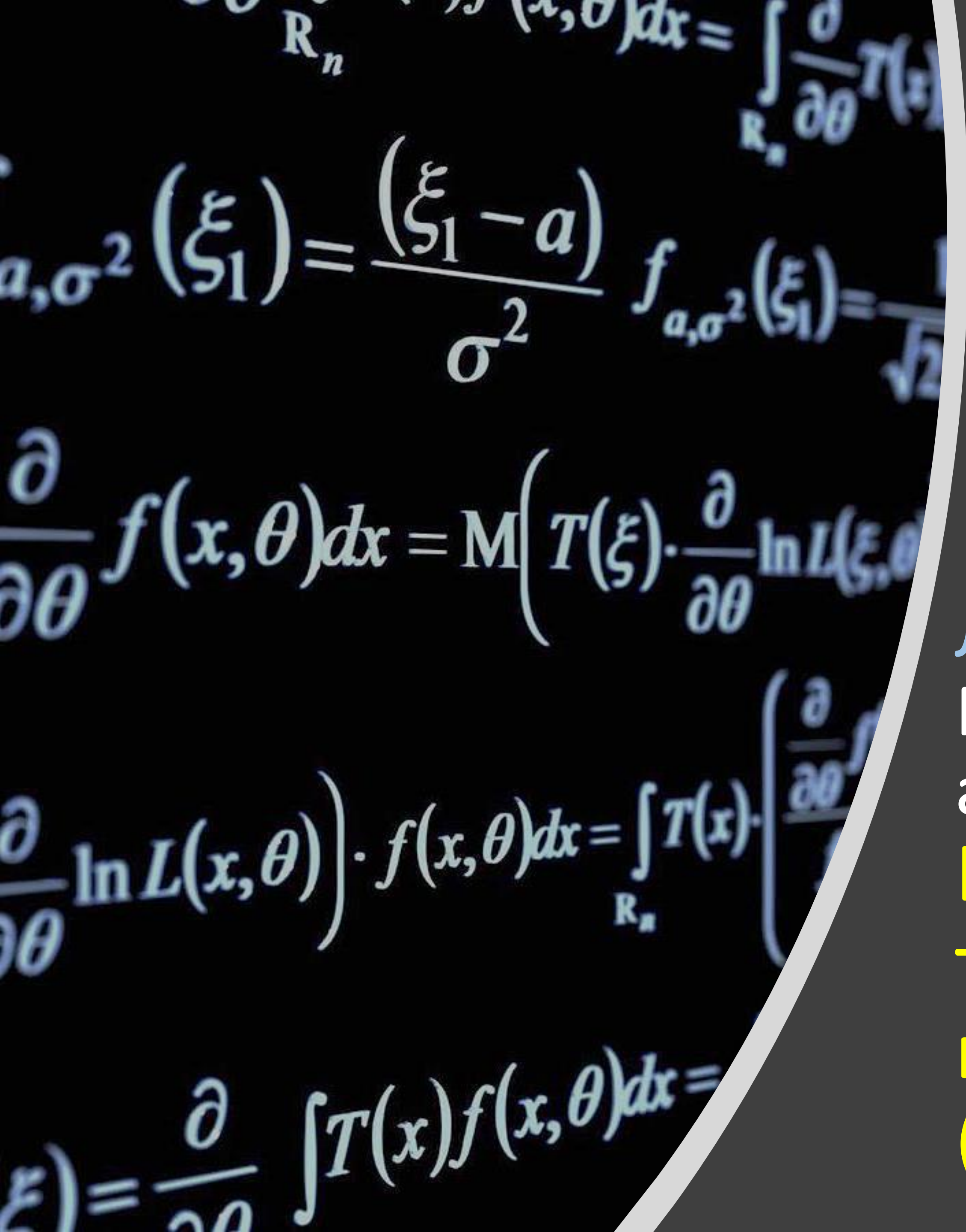

Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, II семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 9

Математический анализ

Интегрирование тригонометричес-ких выражений (продолжение)

Рациональные функции от tg$x$

Пусть $R(x)$ – рациональная функция (т.е отношение двух многочленов).

Тогда в интеграле $\int R(\mathrm{tg}x)dx$ делаем замену

$$\boxed{t = \mathrm{tg}x}$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + t^2} \qquad \boxed{dx = \frac{dt}{t^2+1}}$$

Тогда $\int R(\mathrm{tg}x)dx = \int \frac{R(t)}{t^2+1}dt$ – интеграл от рациональной дроби.

Рациональные функции от $\mathrm{tg}x$. Пример 10

<u>Пример 10</u>. Найти интеграл $\int \mathrm{tg}^3 x\, dx$.

$$\int \mathrm{tg}^3 x dx = \begin{bmatrix} t = \mathrm{tg}\, x \\ dx = \dfrac{1}{t^2+1} dt \end{bmatrix} = \int t^3 \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$= \int \frac{t^3}{t^2+1} dt =$$

Рациональные функции от tg$x$. Пример 10

$$t^3 \;\Big|\; \underline{t^2+1}$$

$$\begin{array}{r|l} -\,t^3 & \underline{t^2+1} \\ \underline{t^3+t} & t \\ -t & \end{array}$$

$$\frac{t^3}{t^2+1} = t + \frac{-t}{t^2+1} = t - \frac{t}{t^2+1}$$

Рациональные функции от tg$x$. Пример 10

$$\int t^3 \frac{1}{t^2+1}dt = \int\left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \int t\,dt - \int \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{t^2}{2} - \int \frac{t}{t^2+1}dt$$

Рациональные функции от tg*x*. Пример 10

$$\int \frac{t}{t^2+1}dt = \left[\begin{array}{l} u = t^2+1 \\ du = 2tdt \\ tdt = \frac{1}{2}du \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C \Rightarrow$$

Рациональные функции от tg$x$. Пример 10

$$\Rightarrow \int \frac{t^3}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right) + C$$

Рациональные функции от ctg$x$

Пусть $R(x)$ – рациональная функция

Тогда в интеграле $\int R(\mathrm{ctg}x)dx$ делаем замену $\boxed{t = \mathrm{ctg}x}$

$$\boxed{1+\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sin^2 x} = 1+t^2}$$

$$dt = d(\mathrm{ctg}\, x) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx = -(1+t^2)dx =$$

Рациональные функции от ctg$x$

$$\Rightarrow \boxed{dx = -\frac{dt}{1+t^2}}$$

$\int R(\mathrm{ctg}x)dx = -\int \frac{R(t)}{t^2+1}dt -$ интеграл от рациональной функции.

Рациональные функции от $\mathrm{ctg}x$. Пример 11

<u>Пример 11</u>. Найти интеграл $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$.

$$\int \mathrm{ctg}^2 x\, dx = \begin{bmatrix} t = \mathrm{ctg}\, x \\ dx = -\dfrac{1}{t^2+1} dt \end{bmatrix} = \int t^2 \left(-\frac{1}{t^2+1} dt \right) =$$

$$= -\int t^2 \frac{1}{t^2+1} dt = -\int \frac{t^2 \pm 1}{t^2+1} dt = -\int \frac{\left(t^2+1\right) - 1}{t^2+1} dt =$$

Рациональные функции от **ctg*x***. Пример 11

$$=-\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=-\left(\int 1dt-\int\frac{1}{t^2+1}dt\right)=$$

$$=-\int 1dt+\int\frac{1}{t^2+1}dt=-t+\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=-\operatorname{ctg}x+\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}x\right)+C=$$

Рациональные функции от ctg*x*. Пример 11

$$= -\operatorname{ctg} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) + C =$$

$$= -\operatorname{ctg} x + \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)\right) + C =$$

$$= -\operatorname{ctg} x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + C = -\operatorname{ctg} x - x + C_1$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Пусть $R(x, y)$ – рациональная функция

Тогда в интеграле $\int R(\sin x, \cos x)dx$ делаем замену $\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

$$1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1}=\frac{1}{t^2+1}$$

$$\boxed{\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{t^2+1}}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos^2\frac{x}{2} = 1 - \frac{1}{t^2+1} = \frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1} = \frac{t^2}{t^2+1}$$

$$\boxed{\sin^2\frac{x}{2} = \frac{t^2}{t^2+1}}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{t^2+1} - \frac{t^2}{t^2+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1}}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sqrt{\frac{1}{t^2+1}}\sqrt{\frac{t^2}{t^2+1}} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{t^2+1}}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$$dt = d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' dx = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{t^2+1}}\cdot\frac{1}{2}dx = \frac{t^2+1}{2}dx \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2}{t^2+1}dt}$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Тогда

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1}\right)\frac{2dt}{t^2+1} -$$

интеграл от рациональной функции

Универсальная тригонометрическая подстановка. Пример 12

Пример 12. Найти интеграл $\int \frac{dx}{5+4\cos x+3\sin x}$.

$$\int \frac{dx}{5+4\cos x+3\sin x} = \left[\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx=\dfrac{2dt}{t^2+1} \\ \sin x=\dfrac{2t}{t^2+1} \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{t^2+1} \end{array}\right] =$$

Универсальная тригонометрическая подстановка. Пример 12

$$\int \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{5+4\frac{1-t^2}{t^2+1}+3\frac{2t}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{2dt}{t^2+1}}{\frac{5\left(t^2+1\right)+4\left(1-t^2\right)+6t}{t^2+1}} =$$

$$= \int \frac{2dt}{5\left(t^2+1\right)+4\left(1-t^2\right)+6t} =$$

Универсальная тригонометрическая подстановка. Пример 12

$$\int \frac{2dt}{5t^2+5+4-4t^2+6t} = \int \frac{2dt}{t^2+6t+9} =$$

$$= \int \frac{2dt}{(t+3)^2} = \begin{bmatrix} u = t+3 \\ du = dt \end{bmatrix} = 2\int \frac{du}{u^2} = 2\int u^{-2}du =$$

$$= 2\frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{2}{u} + C = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3} + C$$

Замена $t = \operatorname{tg} x$

Если функция $R(\sin x, \cos x)$ − четная функция от $\sin x$, $\cos x$, т.е.

$R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x, \cos x)$,

$R(\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$,

то более эффектной будет

замена $\boxed{t = \operatorname{tg} x}$

Замена $t = \mathrm{tg}\, x$

замена $\boxed{t = \mathrm{tg}\, x}$

$=$

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}} \qquad \boxed{dx = \frac{dt}{t^2+1}} \qquad \boxed{\sin^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{t^2+1} = \frac{\left(t^2+1\right)-1}{t^2+1} = \frac{t^2}{t^2+1}$$

Замена $t = \operatorname{tg} x$. Пример 13

Пример 13. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\cos^2 x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\cos^2 x} = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \dfrac{dt}{t^2+1} \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{t^2+1} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{t^2+1} \end{bmatrix} =$$

Замена $t = \operatorname{tg} x$. Пример 13

$$\int \frac{\dfrac{dt}{t^2+1}}{\dfrac{t^2}{t^2+1} - 2\dfrac{1}{t^2+1}} = \int \frac{\dfrac{dt}{t^2+1}}{\dfrac{t^2-2}{t^2+1}} = \int \frac{dt}{t^2-2} = \int \frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\operatorname{tg} x-\sqrt{2}}{\operatorname{tg} x+\sqrt{2}}\right| + C$$

Применение тригонометрических замен к интегрированию некоторых иррациональностей

Интегралы с иррациональностью вида

1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ $\quad$ $\boxed{x = a\sin t}$

2) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$ $\quad$ $\boxed{x = a\,\mathrm{tg}\,t}$

3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ $\quad$ $\boxed{x = a/\cos t}$

находятся с помощью тригонометрических подстановок.

После чего подынтегральная функция становится тригонометрической.

После таких тригонометрических подстановок корень исчезает:

$$1)\ \sqrt{a^2 - x^2} = [x = a\sin t] = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} =$$

$$= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = a\cos t$$

$$2)\ \sqrt{x^2 + a^2} = [x = a\,\mathrm{tg}\, t] = \sqrt{a^2\,\mathrm{tg}^2 t + a^2} =$$

$$= \sqrt{a^2\left(\mathrm{tg}^2 t + 1\right)} = \sqrt{a^2\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{a}{\cos t}$$

3) самост-но

Применение тригонометрических замен к интегрированию некоторых иррациональностей. Пример 14

<u>Пример 14</u>. Найти интеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \end{bmatrix} = \int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t\, dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} =$$

$$= \int \frac{\sin^2 t \cdot \cos t\, dt}{\cos t} = \int \sin^2 t dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt =$$

Применение тригонометрических замен к интегрированию некоторых иррациональностей. Пример 14

$$\int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \int \frac{1}{2} dt - \int \frac{\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{2}\int \cos 2t dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2t + C =$$

$$= \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \cdot \sin 2t + C$$

Применение тригонометрических замен к интегрированию некоторых иррациональностей. Пример 14

$$=\left[\begin{array}{l}\sin t = x \Rightarrow t = \arcsin x \\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2} \\ \sin 2t = 2\sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\cdot \sin 2t + C = \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\cdot x\sqrt{1-x^2} + C$$