

§2. Синхронизируемые автоматы

История особняка с привидениями.

Певун и Хохотун – два привидения. Певун может петь или молчать.

Хохотун может хохотать или молчать.

Хозяин особняка либо начинает играть на оргáne, либо зажигает ладан, либо одновременно зажигает ладан и играет на оргáne, либо ничего не делает. В каждом из четырех случаев привидения реагируют определенным образом.

действия хозяина	Певун молчит и Хохотун молчит	Певун поет и Хохотун молчит	Певун молчит и Хохотун хохочет	Певун поет и Хохотун хохочет
ничего	Хохотун хохочет	без изменения	без изменения	Хохотун молчит
оргán без ладана	без изменения	Хохотун хохочет	Хохотун молчит	без изменения
ладан без оргána	Певун поет и Хохотун хохочет	Певун молчит	без изменения	Хохотун молчит
оргán и ладан	Певун поет	Певун молчит и Хохотун хохочет	Хохотун молчит	без изменения

Вопрос: можно ли придумать ритуал, чтобы все привидения замолчали?

Рассмотрим конечный автомат, имеющий следующие состояния:

00 – оба привидения молчат;

10 – Певун поет и Хохотун молчит;

01 – Певун молчит и Хохотун хохочет;

11 – Певун поет и Хохотун хохочет.

Обозначим буквами a, b, c, d действия хозяина особняка:

a – ничего;

b – оргán без ладана;

c – ладан без оргána;

d – оргán и ладан.

	00	10	01	11
a	01	10	01	10
b	00	11	00	11
c	11	00	01	10
d	10	01	00	11

Для поставленной задачи неважно, какое состояние считать начальным, какие состояния считать заключительными.

Поэтому мы рассматриваем автомат как набор (Q, Σ, φ) .

Вопрос: существует ли слово, по которому из любого состояния автомат переходит в состояние 00?

Ответ: асб.

Опр. Автомат (Q, Σ, φ) называется синхронизируемым, если существует слово $w \in \Sigma^*$ и существует состояние t , такие, что $\varphi(q, w) = t$ для любого состояния q .

Синхронизирующим словом называется это слово w .

Говорят, что w синхронизирует автомат к состоянию t .

Замечание: в моноиде переходов синхронизирующему слову w соответствует отображение ранга 1, т.е. константное отображение.

Пример, показывающий существование не синхронизируемого автомата.

	a	b
1	2	3
2	3	1
3	1	2

Однобуквенным словам a и b соответствуют перестановки на $\{1, 2, 3\}$. Моноид переходов, порожденный перестановками, будет содержать только перестановки, и не будет содержать константного отображения.

Утверждение. Если автомат синхронизируем, то хотя бы одна из букв соответствует отображению, не являющемуся перестановкой.

Теорема (без док-ва). Автомат (Q, Σ, φ) синхронизируем \Leftrightarrow
 $\forall q, q' \in Q \exists w \in \Sigma^* : \varphi(q, w) = \varphi(q', w)$.

Теорема (без док-ва). Пусть A – синхронизируемый ДКА. Тогда язык всех его синхронизирующих слов – регулярный.

Утверждение. Пусть w синхронизирует A . Тогда $\forall x, y \in \Sigma^*$ слово xwy тоже синхронизирует A .

Проблема: для синхронизируемого автомата найти самое короткое синхронизирующее слово, или дать оценку его длины.

Гипотеза Черни. Любой синхронизируемый ДКА с n состояниями синхронизируется словом длины $(n - 1)^2$.

Замечание: гипотеза не доказана и не опровергнута до настоящего времени.