Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, III семестр (II курс)

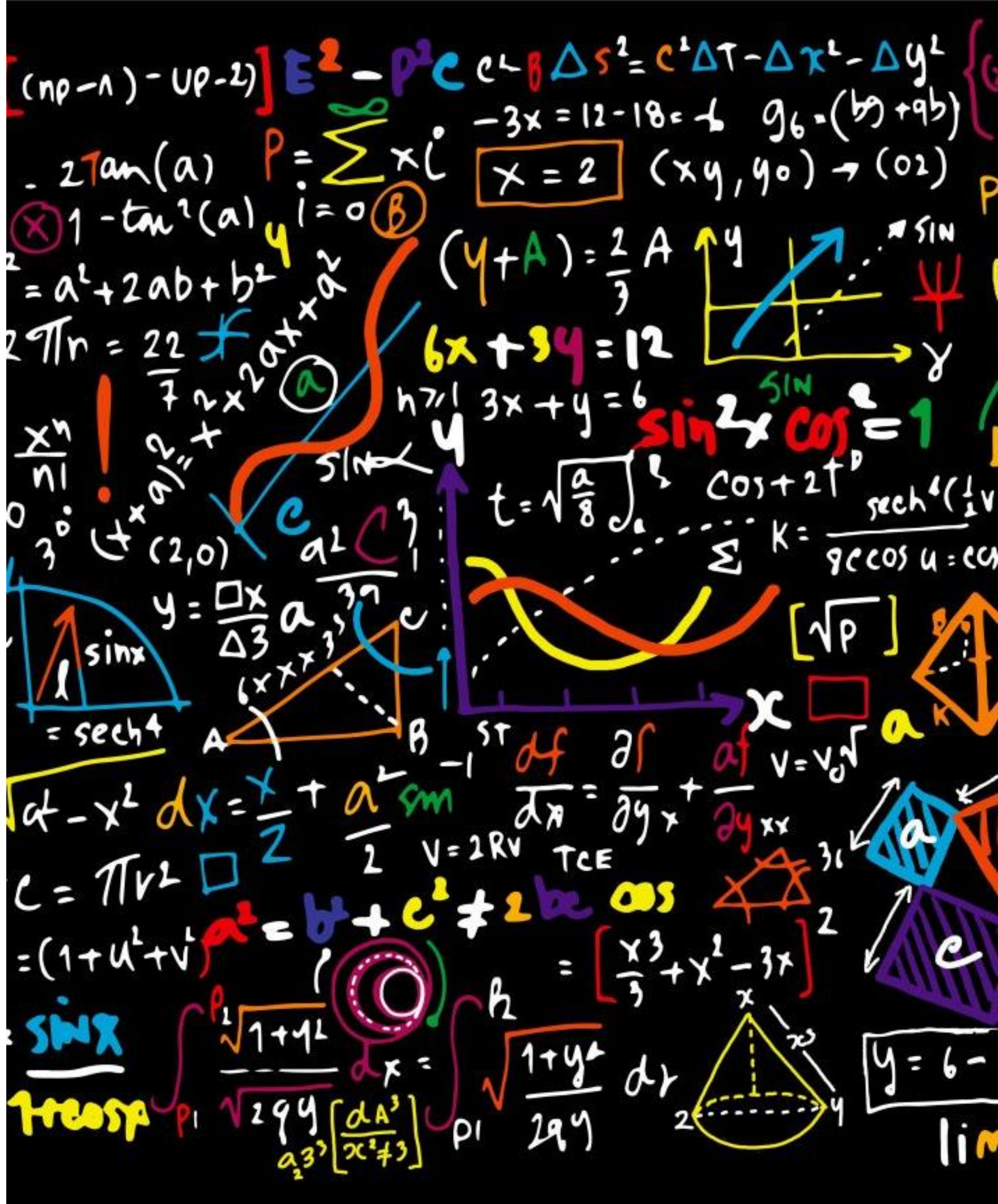
Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 9

Числовые ряды Основные определения



Лекция 9
Числовые ряды
Основные определения

1. Понятие ряда и суммы ряда.
2. Операции с числовыми рядами.
3. Необходимый признак сходимости ряда.
4. Монотонные последовательности.
5. Сравнение рядов с неотрицательными членами.

Понятие ряда

Опр. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

называется рядом;

$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ - членами ряда.

Если u_n – числа, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется числовым.

Если u_n – функции, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется функциональным.

Примеры 1-4 числовых рядов

Примеры 1-4.

1) $1+1+1+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$ 4) $1-1+1-1+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$

2) $1+3+5+7+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1)$

3) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

Понятие частичной суммы ряда

Опр. Сумма $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ конечного числа n первых членов ряда называется n-частичной суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

$$S_1 = u_1,\ \ S_2 = u_1 + u_2, \ldots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \ldots$$

$\{S_n\}$ – последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Понятие суммы ряда и сходимости ряда

Опр. Если существует **конечный** предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся.

Число S называется суммой ряда.

Если этого предела не существует, то ряд называется расходящимся.

Сходимость ряда и сумма ряда. Задача 1

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

и найти его сумму.

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \cdots -$$

бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с $b_1 = 1, q = \frac{1}{2}$.

Сходимость ряда и сумма ряда. Задача 1

$$u_n = b_1 q^{n-1}$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}};$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} =$$

Сходимость ряда и сумма ряда. Задача 1

$$= 2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \left[\frac{1}{\infty}\right] = 2 - 0 = 2$$

Ответ: ряд сходится по определению сходимости ряда и его сумма равна $S = 2$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия представляет сходящийся ряд!

Сходимость ряда и сумма ряда

- Почти всегда **невозможно найти точное значение суммы** сходящегося ряда.
- Поэтому основной задачей является **исследование ряда на сходимость,**
- поскольку сумму ряда всегда можно найти приближенно.

Задача 2 на сходимость числового ряда

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

Решение.

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} u_n = n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

Ответ: ряд расходится по определению сходимости ряда.

Независимость сходимости ряда от конечного числа его членов

Теорема 1. На сходимость ряда не влияет добавление (отбрасывание) **конечного** числа слагаемых.

Доказательство.

Рассмотрим частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$:

$$S_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_k}_{A_k} + \underbrace{u_{k+1} + \ldots + u_n}_{B_{n-k}}$$

Частичная сумма *исходного* ряда

Сумма *отбрасыва-емых* членов

Частичная сумма *исправлен.* ряда

Независимость сходимости ряда конечного числа его членов

$$S_n = A_k + B_{n-k}$$

Устремим $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A_k + \lim_{n\to\infty} B_{n-k}$$

$$\Downarrow$$

$$S = A_k + B$$

Сумма *исходного* ряда

Сумма *отбрасыва-емых* членов

Сумма *исправлен.* ряда

$\Rightarrow$ *исходный* ряд и *исправленный* ряд **сходятся** или **расходятся** одновременно ■

Операции над рядами

Сходящиеся ряды можно почленно складывать, вычитать, умножать на константу.

При этом суммы новых рядов получаются из сумм старых рядов этими же действиями.

Умножение членов ряда на константу

<u>Теорема 2</u>. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится* и его сумма равна S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ тоже *сходится* и его сумма равна cS.

<u>Доказательство</u>. Пусть

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \text{ – частичная сумма ряда } \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} cu_k \text{ – частичная сумма ряда } \sum_{n=1}^{\infty} cu_n$$

Умножение членов ряда на константу

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится* и его сумма равна S.

Тогда существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

Следовательно существует конечный предел

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} cu_k = \lim_{n\to\infty} c\sum_{k=1}^{n} u_k =$$

$$= c\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = c\lim_{n\to\infty} S_n = cS$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ *сходится* и его сумма равна cS. ∎

Сложение (вычитание) членов двух рядов

Теорема 3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся* и их суммы равны S, T соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ тоже *сходится* и его сумма равна $S \pm T$.

Доказательство – упр.

Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 4 (необходимый признак сходимости ряда).

Если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

сходится,

то общий член ряда стремиться к нулю:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

Необходимый признак сходимости ряда

<u>Доказательство</u>.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится* и его сумма равна S.

Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ – частичная сумма этого ряда.

Тогда

$$\begin{array}{ccccc} S_n & = & S_{n-1} & + & u_n \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \\ S & & S & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \blacksquare$$

Необходимый признак сходимости ряда

Следствие 1.

Если общий член ряда НЕ стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$$

то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

РАСХОДИТСЯ.

Необходимый признак сходимости ряда

Замечание 1. Необходимый признак сходимости используется ТОЛЬКО для установления факта расходимости ряда!

Замечание 2. Необходимый признак сходимости ряда не является достаточным.

Контример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (покажем позже), хотя общий член ряда $u_n = \frac{1}{n}$ стремится к нулю.

Необходимый признак сходимости ряда
Задача 3

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots$$

т.е ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

Необходимый признак сходимости ряда
Задача 3

<u>Решение</u>.

$$u_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n}\right] =$$

$$= 1 \neq 0$$

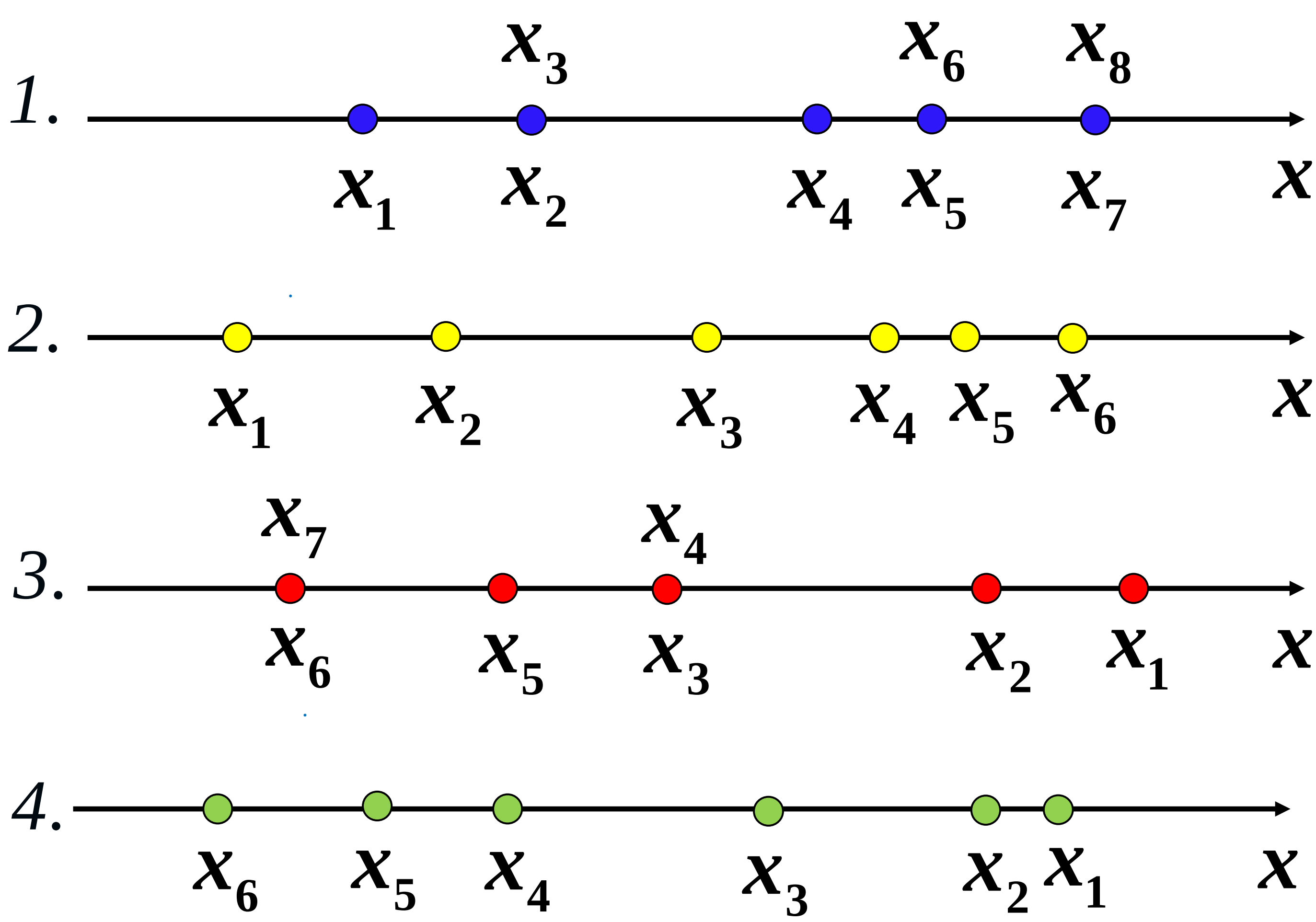
<u>Ответ</u>: Ряд **расходится**, т.к. нарушен необходимый признак сходимости.

Монотонные последовательности

Опр. Если для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется

1. $x_n \leq x_{n+1}$, то последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей;
2. $x_n < x_{n+1}$, то последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей;
3. $x_n \geq x_{n+1}$, то последовательность $\{x_n\}$ называется невозрастающей;
4. $x_n > x_{n+1}$, то последовательность $\{x_n\}$ называется убывающей.

Монотонные последовательности



Монотонные последовательности
Примеры 5,6

Пример 5. $\left\{1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, \ldots\right\}$ – неубывающая последовательность.

Пример 6. $\{1,2,3,4, \ldots, n, \ldots\}$ – возрастающая последовательность.

Упр. Привести примеры невозрастающей и убывающей последовательностей.

Ограниченность числовой последовательности. Повторение

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

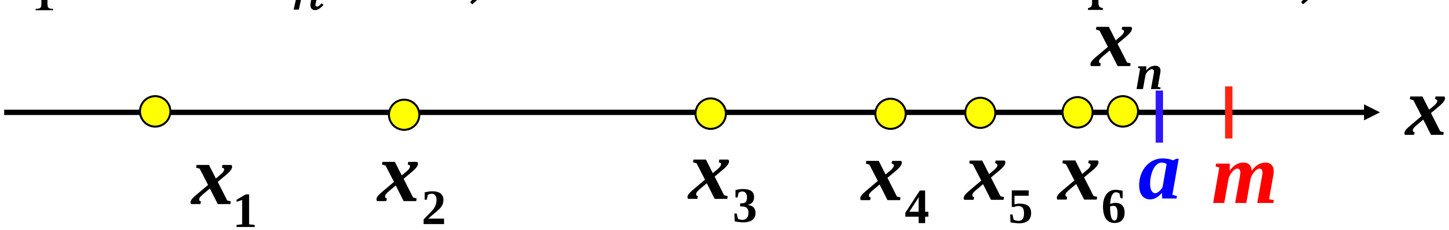
Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху [снизу], если существует число M: $x_n \le M$ $[x_n \ge M]$ для любого n.

Теорема 5. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена (сверху и снизу).

Сходимость монотонных последовательностей

<u>Теорема 6.</u>

- Пусть $\{x_n\}$ − неубывающая (возрастающая) последовательность.
- Если существует такое число m,
- что начиная с некоторого номера n справедливо неравенство $x_n \leq m$ (т. е. ограничена сверху),
- то существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,
- причем $x_n \leq a$, начиная с некоторого n, $a \leq m$.



Сходимость монотонных последовательностей

<u>Следствие 2</u>. Если **неубывающая (возрастающая)** последовательность **ограничена сверху**, то она сходится.

Сравнение рядов с неотрицательными членами

Теорема 7. Пусть имеем два ряда с неотрицательными членами:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ldots, u_n \geq 0$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \ldots, v_n \geq 0$$

Сравнение рядов с неотрицательными членами

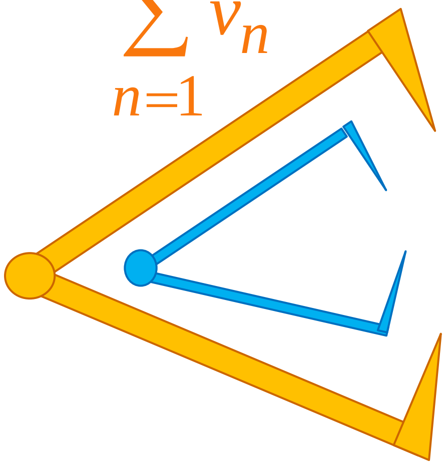
Если $u_n \leq v_n$ и «больший» ряд (2) сходится,

то «меньший» ряд (1) тоже сходится.

сходимость

$$u_n \leq v_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

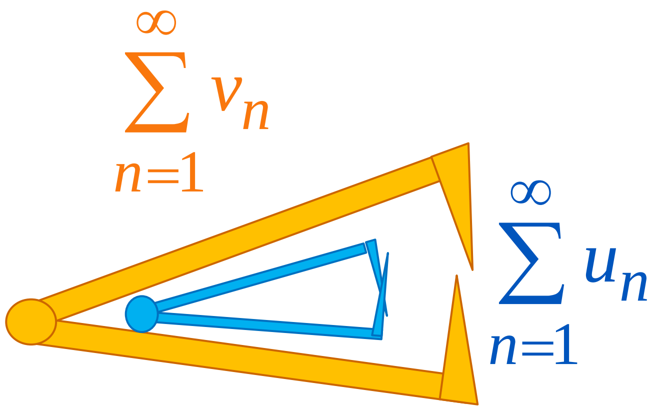
Сравнение рядов с неотрицательными членами

Если $u_n \leq v_n$ и «больший» ряд (2) сходится,

то «меньший» ряд (1) тоже сходится.

сходимость

$$u_n \leq v_n$$



Сравнение рядов с неотрицательными членами

Доказательство. Пусть $u_n \leq v_n$

и ряд (2) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится.

Тогда последов.-ть $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда сходится и, значит, по теореме 5 ограничена,

т.е. существует m, что $S_n \leq m$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Сравнение рядов с неотрицательными членами

Пусть $\{S'_n\}$ − последов.-ть частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Тогда из $u_n \leq v_n$ следует, что $S'_n \leq S_n \leq m$ для любого $n \in \mathbb{N}$,

$u_n \geq 0, v_n \geq 0 \Rightarrow \{S'_n\}, \{S_n\}$ − неубыв. последов.

$\Rightarrow$ по теореме 6 последов.-ть $\{S'_n\}$ сходится.

$\Rightarrow$ по определению сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ∎

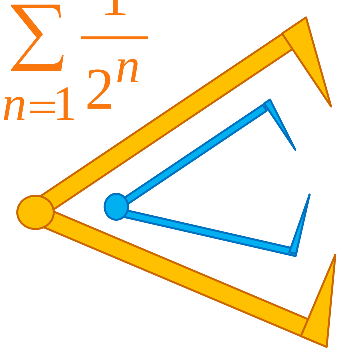
Сравнение рядов с неотрицательными членами. Задача 4

<u>Задача 4</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

<u>Решение</u>. $\frac{1}{n2^n} \le \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится (?)

<u>Ответ</u>. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

сходится по теореме 7.



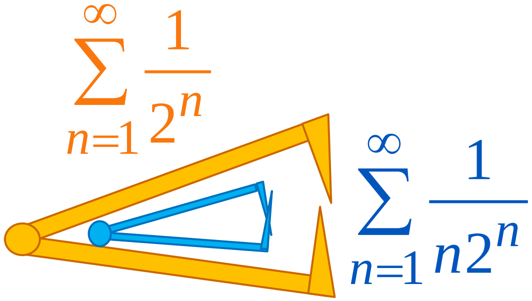
Сравнение рядов с неотрицательными членами. Задача 4

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$.

Решение. $\dfrac{1}{n2^n}\le\dfrac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ сходится (?)

Ответ. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$

сходится по теореме 7.

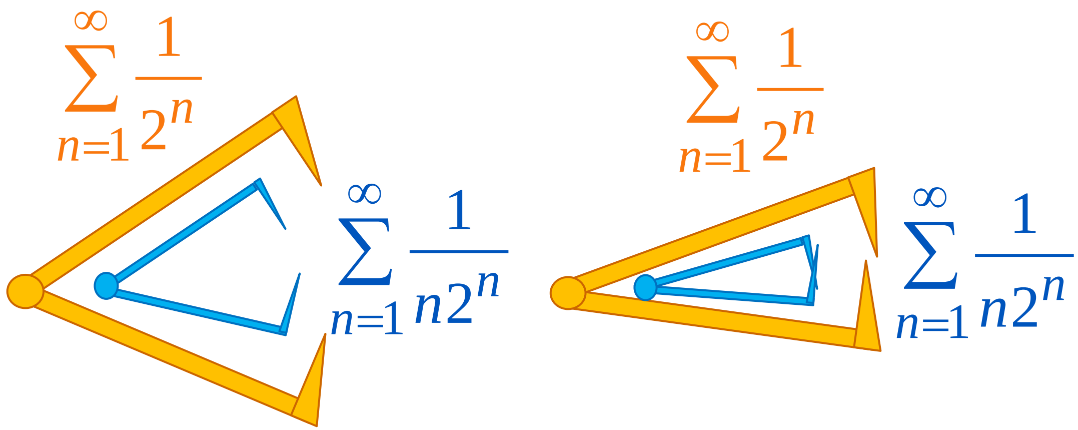


Необходимый признак сходимости ряда
Задача 4

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Решение. $\frac{1}{n2^n}\le\frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится (?)

Ответ. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$



сходится по теореме 7.

Сравнение рядов с неотрицательными членами

Теорема 8. Пусть имеем два ряда с неотрицательными членами:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ldots,\ u_n \geq 0$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \ldots,\ v_n \geq 0$$

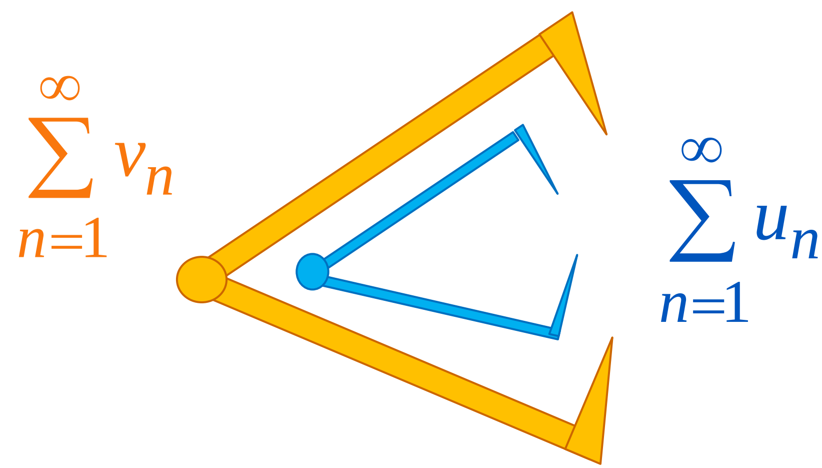
Сравнение рядов с неотрицательными членами

Если $u_n \leq v_n$ и «меньший» ряд (1) расходится, то «больший» ряд (2) расходится.

сходимость

$$u_n \leq v_n$$

расходимость



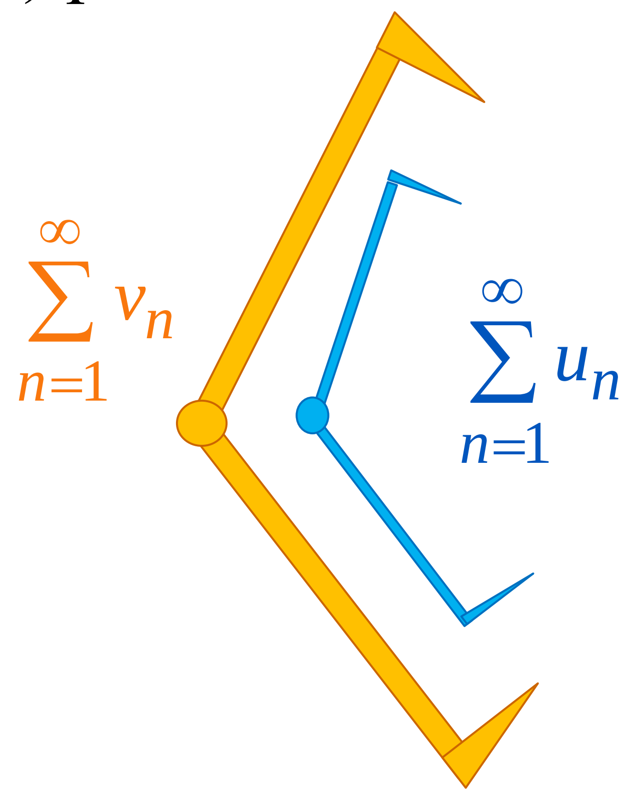
Сравнение рядов с неотрицательными членами

Если $u_n \le v_n$ и «меньший» ряд (1) расходится, то «больший» ряд (2) расходится.

сходимость

$$u_n \le v_n$$

расходимость



Сравнение рядов с неотрицательными членами

Доказательство следует из теоремы 7.

Доказательство нужно провести методом от противного (упр).

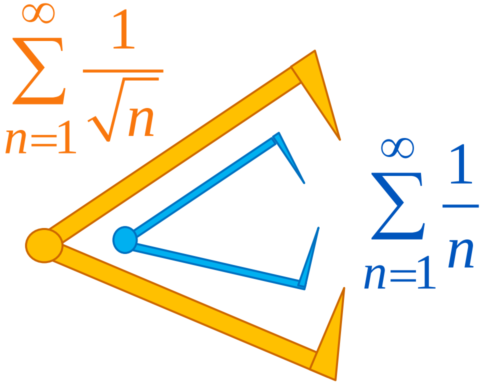
Сравнение рядов с неотрицательными членами. Задача 5

<u>Задача 5</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

<u>Решение</u>. $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

<u>Ответ</u>. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

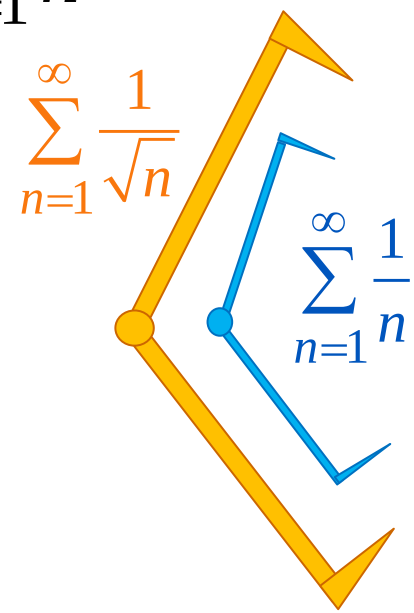
расходится по теореме 8.



Необходимый признак сходимости ряда
Задача 5

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.



Ответ. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

расходится по теореме 8.

Необходимый признак сходимости ряда
Задача 5

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Ответ. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

расходится по теореме 8.