема 3.5. (О разбиении множества) Каждое отношение эквивалентности задаёт разбиение множества, на котором оно определено. Любое разбиение множества задается некоторым отношением эквивалентности.

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение теоремы. Пусть R – отношение эквивалентности на множестве M. Для каждого элемента a из M построим множество $M_a = \{x \mid x \in M \text{ и } xRa\}$. Среди этих множеств могут оказаться одинаковые. Соберём совокупность всех не совпадающих между собой множеств M_a и покажем, что их объединение образует разбиение множества M.

Во-первых, заметим, что каждое множество не пусто, поскольку $a \in M_a$ в силу рефлексивности отношения R.

Во-вторых, объединение всех выбранных нами множеств совпадает с M, поскольку каждый элемент из M попадает в подмножество, отмеченное им самим в роли индекса.

В третьих, покажем, что два различных множества M_a и M_b не пересекаются. Допустим противное: пусть $c \in M_a \cap M_b$. По построению множеств M_a и M_b это означает, что cRa и cRb. Ввиду симметричности отношения R имеем aRc. Выберем теперь произвольный x из M_a. Поскольку xRa и aRc, транзитивность отношения показывает, что xRc. Но при этом cRb. Применяя ещё раз свойство транзитивности, получаем xRb. Это означает, что $x \in M_b$. Поскольку x выбирался произвольным, $M_a \subseteq M_b$. В то же время элементы a и b абсолютно равноправны, поэтому $M_b \subseteq M_a$. Значит, $M_a = M_b$ в противоречии с тем, что выбирались два различных множества.

Пусть теперь имеется некоторое разбиение множества M:

$M = \bigcup\limits_i \{M_i \mid M_i \neq \varnothing$ и $M_i \cap M_j = \varnothing$ при $i \neq j\}$

Определим на M следующее отношение R:

aRb, если найдётся множество M_i, для которого $a \in M_i$ и $b \in M_i$.

Покажем, что R – отношение эквивалентности.

Во-первых, R рефлексивно. По определению объединения множеств каждый элемент a из M попадает хотя бы в одно подмножество M_i. Это означает, что aRa.

Во-вторых, R симметрично. Ясно, что если для пары (a, b) нашлось множество M_i, для которого $a \in M_i$ и $b \in M_i$, то это же множество годится для пары (b, a).

В-третьих, R транзитивно. Пусть a, b и c – такие элементы, что aRb и bRc. Значит, найдётся такое множество M_i, для которого $a \in M_i$ и $b \in M_i$, и такое множество M_k, для которого $b \in M_k$ и $c \in M_k$. Мы видим, что b оказался общим элементом множеств M_i и M_k, а по определению разбиения разные его подмножества общих элементов не имеют. Следовательно, $M_i = M_k$, а тогда aRc.

Ясно также, что отношение R задаёт именно то разбиение, на основании которого оно было построено. □

Пример. На множестве натуральных чисел определим отношение aRb условием $\frac{a-b}{3}$ – целое число (не обязательно положительное!). Проверим, что R – отношение эквивалентности.

Поскольку $\frac{a-a}{3} = 0$ – целое число, R рефлексивно.

Заметим, что $\frac{b-a}{3} = -\frac{a-b}{3}$, следовательно, R симметрично.

Наконец, $\frac{a-c}{3} = \frac{a-b}{3} + \frac{b-c}{3}$, так что из aRb и bRc следует aRc.

Построим разбиение множества натуральных чисел, определяемое этим отношением эквивалентности. Возьмём число 1 и построим множество M_1. Легко понять, что $M_1 = \{1, 4, 7, \ldots\} = \{3k + 1 \mid k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}\}$. Число 2 в M_1 не попало, поэтому построим $M_2 = \{2, 5, 8, \ldots\} = \{3k + 2 \mid k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}\}$. Число 3 не принадлежит $M_1 \cup M_2$, строим $M_3 = \{3, 6, 9, \ldots\} = \{3k \mid k \in \boldsymbol{N}\}$. Легко видеть, что $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = M$. Тем самым, построено разбиение множества M.

Подмножества, фигурирующие в разбиении, нередко называют *классами эквивалентности*, а саму теорему называют теоремой о принципах классификации. Совокупность классов эквивалентности называют *фактор-множеством* множества M по отношению эквивалентности R и обозначают M / R. Класс эквивалентности, в который попадает элемент a обычно обозначают $\overline{a}$ или, если хотят точно указать отношение эквивалентности, a^R.

Какое разбиение произвольного множества задаёт отношение равенства? А универсальное отношение?

Среди примеров отношения эквивалентности фигурировало отношение связанности для вершин графа.

Как для этого отношения называются классы эквивалентности?

7. Отношения порядка

Определение 3.11. Отношение на множестве M называется *отношением порядка*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Вот несколько примеров отношений порядка:

– на множестве прямоугольников: содержаться;
– на множестве действительных чисел: меньше или равно;
– на множестве сотрудников одного учреждения: быть начальником.

Проверьте, что каждое из указанных отношений действительно является отношением порядка. Приведите еще 2 – 3 примера отношений порядка на различных множествах.

Исторически сложилось так, что отношение порядка в литературе обычно называют отношением *частичного порядка*. Мы для краткости слово «частичного» будем опускать.

Определение 3.12. Множество M называется *упорядоченным*, если на нём определено некоторое отношение порядка.

Множество целых чисел упорядочено отношением «меньше или равно», множество подмножеств произвольного множества упорядочено отношением «быть подмножеством». Даже знаки для этих отношений похожи: $\leq$ и $\subseteq$. Удобно и для произвольного отношения порядка иметь какой-то похожий значок. Например, такой: $\trianglelefteq$.

Определение 3.13. Элементы a и b множества M, упорядоченного отношением $\trianglelefteq$, называются *сравнимыми*, если $a \trianglelefteq b$ или $b \trianglelefteq a$.

Что можно сказать об элементах a и b, если одновременно $a \trianglelefteq b$ и $b \trianglelefteq a$?

В упорядоченном множестве нередко интересуются, так сказать, крайними элементами, т.е. такими, для которых уже нет меньших элементов или, наоборот, больших.

Определение 3.14. Элемент a множества M, упорядоченного отношением $\trianglelefteq$, называется *минимальным*, если в M не существует элемента b, не равного a, для которого $b \trianglelefteq a$.

Пример 1. В множестве неотрицательных действительных чисел, упорядоченном отношением $\leq$, минимальным элементом является число 0. Множество положительных действительных чисел, упорядоченное отношением $\leq$, минимальных элементов нет.

Пример 2. Естественно считать точку окружностью нулевого радиуса – ведь это множество всех точек, удаленных от заданной точки на расстоянии 0. На множестве всевозможных окружностей (включая окружности нулевого радиуса) рассмотрим отношение «одна окружность лежит внутри другой или совпадает с ней». Легко проверить, что это отношение порядка и любая точка является минимальным элементом этого множества. Если это же отношение рассмотреть на множестве окружностей ненулевого радиуса, то такое множество минимальных элементов иметь не будет.

Эти примеры показывают, что упорядоченное множество может не иметь минимальных элементов, может иметь один минимальный элемент, а может иметь несколько (и даже бесконечно много) минимальных элементов.

Сформулируйте определение максимального элемента множества, упорядоченного некоторым отношением $\trianglelefteq$. Приведите примеры упорядоченных множеств с максимальными элементами.

Определение 3.15. Элемент a множества M, упорядоченного отношением $\trianglelefteq$, называется *наименьшим*, если для любого элемента b из M выполнено $a \trianglelefteq b$.

Пример 3. В множестве неотрицательных действительных чисел, упорядоченном отношением $\le$, число 0 является наименьшим элементом.

Пример 4. На множестве всевозможных окружностей (включая окружности нулевого радиуса), упорядоченном отношением «одна окружность лежит внутри другой или совпадает с ней», нет наименьшего элемента.

Пример 4 показывает различие понятий «минимальный элемент» и «наименьший элемент»: минимальные элементы в множестве есть, а наименьшего нет. Следующая теорема также свидетельствует о различии этих понятий.

Теорема 3.6. (О единственности наименьшего элемента) Если упорядоченное множество обладает наименьшим элементом, то только одним.

Доказательство. Пусть a – некоторый наименьший элемент множества M, упорядоченного отношением $\trianglelefteq$. Предположим, что существует другой наименьший элемент; обозначим его b. По определению наименьшего элемента $a \trianglelefteq b$ и $b \trianglelefteq a$. В силу антисимметричности отношения $\trianglelefteq$ получаем, что $a = b$ в противоречии с выбором элемента b. □

Как видно из примера 2, минимальных элементов может быть сколько угодно.

Тем не менее, понятия «минимальный элемент» и «наименьший элемент», можно сказать, родственники.

Теорема 3.7. (О минимальности наименьшего элемента) Всякий наименьший элемент упорядоченного множества является минимальным.

Доказательство. Пусть a – некоторый наименьший элемент множества M, упорядоченного отношением $\trianglelefteq$. Предположим, что он не является минимальным. Тогда существует элемент b, отличный от a, для которого $b \trianglelefteq a$. В то же время по определению наименьшего элемента $a \trianglelefteq b$. В силу антисимметричности отношения $\trianglelefteq$ получаем, что $a = b$ в противоречии с выбором элемента b. □

Сформулируйте определение наибольшего элемента множества, упорядоченного некоторым отношением $\trianglelefteq$. Приведите примеры упорядоченных множеств, имеющих наибольший элемент. Сформулируйте и докажите для максимальных элементов теоремы, аналогичные теоремам

3.6 и 3.7.

Для отношений порядка тоже используют изображения в виде графа, но строят его для другого отношения, тесно связанного с заданным отношением порядка.

Определение 3.16. Говорят, что элемент a множества M, упорядоченного отношением $\trianglelefteq$, непосредственно предшествует элементу b, если a и b различны, $a \trianglelefteq b$ и не существует элемента c, также отличного от a и b, для которого $a \trianglelefteq c$ и $c \trianglelefteq b$.

Это отношение не обладает ни одним из четырёх свойств, но именно его удобно использовать для построения наглядного представления отношения порядка. Совсем легко нужный граф строится, если множество M конечно. Сначала строят множество точек (вершин будущего графа), обозначенных максимальными элементами множества M. Ниже изображают ряд точек, обозначенных элементами, предшествующими элементам предыдущего ряда. Элементы, связанные отношением непосредственного предшествования, соединяют ребром. Ниже изображают ряд точек, обозначенных элементами, предшествующими элементам предыдущего ряда, и снова элементы, связанные отношением непосредственного предшествования, соединяют ребром. И так далее, пока не появятся минимальные элементы, у которых непосредственно предшествующих, разумеется, нет. Построенный таким образом граф называют *диаграммой Хассе* данного отношения порядка.

Конечно, диаграмму Хассе можно строить не «сверху вниз», как это описано выше, а «снизу вверх», начиная с минимальных элементов.

Пример 5. Пусть $A = \{a, b, c\}$, множество $M = \mathcal{B}(A)$. На множестве M рассматривается отношение $\subseteq$. Минимальным (и даже наименьшим) элементом множества M, очевидно, является $\varnothing$. Оно непосредственно предшествует каждому из одноэлементных множеств $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$. Те в свою очередь непосредственно предшествуют двухэлементным множествам. И наконец, каждое двухэлементное множество непосредственно предшествует множеству A. Тем самым, диаграмма Хассе данного отношения будет выглядеть так, как показано на рисунке 3.3.

Диаграмму Хассе естественно рассматривать как ориентированный граф, хотя направление на рёбрах этого графа обычно не указывают ввиду очевидности.

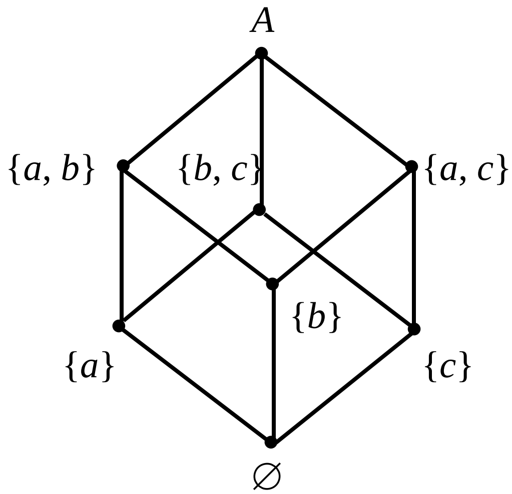

Рис. 3.3. Диаграмма Хассе для булеана трёхэлементного множества

Сформулируйте, как по диаграмме Хассе (как орграфу) для разных элементов a и b данного упорядоченного множества определить,
а) находится ли элемент a с элементом b в данном отношении;
б) сравнимы ли элементы a и b .

Определение 3.17. Отношение порядка на множестве M называется *линейным*, если любые два элемента этого множества сравнимы.

Одним из важнейших примеров линейного порядка является отношение «меньше или равно» на любом подмножестве множества действительных чисел.

Как выглядит диаграмма Хассе линейно упорядоченного множества?

8. Взаимосвязь между отношениями и предикатами

Пусть на совокупности множеств M_1, M_2, …, M_n задано некоторое отношение R. Тогда можно определить предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ правилом

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R.$$

И наоборот, если есть некоторый предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определённый на $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, то множество $R = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1\}$ является отношением на совокупности множеств M_1, M_2, …, M_n. Напомним, что множество R называют *областью истинности предиката* P.

Пусть P_1 и P_2 – предикаты на $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, а R_1 и R_2 – соответствующие им отношения. Запишите с помощью операций над R_1 и R_2 области истинности предикатов а) $P_1 \,\&\, P_2$; б) $P_1 \vee P_2$; в) $P_1 \to P_2$.

Как мы видим, что отношения и предикаты – родственные понятия. Говоря о предикате, всегда полезно иметь в виду связанное с ним отношение, и наоборот.

Задания для самостоятельной работы

1. Пусть $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{a; b; c; d\}$, $C = \{+; –; /\}$, $R_1 \subseteq A \times B$; $R_2 \subseteq B \times C$ такие, что $R_1 = \{(1; a); (1; d); (2; c); (3; d); (3; c)\}$, $R_2 = \{(a; +); (b; /); (d; –); (d; /)\}$. Вычислите $R_1 \circ R_2$ и $R_1 \circ R_1^{-1}$.

2.[Т] На множестве $\{1; 2; 3\}$ задано отношение $R = \{(1; 1); (1; 2); (2; 3)\}$. Вычислите а) $R \cup \Delta$, б) $R \cup R^{-1}$, в) $R \cap R^{-1}$, г) R^2, д) R^3.

3. На множестве $\{a; b; c\}$ найдите два бинарных отношения R_1 и R_2, для которых $R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$.

4. В базе данных соревнования по метанию копья хранится в табличной форме отношение R_1 «Результаты жеребьевки», в котором указываются фамилия с инициалами и полученный при жеребьёвке номер:

Константинов С.В.	1
Павлов У.Р.	2
Семенов М.С.	3
Туров Ф.П.	4
…	…

Результаты спортсменов после очередной попытки также фиксируется в виде отношения R_2 «Результаты попытки», в котором указываются номер спортсмена и его результат:

1	85,97 м
2	90,32 м
3	–
4	87,48
…	…

Каков смысл произведения отношений R_1 и R_2?

5. Верно ли каждое из следующих равенств

а) $(R_1 \cup R_2) \circ R_3 = (R_1 \circ R_3) \cup (R_2 \circ R_3)$;

б) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) = (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

для бинарных отношений R_1, R_2, R_3, определённых на тех множествах, где можно выполнять соответствующие операции над этими отношениями? Ответ «Да» надо обосновать, ответ «Нет» аргументировать приведением примера.

6. Верно ли каждое из следующих равенств

а) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;

б) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$

для бинарных отношений R_1 и R_2, определённых на произвольном множестве M? Ответ «Да» надо обосновать, ответ «Нет» аргументировать примером.

7. Докажите, что для бинарного отношения R на множестве M из $R^{-1} \subseteq R$ следует $R^{-1} = R$.

8. Верно ли, что для любого бинарного отношения R на множестве M

а) отношение $R^{-1} \cup R$ симметрично;

б) отношение $R^{-1} \cap R$ симметрично?

Ответ да, надо обосновать, ответ нет аргументировать приведением примера.

9.[Т] Укажите, какими свойствами обладает каждое из отношений R_1, R_2 и R_3, заданных на множестве слов русского языка:

а) $x\ R_1\ y$ означает, что слова x и y не имеют ни одной общей буквы;

б) $x\ R_2\ y$ означает, что слова x и y имеют по крайней мере одну общую букву;

в) $x\ R_3\ y$ означает, что всякая буква, входящая в запись слова x, имеется в записи слова y.

10. На множестве $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ задано отношение $R = \{(1;\ 1);\ (1;\ 2);\ (2;\ 3), (1;\ 3);\ (4;\ 3)\}$.

а)[Т] Укажите какими свойствами обладает это отношение.

б) Изобразите это отношение в виде орграфа.

11. На множестве точек координатной плоскости задано отношение: $(a, b)\ R\ (c, d)$, если $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Докажите, что R – отношение эквивалентности, и изобразите на координатной плоскости класс эквивалентности, которому принадлежит точка $(3, 4)$.

12. Изобразите орграф отношения эквивалентности, задающего разбиение множества M на следующие подмножества: $\{1;\ 4;\ 5\}$, $\{2;\ 6;\ 8\}$ и $\{3;\ 7\}$.

13. Корневое дерево можно рассматривать как диаграмму Хассе для множества его вершин. Какими элементами в этом множестве являются листья данного дерева? А корень?