Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, III семестр (II курс)

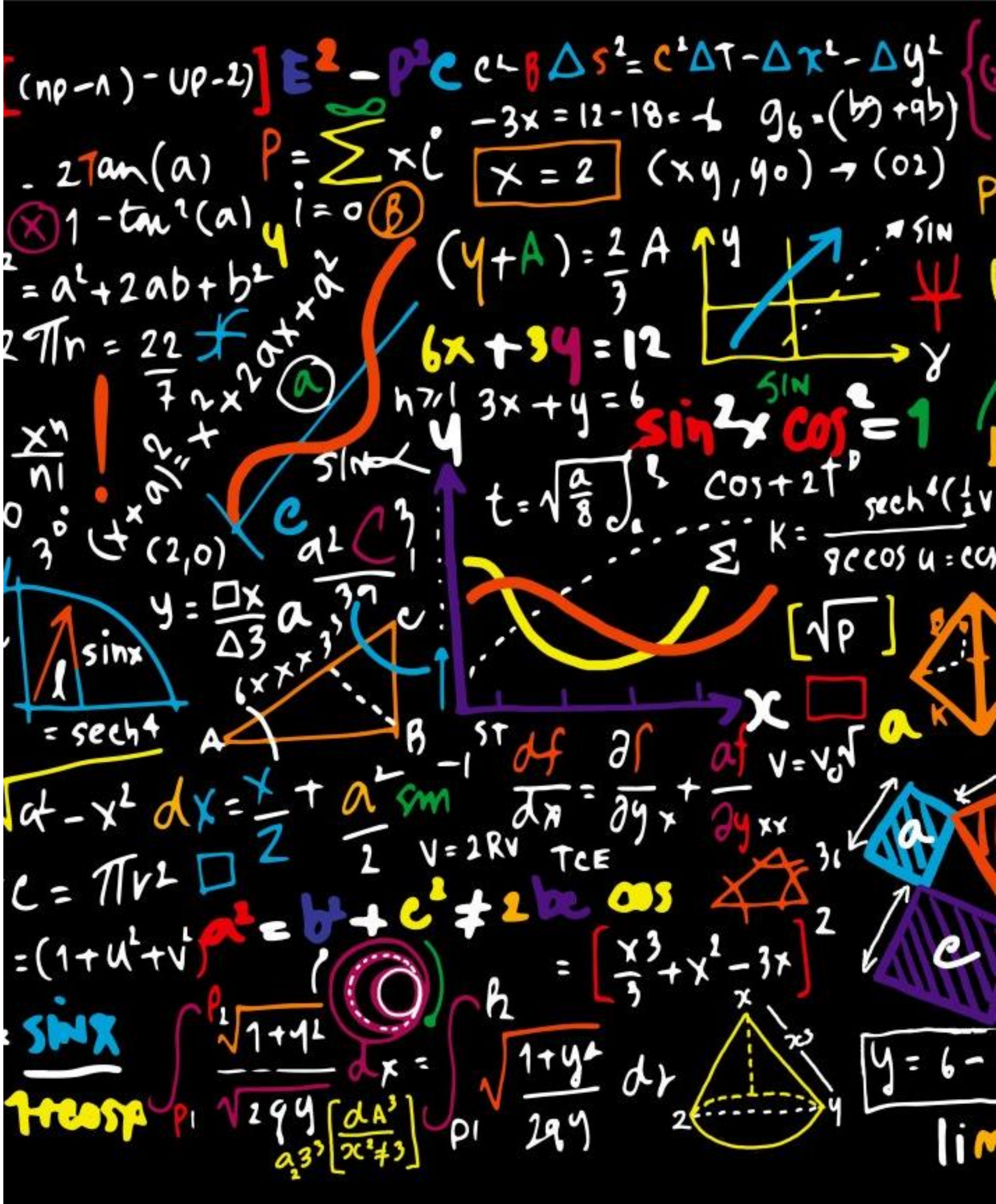
Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция (дополн.)

Тригономе-тригонометрические ряды Фурье



Лекция (дополнительная)
Тригонометрические ряды Фурье

1. Тригонометрические ряды.
2. Понятие ряда Фурье.
3. Пример разложения функции в ряд Фурье.
4. Обобщение рядов Фурье.
5. Приложения рядов Фурье.

Определение тригонометрического ряда

Опр. Ряд вида

$$\boxed{(1)\quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)}$$

называется тригонометрическим,

а значения a_0, a_n, b_n – коэффициентами тригонометрического ряда.

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

<u>Теорема 1 (единственность разложения в тригонометрический ряд).</u>

Если сумма ряда (1) равна функции $f(x), x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(2)\quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R}}$$

и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся,

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

то справедливы следующие равенства

$$\boxed{\text{(I)}\quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}$$

$$\boxed{\text{(II)}\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx}$$

$$\boxed{\text{(III)}\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx dx}$$

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

Доказательство.

Проинтегрируем равенство (2) в пределах от $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx$$

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

Без доказательства примем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx$$

«Интеграл от ряда равен ряду от интегралов»

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

Таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \sin nxdx$$

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

Заметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\frac{a_0}{2}\pi = a_0\pi$$

Далее,

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = a_n \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

$$= a_n\left(\frac{\sin n\pi}{n} - \frac{\sin(-n\pi)}{n}\right) = 0$$

Аналогично (упр.), $\int\limits_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx = 0$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0 + 0 + 0 = \pi a_0$$

Отсюда получаем формулу (I).

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

Ряд (2) можно переписать как

$$(2') \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R}$$

Домножим ряд (2) на $(2')$ на $\cos nx$:

$$(2'') \quad f(x) \cdot \cos nx = \frac{a_0}{2} \cos nx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx \cdot \cos nx + b_k \sin kx \cdot \cos nx)$$

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

И снова проинтегрируем полученное равенство в пределах от $-\pi$ до π:

$$(2'') \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos nx\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kx\cdot\cos nx\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} a_k \sin kx\cdot\cos nx\,dx$$

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

Хорошо известно (упр.), что для любого $m \in \mathbb{Z}$

$$(*)\quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\,dx = 0$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos nx\,dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0$$

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

Рассмотрим при $k \neq n$ интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(k+n)x + \cos(k-n)x \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k+n)x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k-n)x \, dx \right) = [(*)] = 0$$

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

Рассмотрим при $k = n$ тот же интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1+\cos 2nx\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2n} \sin 2nx\Big|_{-\pi}^{\pi} \right) =$$

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

$$= \frac{1}{2}\left((\pi - (-\pi)) + \frac{1}{2n}\left(\cancel{\sin 2\pi n} - \sin\cancel{(-2\pi n)}\right) \right) = \pi$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos kx \cdot \cos nx \, dx =$$

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

$$=\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx dx + a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos nx\, dx =$$

$$=0 + a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = a_n\pi$$

Единственность разложения функции в тригонометрический ряд

Аналогично, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} a_k \sin kx \cdot \cos nx \, dx = 0$

Отсюда следует формула (II).

Аналогично доказывается формула (III) (упр.).

Определение тригонометрического ряда Фурье

<u>Опр.</u> Тригонометрический ряд вида

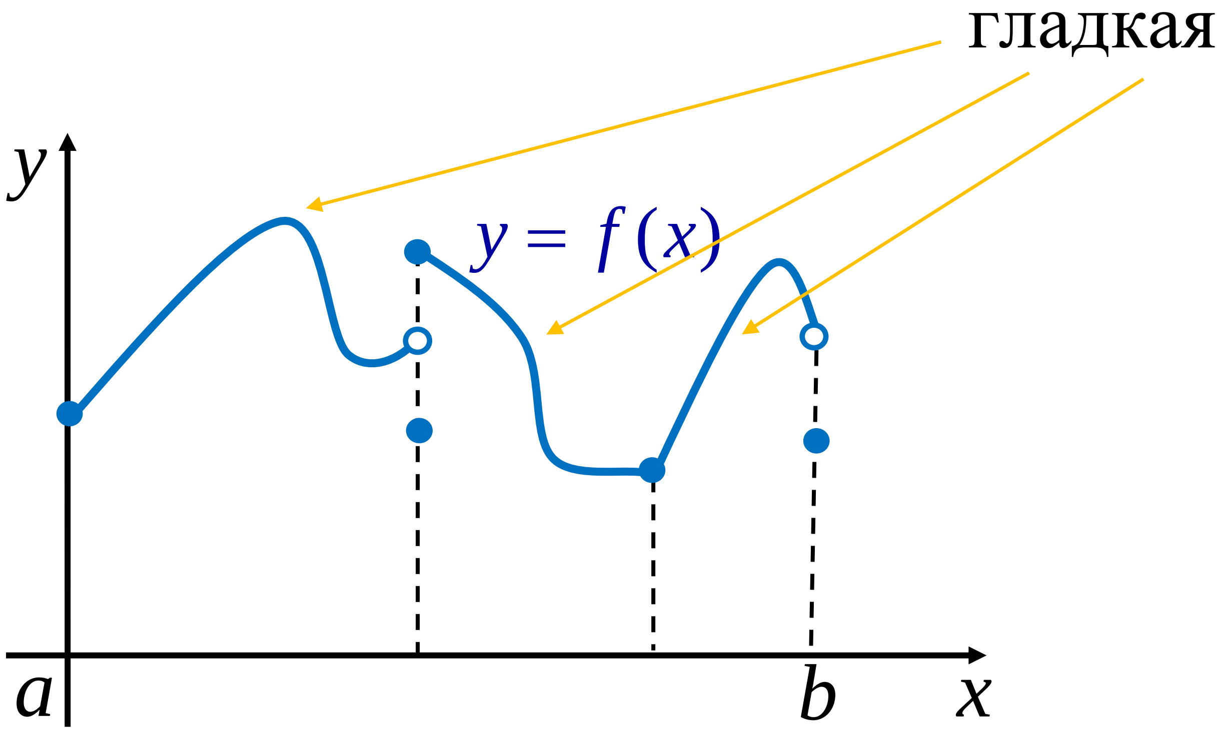
$$\boxed{(1)\quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)}$$

у которого коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляется по формулам (I), (II), (III), называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ (определенной и интегрируемой на $[-\pi,\pi]$).

Определение кусочно-гладкой функции

Опр. Функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой на отрезке $[a, b]$, если отрезок $[a, b]$ можно **разбить на интервалы** так, что на каждом интервале функция **гладкая** (т.е. непрерывно-дифференцируемая).

Кусочно-гладкая функция. Иллюстрация



Основная теорема о сходимости ряда Фурье

Теорема 2 (о сходимости ряда Фурье).

Если **всюду определенная, периодическая** с периодом $\boldsymbol{T = 2\pi}$ функция $f(x)$ является **кусочно-гладкой** на отрезке $[-\pi, \pi]$ и либо **непрерывна** на $\mathbb{R}$, либо имеет на $\mathbb{R}$ **разрывы только первого рода,** то

- ее ряд Фурье **сходится в каждой точке** $x \in \mathbb{R}$,
- причем для суммы

Основная теорема о сходимости ряда Фурье

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

этого ряда выполняются равенства

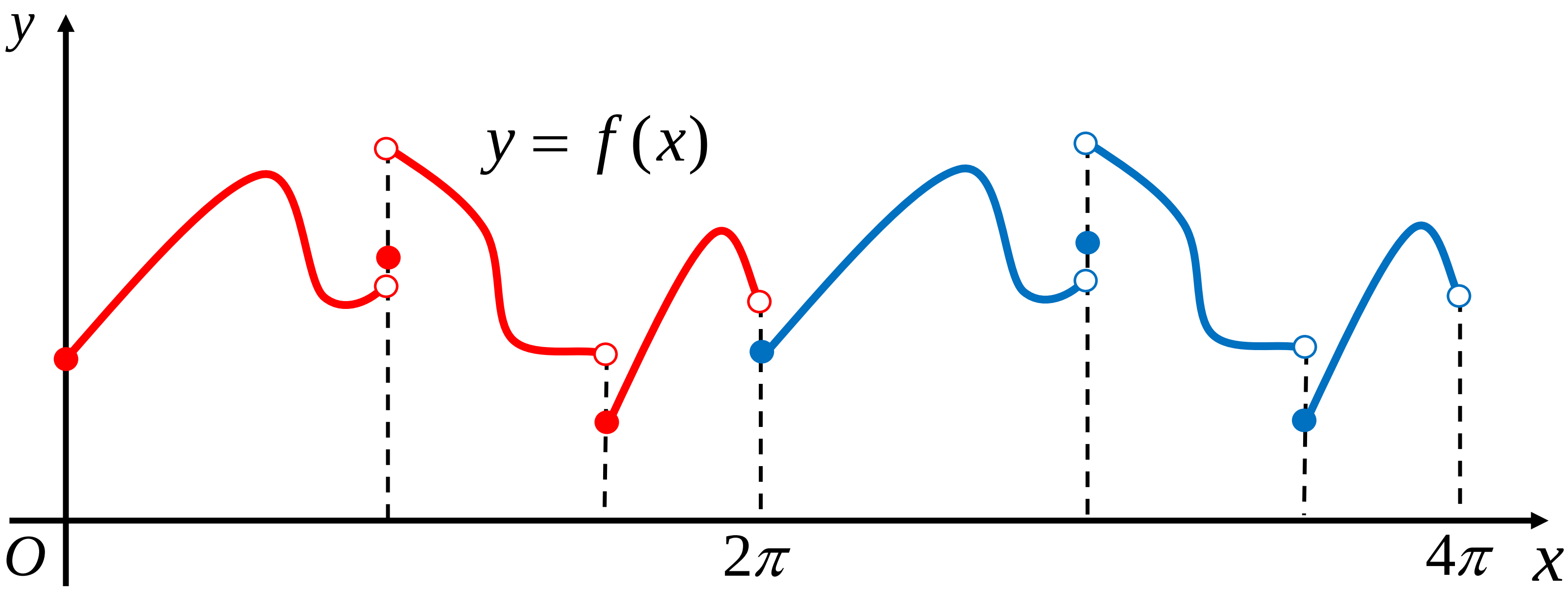
1) $S(x)=f(x)$

для точек $x\in\mathbb{R}$ непрерывности функции $f(x)$.

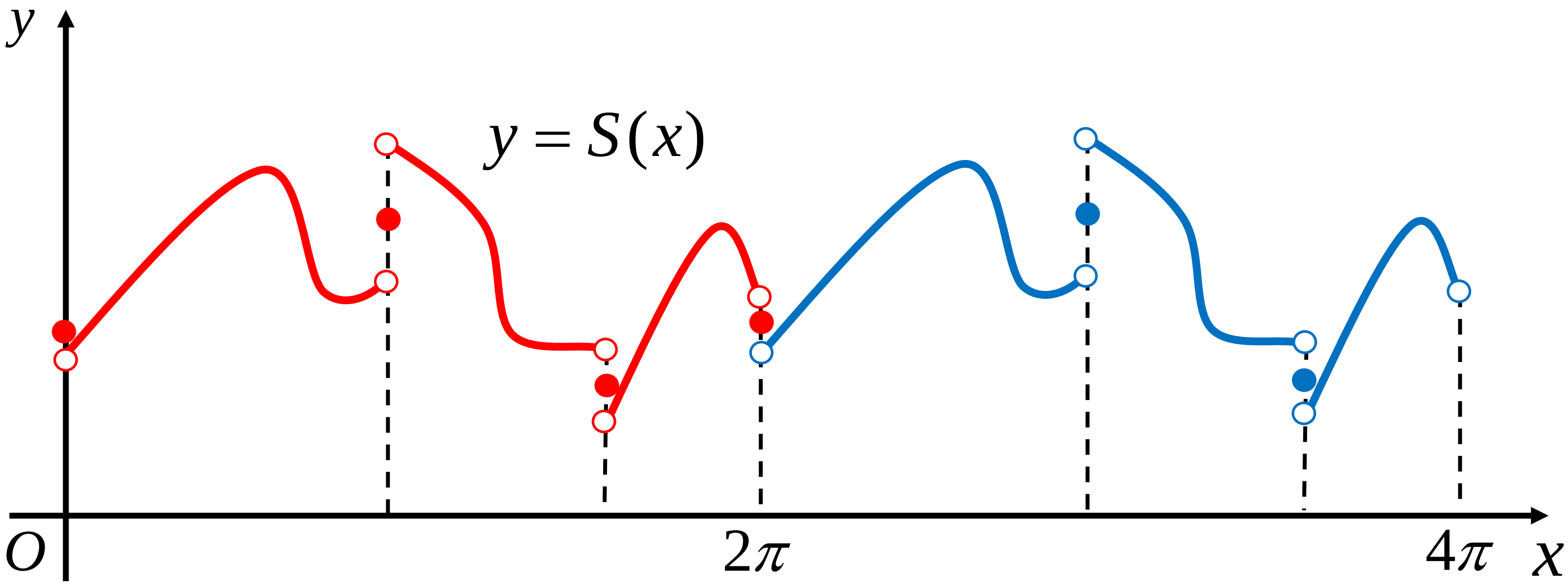
2) $S(x)=\dfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$

для точек $x\in\mathbb{R}$, являющихся точками разрыва (первого рода) функции $f(x)$.

Основная теорема о сходимости ряда Фурье. Иллюстрация



Основная теорема о сходимости ряда Фурье. Иллюстрация



Следствие из основной теорема о сходимости ряда Фурье

Следствие 1 (из теоремы о сходимости ряда Фурье).

Если **всюду определенная, периодическая** с периодом $\boldsymbol{T = 2\pi}$, **непрерывная** на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ является **кусочно-гладкой** на $[-\pi, \pi]$, то

- ее ряд Фурье **сходится в каждой точке** $x \in \mathbb{R}$,

Основная теорема о сходимости ряда Фурье

- причем для суммы

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

этого ряда выполняется равенство $S(x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Сходимость ряда Фурье. Задача 1

Задача 1. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 2\pi$ функцию

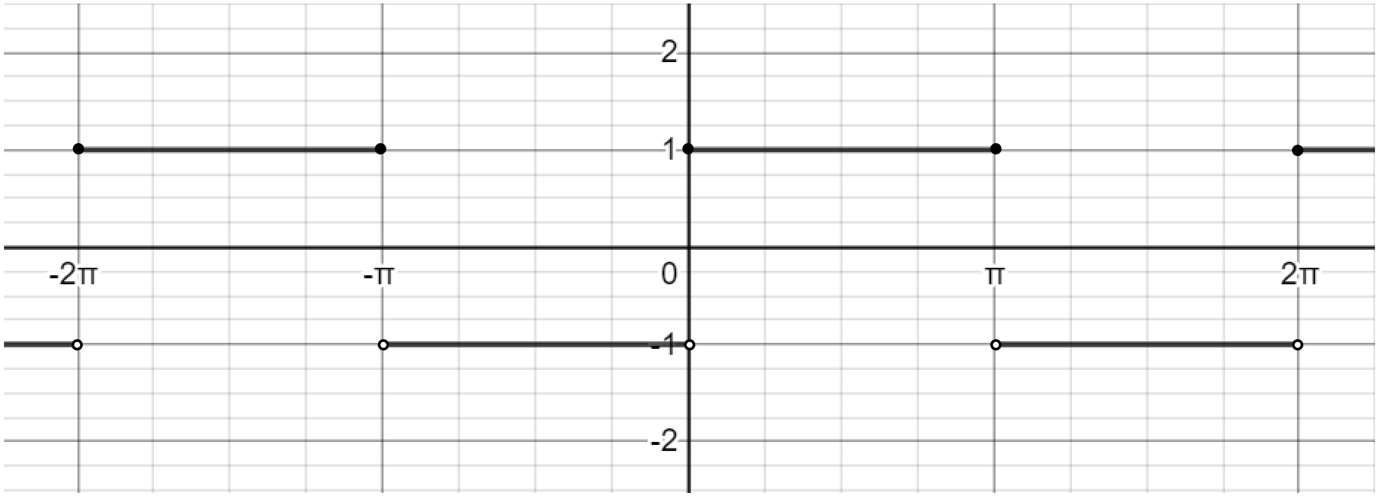
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \pi], \\ -1, & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

Решение.

Функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на $[-\pi, \pi]$, периодической с периодом $T = 2\pi$ и имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода.

Следовательно, по теореме 1 ее ряд Фурье сходится.

Сходимость ряда Фурье. Задача 1



$y = f(x)$

Сходимость ряда Фурье. Задача 1

Найдем коэффициенты ее ряда Фурье.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{\pi} 1dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left((-1)\cdot x\Big|_{-\pi}^{0} + x\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big((-1)\cdot(0-(-\pi)) + (\pi - 0)\Big) = 0$$

Сходимость ряда Фурье. Задача 1

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos nx\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

Сходимость ряда Фурье. Задача 1

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\left(\frac{\cancel{\sin 0}}{\cancel{n}}-\frac{\sin(-n\pi)}{n}\right)+\left(\frac{\sin n\pi}{n}-\frac{\cancel{\sin 0}}{\cancel{n}}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin n\pi}{n}+\frac{\sin n\pi}{n}\right)=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\sin nx dx+\int\limits_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx\, dx\right)=$$

Сходимость ряда Фурье. Задача 1

$$=\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{\cos 0}{n}-\frac{\cos(-n\pi)}{n}\right)-\left(\frac{\cos n\pi}{n}-\frac{\cos 0}{n}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(2-2\cos n\pi\right)=$$

Сходимость ряда Фурье. Задача 1

$$=\left[\cos n\pi=\begin{cases}1, \text{если } n-\text{четное}\\ -1, \text{если } n-\text{нечетное}\end{cases}\right]=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(2-2\cos n\pi\right)=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, \text{если } n-\text{нечетное}\\ 0, \text{если } n-\text{четное}\end{cases}$$

Сходимость ряда Фурье. Задача 1

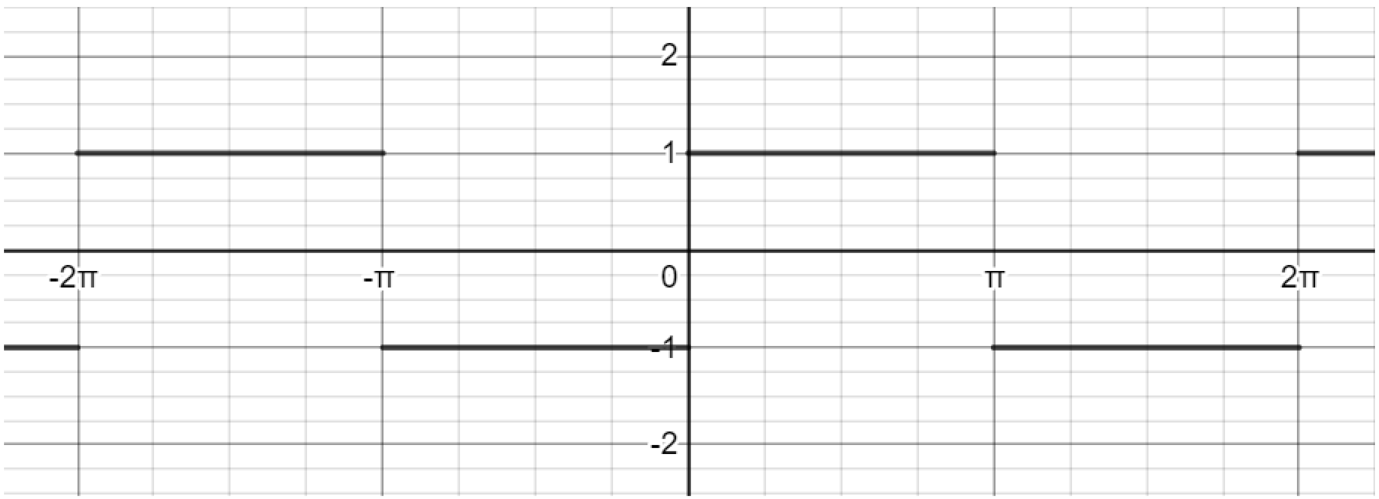
$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\Rightarrow$$

$$\boxed{S(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\dots\right)}$$

$$\boxed{S(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}}$$

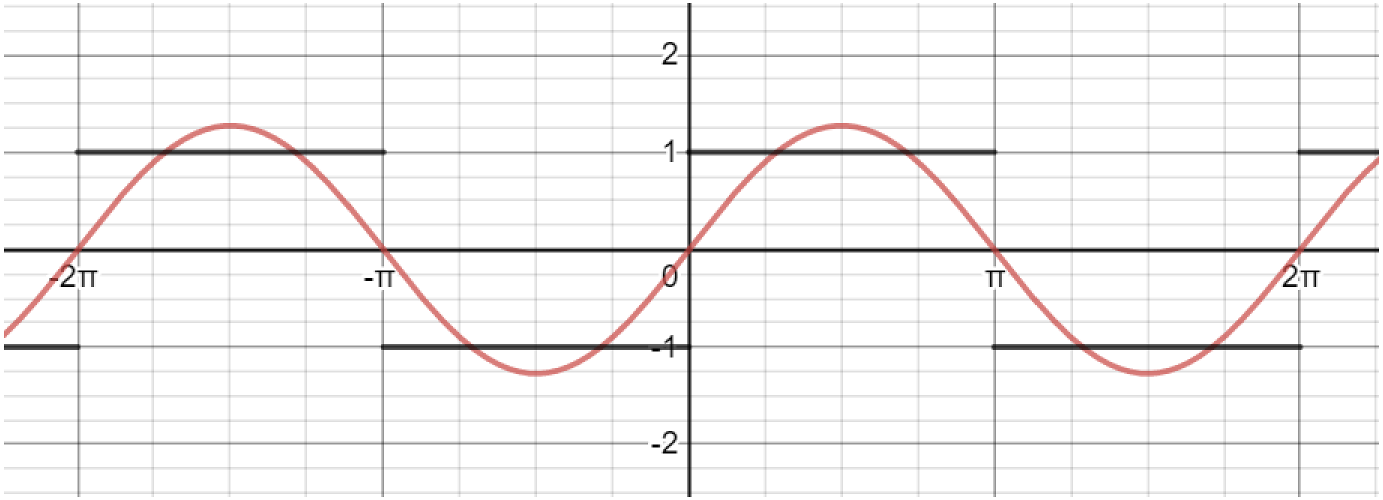
Равенство справедливо для любого $x\in\mathbb{R}$.

Задача 1. Иллюстрация



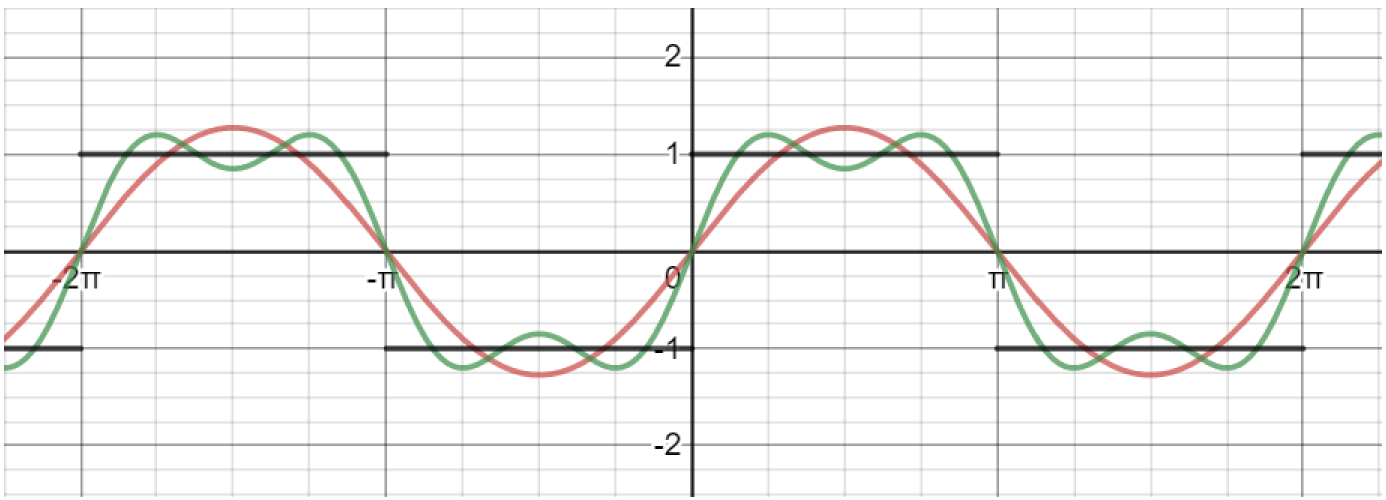
$y = f(x)$

Задача 1. Иллюстрация



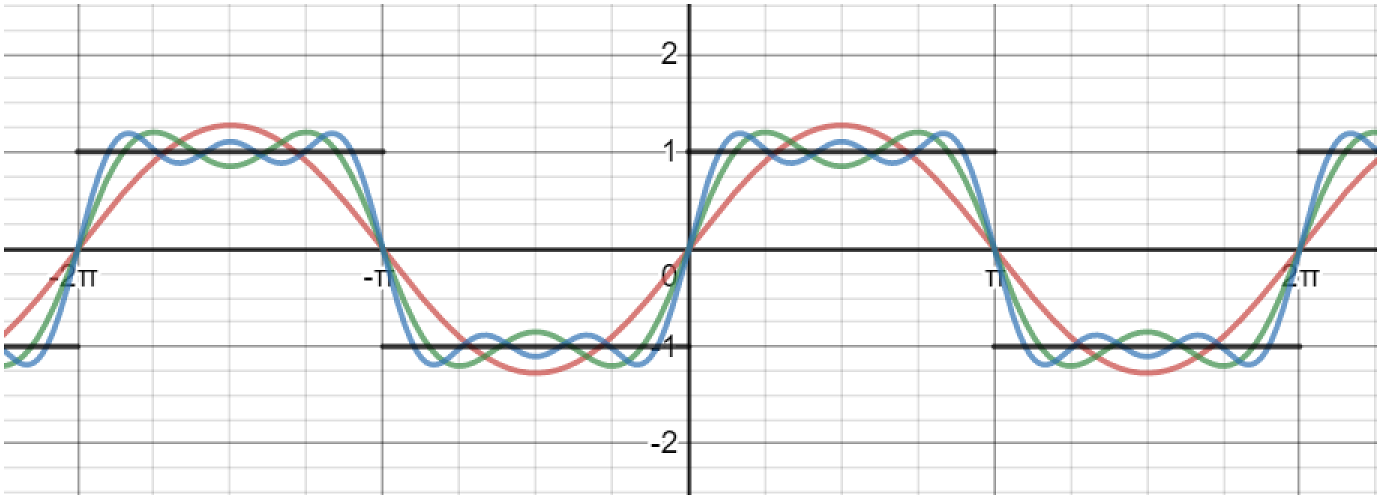
$$y = \frac{4}{\pi}\sin x$$

Задача 1. Иллюстрация



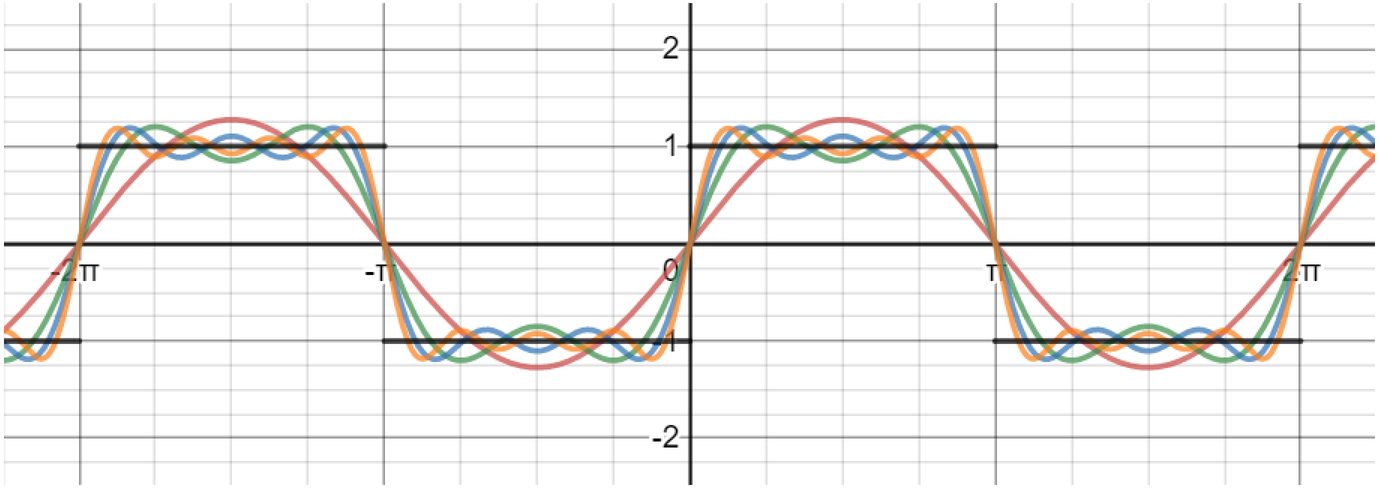
$$y = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right)$$

Задача 1. Иллюстрация



$$y = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}\right)$$

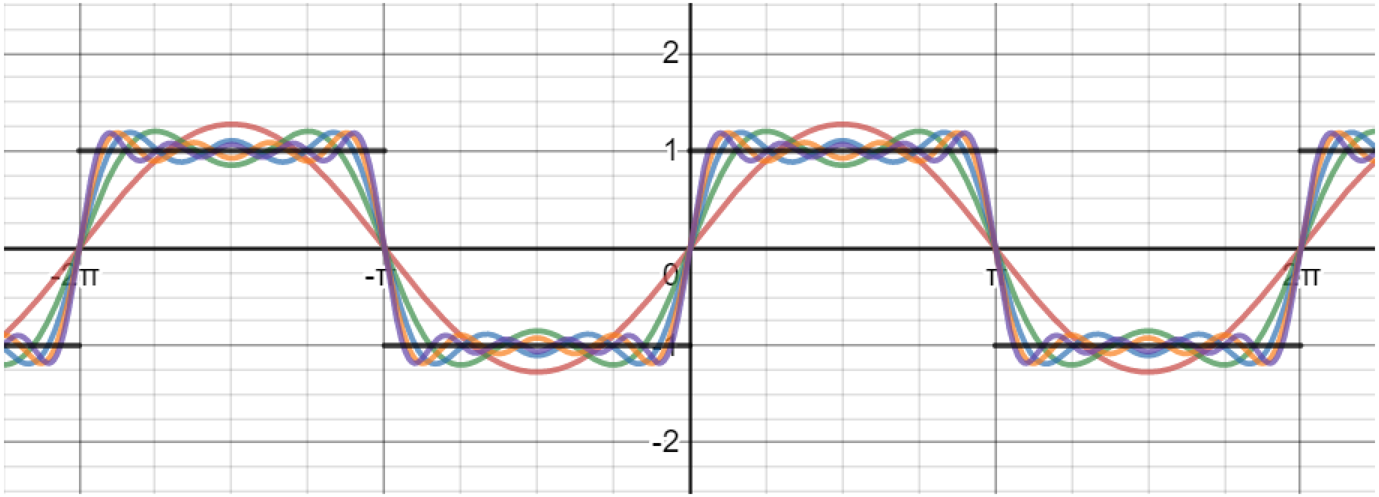
Задача 1. Иллюстрация



$$y=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}\right)$$

Этот слайд можно не конспектировать

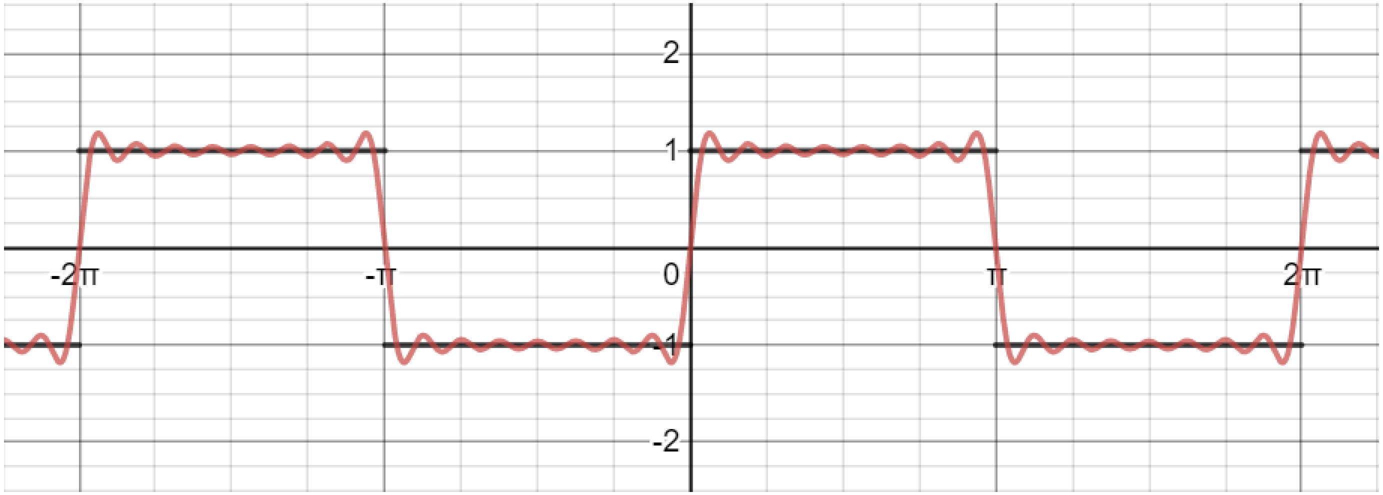
Задача 1. Иллюстрация



$$y=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}\right)$$

Этот слайд можно не конспектировать

Задача 1. Иллюстрация



$$y=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\frac{\sin 11x}{11}+\frac{\sin 13x}{13}+\frac{\sin 15x}{15}\right)$$

Этот слайд можно не конспектировать

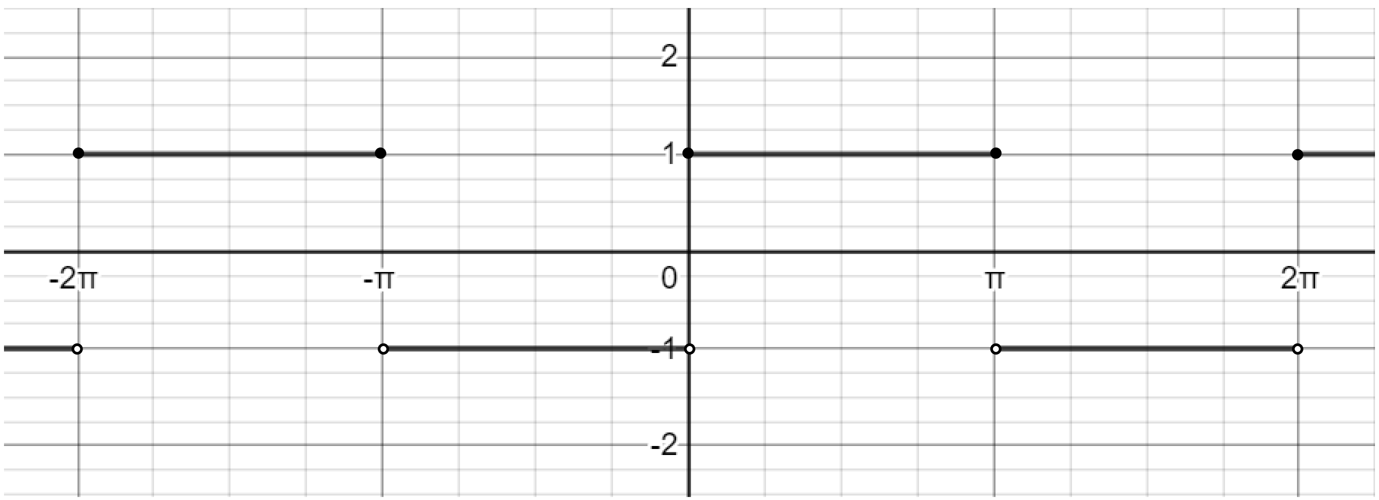
Сходимость ряда Фурье. Задача 1

Функция $f(x)$ непрерывна для любого $x \neq \pi n$. Следовательно, по теореме 1

1) $S(x) = f(x)$ для любого $x \neq \pi n$;

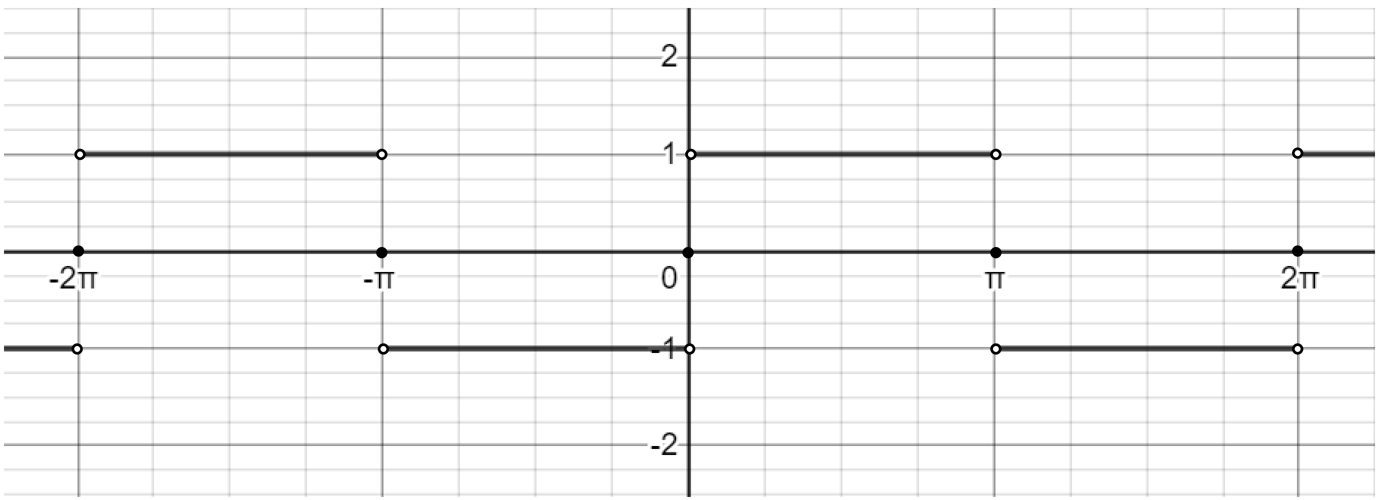
2) $S(x) = \dfrac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] =$
$= \dfrac{1}{2}[(-1) + 1] = 0$ для любого $x = \pi n$.

Сходимость ряда Фурье. Задача 1



$y = f(x)$

Сходимость ряда Фурье. Задача 1



$y = S(x)$

Обобщение рядов Фурье

Теория рядов Фурье справедлива не только для отрезка $[-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}]$ для периодических с периодом $\boldsymbol{T = 2\pi}$ функций, но и для отрезка $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ для периодических функций с периодом $\boldsymbol{T = 2l = b - a}$.

Тригонометрический ряд Фурье тогда имеет вид

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\cos\frac{\pi}{l}nx + b_n \sin\frac{\pi}{l}nx\right)}$$

Обобщение рядов Фурье

А его коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cdot\cos\frac{\pi}{l}nxdx}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cdot\sin\frac{\pi}{l}nxdx}$$

Применение рядов Фурье

Ряды Фурье применяются

- для **аппроксимации** (приближения) **периодических кусочно-гладких** с **разве лишь разрывами первого рода** функций частичной суммой **ряда периодических дифференцируемых функций**.
- для **аналитического задания** функции, заданной табличным или графическим способом.

Применение рядов Фурье

- Для **частотного, фазового, амплитудного** анализа и синтеза **сигналов** в электротехнике, радиотехнике, медицине,…
- Для решения **уравнений математической физики.**