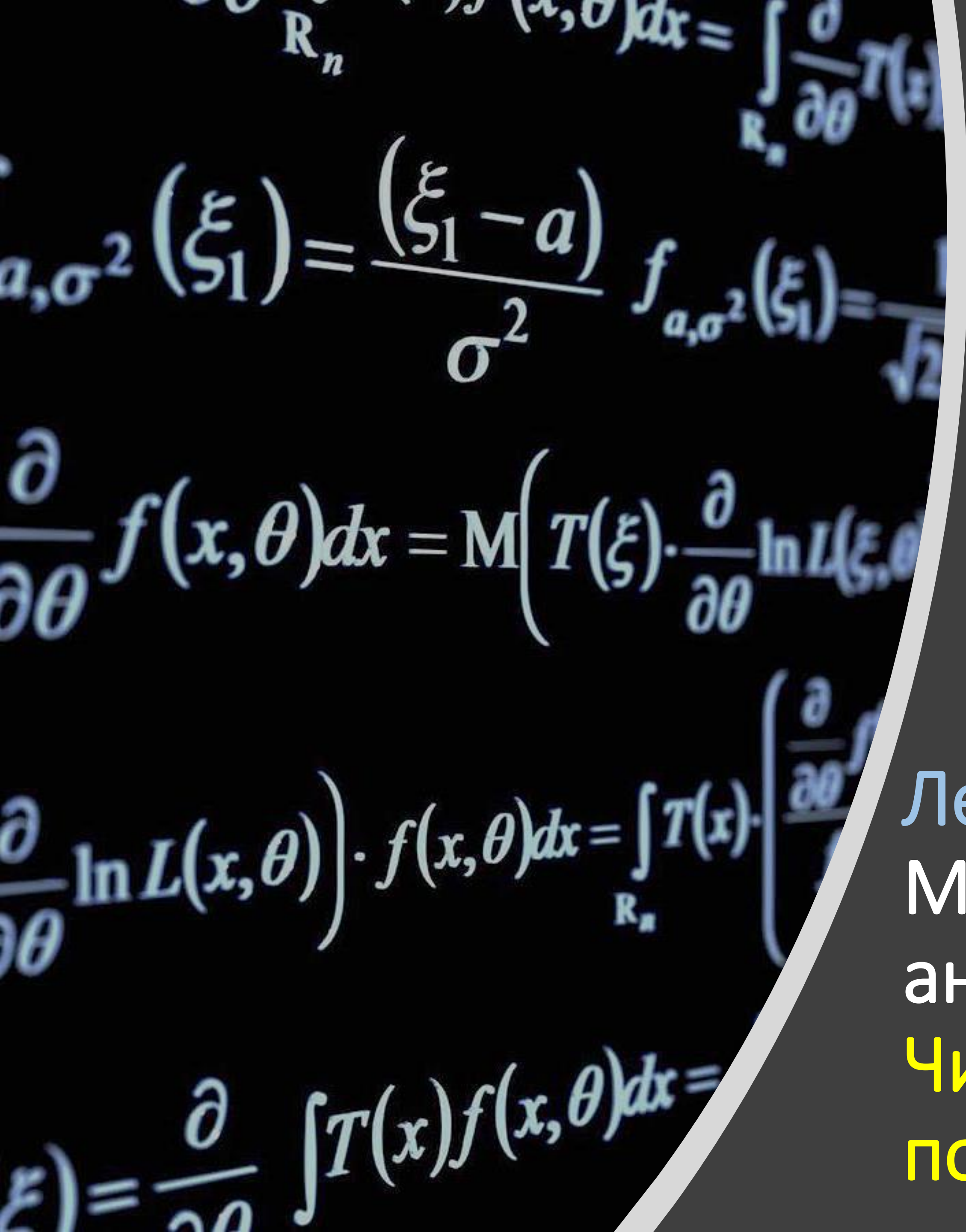


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Презентации сделана на основе лекций

к.ф.-м.н., доцента Щербаковой В.А.

Лекция 9
Математический анализ
Числовая последовательность

Числовые множества

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ - множество натуральных чисел

$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ - множество целых чисел

$Q = \left\{ \dfrac{m}{n} \,\middle|\, m \in Z, n \in N \right\}$ - множество обыкновенных дробей или рациональных чисел

R - множество конечных или бесконечных десятичных дробей

Понятие числовой функции

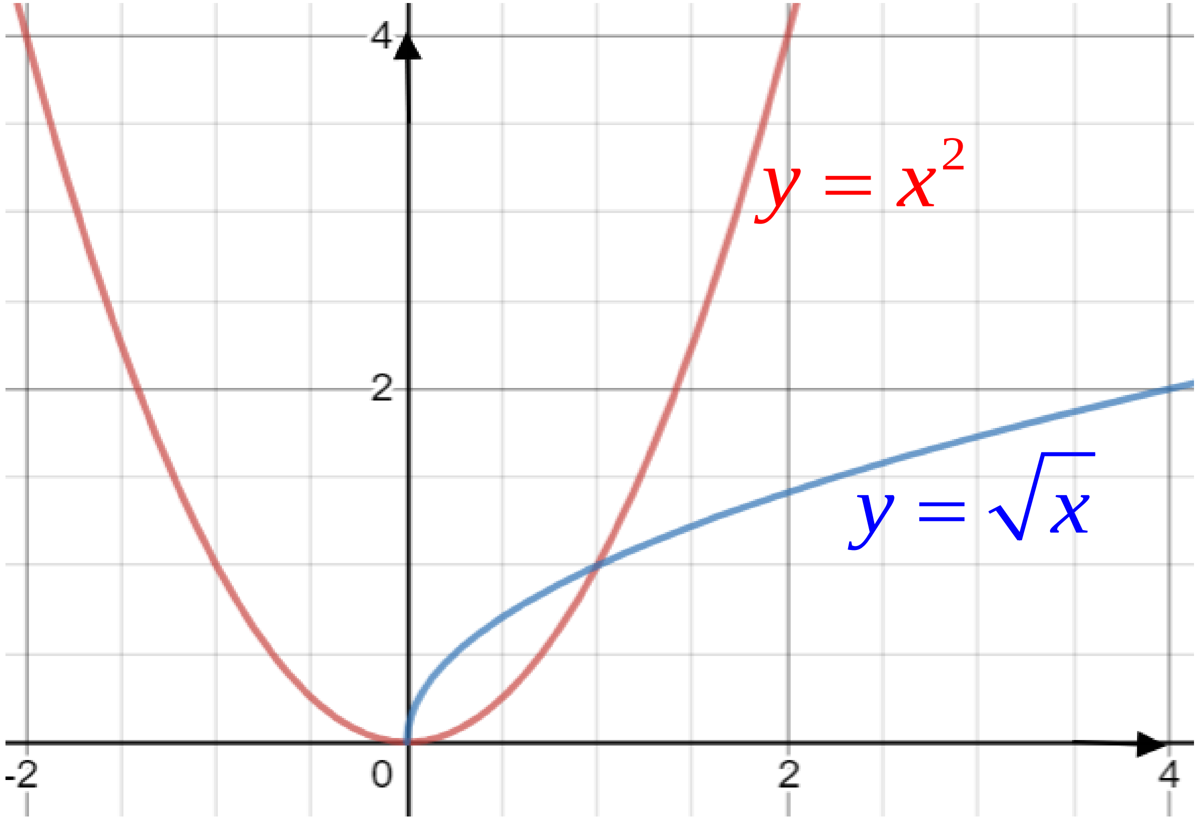
Опр. Числовой функцией $y = f(x)$, определенной на множестве D, называется правило f, которое каждому значению $x \in D$ единственным образом сопоставляет число y.

D – область определения функции

Примеры: $y = f(x) = x^2, D = R$

$$y = f(x) = \sqrt{x}, D = [0, +\infty)$$

Понятие числовой функции



Определение числовой последовательности

Опр. Числовая последовательность – упорядоченный бесконечный набор чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Замечание: числовая последовательность – это функция $x_n = f(n)$.

Обозначение числовой последовательности $\{x_n\}$.

Определение числовой последовательности

Примеры:

1) 1, 2, 3, 4, … $\quad x_n = n$

2) 2, 4, 6, 8, … $\quad x_n = 2n$

3) 1, 3, 5, 7, … $\quad x_n = 2n - 1$

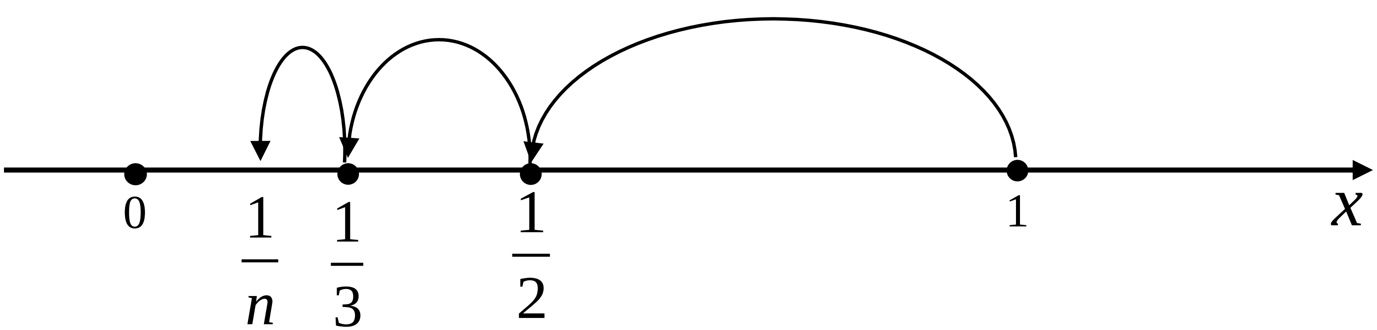
4) 2, 4, 8, 16, … $\quad x_n = 2^n$

5) – 1, 1, – 1, 1, … $\quad x_n = (-1)^n$

Определение числовой последовательности

6) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \qquad x_n = \frac{1}{n}$

Иллюстрация:

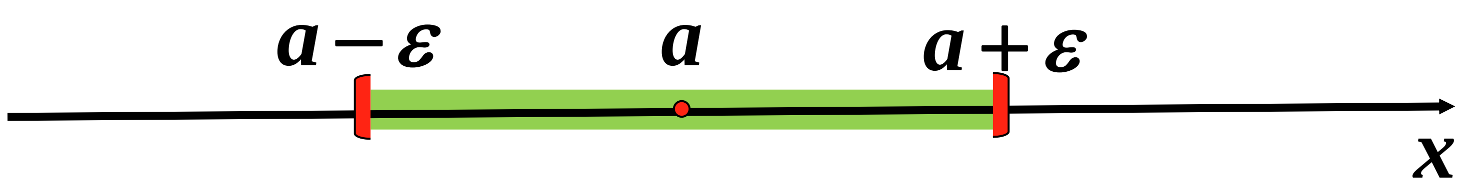


Определение ε-окрестности

Опр. ε-окрестностью точки a называется множество

$$\{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$$ т.е., интервал

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$



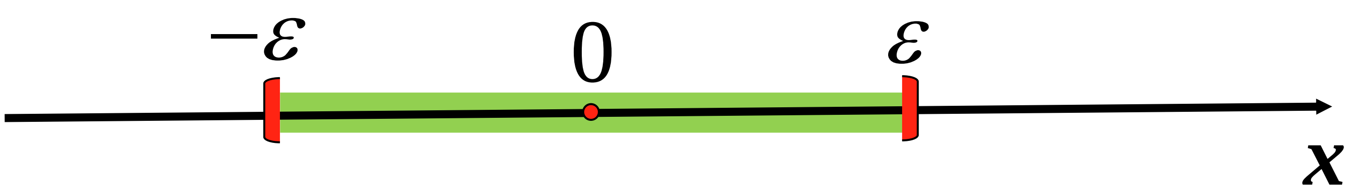
Обозначение: $O_{\varepsilon}(a)$

Определение ε-окрестности

<u>Пример 1.</u>

$$O_{\varepsilon}(0)=\left\{x\in\mathbb{R}:|x-0|<\varepsilon\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:|x|<\varepsilon\right\}$$

$$=(-\varepsilon,\varepsilon)$$

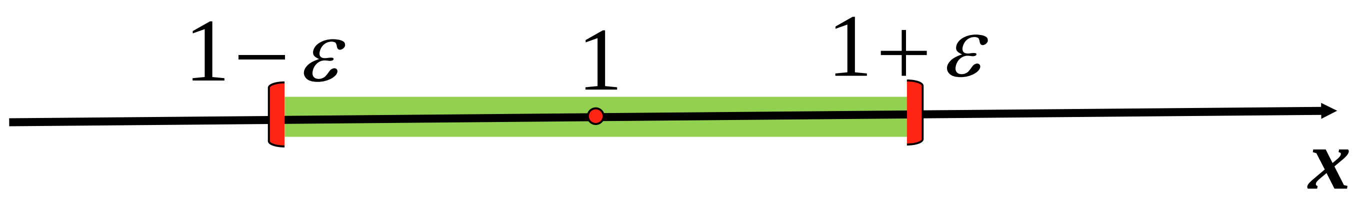


Определение ε-окрестности

<u>Пример 2.</u>

$$O_{\varepsilon}(1)=\left\{x\in\mathbb{R}:|x-1|<\varepsilon\right\}=$$

$$=(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$$



$$O_{0.01}(1)=(0.99,1.01)$$

Определение предела числовой последовательности

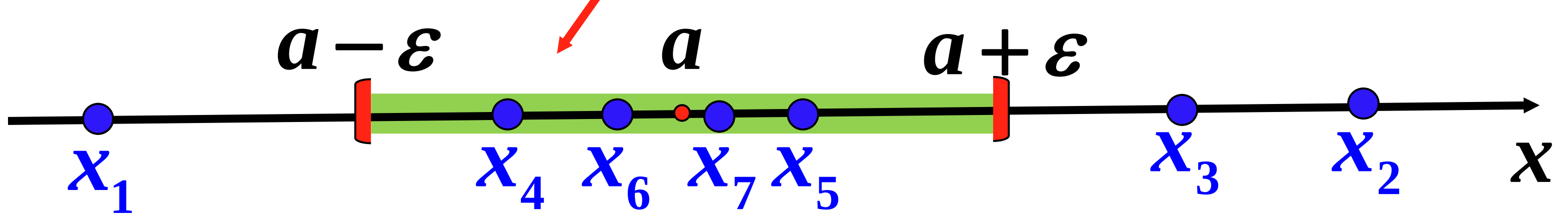
Опр. Пределом числовой последовательности $\{x_n\}$ называется число a, такое, что для любой (сколь угодно малой) ε-окрестности, ε > 0, числа a существует номер $N=N(\varepsilon)$, начиная с которого все члены последовательности лежат в ε-окрестности, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N = N(\varepsilon) \, \forall n \geq N \, \left(| x_n - a | < \varepsilon \right)$$

Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$

Определение предела числовой последовательности

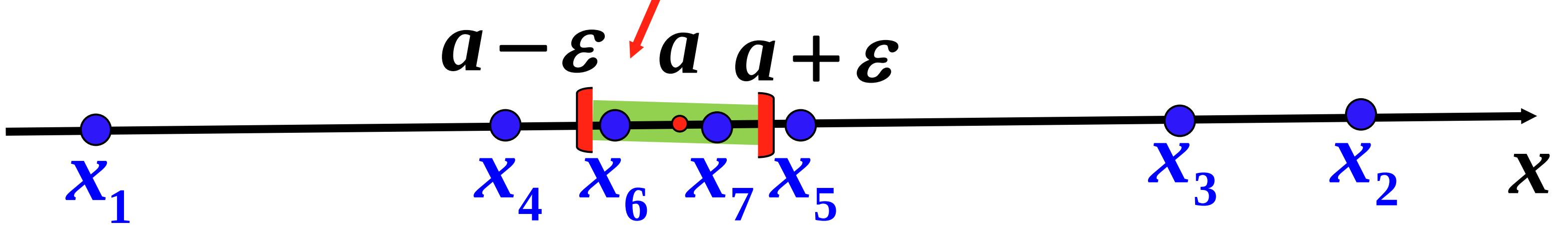
Начиная с номера $N(\varepsilon)$ ВСЕ члены $\{x_n\}$ последовательности



попадут в ε – *окрестность* точки a

Определение предела числовой последовательности

Начиная с номера $N(\varepsilon)$ ВСЕ члены $\{x_n\}$ последовательности



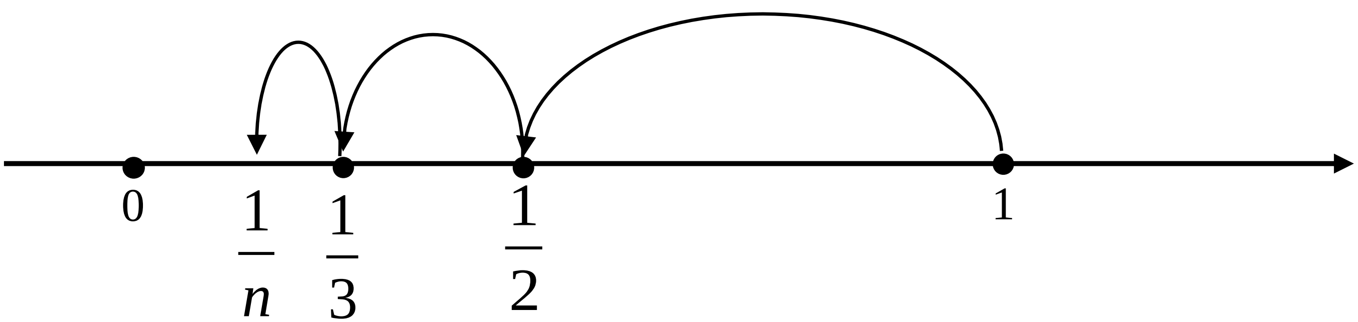
попадут в $\varepsilon-$*окрестность* точки a

Определение предела числовой последовательности

Пример 3.

Для последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad x_n = \frac{1}{n} \qquad a = 0$$



Определение предела числовой последовательности

Пусть ε > 0. Найдем номера *n*, для которых

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}$$

N =*N*(ε) - наименьшее целое число, большее $\frac{1}{\varepsilon}$

Например, для $\varepsilon=0.1$ $N>\frac{1}{0.1}$ $N=11$

$$\varepsilon=0.0012 \quad N>\frac{1}{0.0012}\approx 833,3 \quad N=834$$

Определение предела числовой последовательности

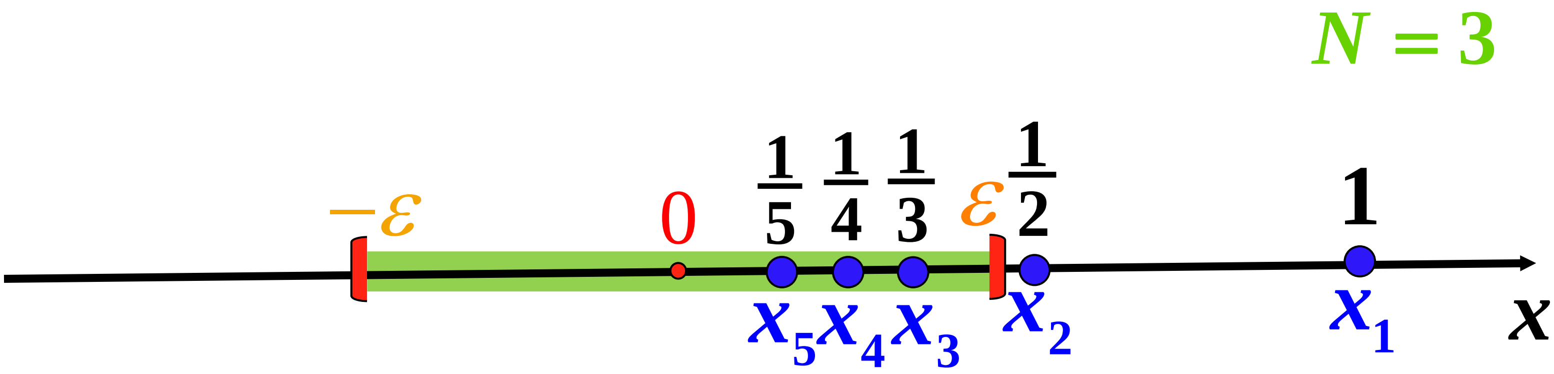
<u>Задача 1 (упр).</u>

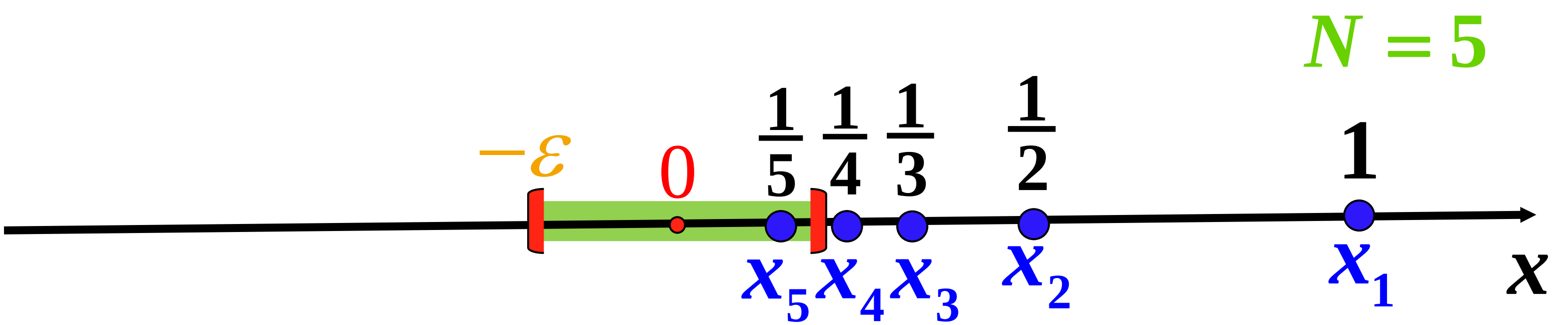
Для последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \frac{1}{n^2}$ доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Найти $N = N(\varepsilon), N = N(0.01), N = N(0.001)$.

Определение предела числовой последовательности





Определение предела числовой последовательности

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если предел существует.

Последовательность $\{x_n\}$ называется расходящейся – в противном случае.

Определение предела числовой последовательности

<u>Пример 4.</u> Последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,\right\}$ – сходящаяся (имеет конечный предел).

<u>Пример 5.</u> Последовательность $\{x_n\} = \{n\} = \{1,2,3, \dots, n, \dots\}$ – расходящаяся (не имеет конечного предела).

<u>Пример 6.</u> Последовательность $\{x_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1,1,-1, \dots, (-1)^n, \dots\}$ – расходящаяся (не имеет конечного предела).

Единственность предела числовой последовательности

Теорема 1. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то ее предел единственный.

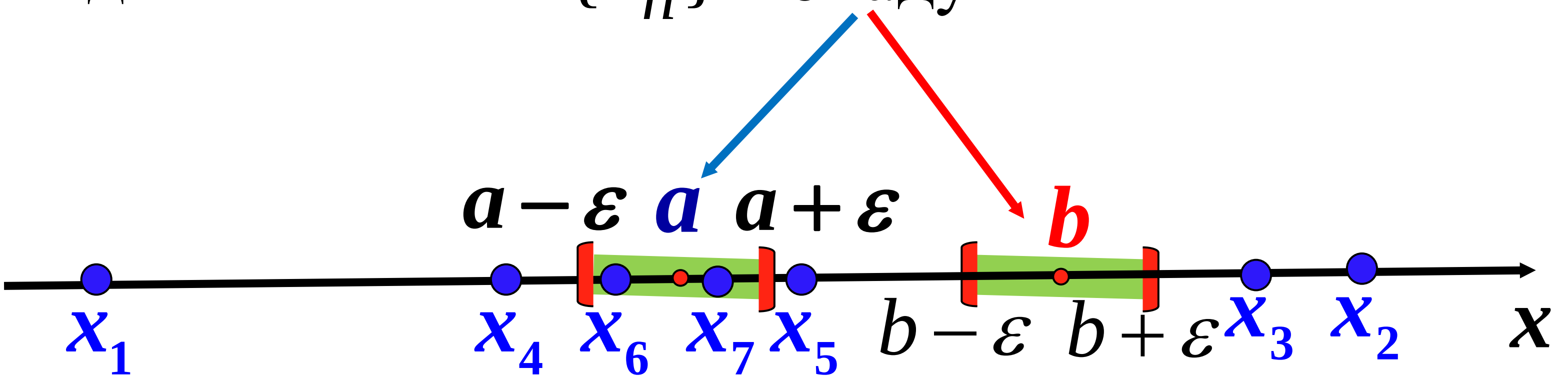
Доказательство.

От противного. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b, \quad a \neq b$$

Единственность предела числовой последовательности

Начиная с некоторого номера
ВСЕ члены
последовательности $\{x_n\}$ попадут в



$\varepsilon -$ *окрестность* и точки a, и точки b

Противоречие.

Ограниченные числовые последовательности

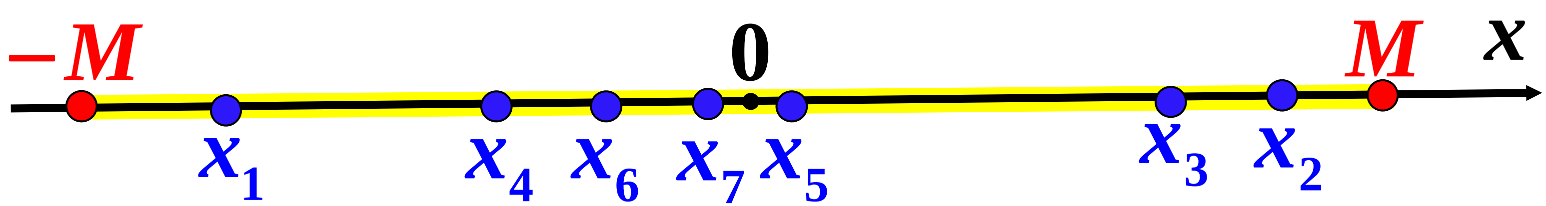
Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует число M: $x_n \le M$ для любого n.

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если существует число K: $x_n \ge K$ для любого n.

Ограниченные числовые последовательности

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена сверху и ограничена снизу.

Замечание. Последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, если существует число $M > 0$: $|x_n| \le M$ для любого n (т.е. $-M \le x_n \le M$).



Ограниченные числовые последовательности

<u>Пример 7.</u> Последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ – ограниченая: $-1 \leq \frac{1}{n} \leq 1$

<u>Пример 8.</u> Последовательность $\{x_n\} = \{n\}$ – неограниченная.

<u>Пример 9.</u> Последовательность $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ – ограниченная: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

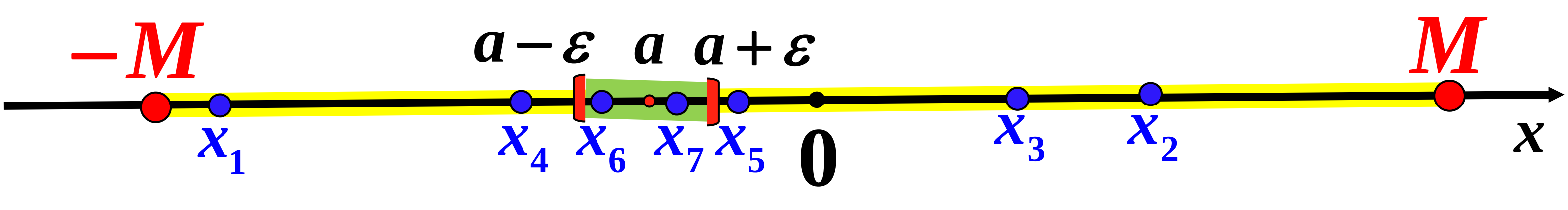
Ограниченные числовые последовательности

Теорема 2. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.

Верно ли Обратное ?

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$.



Арифметические свойства сходящихся последовательностей

Свойство 1. Пусть $x_n = a$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} a = a$.

Предел константной последовательности равен константе.

Свойство 2. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$.

Предел суммы/разности двух последовательностей равен сумме/разности их пределов.

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

Свойство 3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = ab$.

Предел произведения двух последовательностей равен произведению их пределов.

Свойство 4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ca$.

Константу можно вынести за знак предела.

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

Свойство 5. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\, m \in \mathbb{N}.$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)^m = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^m = a^m.$

Предел степени последовательности равен степени предела этой последовательности.

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

<u>Свойство 6.</u> Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. И $b \neq 0$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}$.

Предел частного двух последовательностей, если предел знаменателя не равен нулю, равен частному их пределов.

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

Доказательство. (1) упр;

(2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

И пусть $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\exists N_1 = N_1(\varepsilon)\ \forall n \geq N_1\ \left(|x_n - a| < \varepsilon_0\right)$$

$$\exists N_2 = N_2(\varepsilon)\ \forall n \geq N_2\ \left(|y_n - b| < \varepsilon_0\right)$$

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

И значит, для $N = max\{ N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$$\forall n \geq N \ \ \left(| x_n - a | < \varepsilon_0\right)$$

$$\forall n \geq N \ \ \left(| y_n - b | < \varepsilon_0\right)$$

Тогда для $\forall n \geq N$ имеем

$$| x_n + y_n - (a+b) | = | (x_n - a) + (y_n - b) | \leq$$

$$\leq | x_n - a | + | y_n - b | < \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = \varepsilon$$

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

Итак,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall n \geq N\ \ \big(|(x_n + y_n) - (a+b)| < \varepsilon\big)$$

Это значит, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b$$

Самостоятельно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = a - b \ \blacksquare$$

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

(3) без док-ва.

(4) следует из (3) и (1):

$$\lim_{n\to\infty}(c\cdot x_n) = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c\cdot \lim_{n\to\infty} x_n = c\cdot a$$

(5) следует из (3).

(6) без док-ва.

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

Пример 10. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3$

Решение. Применим арифметические свойства пределов

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^3$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^3 = (1+0)^3 = 1$$

Арифметические свойства сходящихся последовательностей

Пример 11. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-3n^2+1}{2n^3-n-2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3n^2+1}{2n^3-n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^3-3n^2+1}{n^3}}{\dfrac{2n^3-n-2}{n^3}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^3}{n^3}-\dfrac{3n^2}{n^3}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{2n^3}{n^3}-\dfrac{n}{n^3}-\dfrac{2}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\overset{\to 0}{\dfrac{3}{n}}+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{n^3}}}{2-\underset{\to 0}{\dfrac{1}{n^2}}-\underset{\to 0}{\dfrac{2}{n^3}}}=\frac{1-0+0}{2-0-0}=$$

$$=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^3=0$$

Сохранение неравенства при переходе к пределу

Теорема 3. Пусть $x_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда $a \geq 0$.

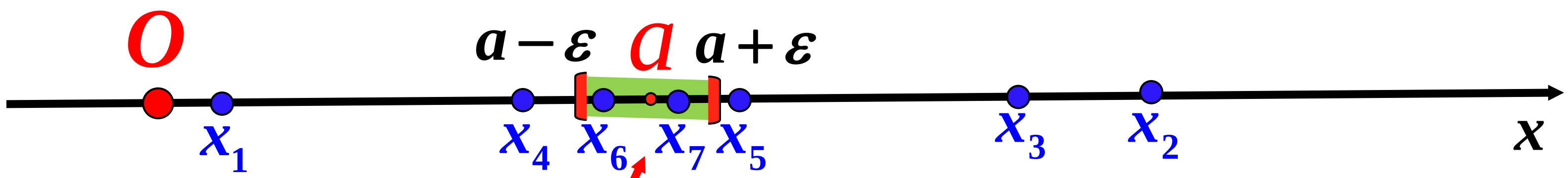
Док-во - упр.

Указание: доказать от противного, т.е предположить, что $a < 0$.

Пример 12. Для $x_n = \frac{1}{n}$ имеем $x_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. По теореме 3 имеем $0 \geq 0$.

Сохранение неравенства при переходе к пределу

Иллюстрация



Начиная с некоторого номера
ВСЕ члены
последовательности $\{x_n\}$ попадут в

Сохранение неравенства при переходе к пределу

Следствие 1 (сохранение неравенства при переходе к пределу).

Пусть $x_n > y_n$ для любых $n \in \mathbb{N}$.

и пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$.

Тогда $a \geq b$.

Доказательство (упр). Указание: рассмотреть $z_n = x_n - y_n$ и применить теорему 3.

«Правило двух милиционеров»

<u>Следствие 2</u>

Пусть $x_n \leq y_n \leq z_n$ для любых $n \in \mathbb{N}$.

и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

<u>Доказательство</u> (упр).

Указание: применить следствие 1.

Бесконечно малые последовательности

Опр. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой (б.м.), если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Пример 13. Последовательности

$\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ и

$\{\beta_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots\right\}$ –

бесконечно малые.

Бесконечно малые последовательности

Свойства б.м.последов-тей

(1) Сумма/разность б.м. последовательностей – б. м. последовательность.

(2) Б.м. последовательность, умноженная на ограниченную - б.м. последовательность.

(3) Б.м. последовательность, умноженная на константу – б.м. последовательность.

(4) Произведение б. м. последовательностей – б.м. последовательность.

Бесконечно малые последовательности

Док-во.

(1) Пусть $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} -$ б. м. последов-ти.

Следов-но, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha_n \pm \beta_n) = \lim_{n\to\infty}\alpha_n \pm \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0 \pm 0 = 0$$

Значит, $\alpha_n \pm \beta_n -$ б.м. последов-ть.

(2) Без док-ва.

Бесконечно малые последовательности

Док-во.

(3) Следует из (2), поскольку константа – ограниченная последов-ть.

(4) Следует из (2), поскольку б.м. последов-ть является сходящейся, а сходящаяся является ограниченной (теорема 2).

Связь сходящейся последовательности и б.м. последовательности

Теорема 4. Существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$

существует б.м. последовательность $\{\alpha_n\}$ т.ч. $x_n = a + \alpha_n$

Док-во. Пусть $\alpha_n = x_n - a$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n - a) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} a =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} x_n - a = a - a = 0$

Определение бесконечно большой последовательности

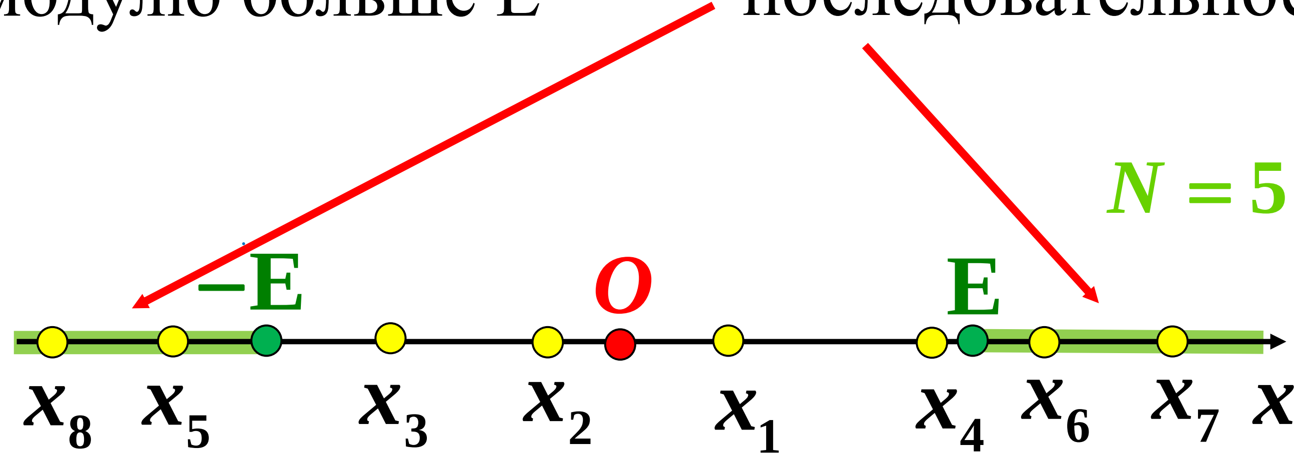
Опр. Бесконечно большой называется такая последовательность $\{x_n\}$, что для любого (сколь угодно большого) числа Е > 0 существует номер N=N(Е), начиная с которого все члены последовательности $\{x_n\}$ больше по модулю Е, т.е.

$$\forall \mathrm{E} > 0 \; \exists N = N(\mathrm{E}) \; \forall n \geq N \; \left(|x_n| > \mathrm{E} \right)$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Определение бесконечно большой последовательности

Начиная с номера $N(\mathrm{E})$ **ВСЕ** члены последовательности по модулю больше Е



$$|x_n| > \mathrm{E} \Leftrightarrow \left(x_n > \mathrm{E} \text{ или } x_n < -\mathrm{E}\right)$$

Определение бесконечно большой последовательности

Пример 14.

Для последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = n^2$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$$

Упр. Если последовательность б.б., то она расходящаяся.

Определение бесконечно большой последовательности

Пусть E > 0. Найдем номера *n*, для которых

$|x_n| > \mathrm{E}$:

$$\left|n^2\right| > \mathrm{E} \Leftrightarrow n^2 > \mathrm{E} \Leftrightarrow n > \sqrt{\mathrm{E}}$$

$N = N(\mathrm{E})$ - наименьшее целое число, большее $\sqrt{\mathrm{E}}$

Например, для $\mathrm{E} = 50 \quad N > \sqrt{50} \approx 7.1 \quad N = 8$

$$\mathrm{E} = 1000 \quad N > \sqrt{1000} \approx 31.6 \quad N = 32$$

Определение бесконечно большой последовательности

<u>Замечание</u> Если в определении бесконечно большой последовательности заменить неравенство $|x_n| > \text{Е}$ на $x_n > \text{Е}$ ($x_n < -\text{Е}$), то получим

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \right)$$

<u>Пример 15.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$

Связь б.м. и б.б. последовательностей

Теорема 5.

(1) Последовательность $\{\alpha_n\}$ является б.м. тогда и только тогда, когда последовательность $\{\beta_n\} = \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ является б.б.

(2) Последовательность $\{\beta_n\}$ является б.б. тогда и только тогда, когда последовательность $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{\beta_n}\right\}$ является б.м.

Связь б.м. и б.б. последовательностей

Доказательство.

(1) Пусть последов-ть $\{\alpha_n\}$ является б.м., т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \; \forall n \geq N \; \left(|\alpha_n| < \varepsilon \right)$$

$$\frac{1}{|\alpha_n|} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$|\beta_n| = \left| \frac{1}{\alpha_n} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Связь б.м. и б.б. последовательностей

Возьмем произвольное (сколь угодно больш.) $\mathrm{E} > 0$

По нему построим $N = N\left(\frac{1}{E}\right)$ $\left[\varepsilon = \frac{1}{E}\right]$

Тогда $\forall n \geq N$ $\left(|\beta_n| > \mathrm{E} \right) \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \infty \Rightarrow$$

последовательность $\{\beta_n\} = \left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ является б.б.

Связь б.б. и б.м. последовательностей

Пример 16. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-4}{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2-4}{n^2}}{\frac{2n+1}{n^2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3-\underbrace{\frac{1}{n^3}}_{0}}{\underbrace{\frac{2}{n}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}}=\left[\frac{3}{0}\right]=\infty$$

Математическое решение

Связь б.б. и б.м. последовательностей

<u>Пример 17</u>. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-4}{2n+1}$

Решение «ладошки»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4}{2n+1}=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2n}\right]=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2}\right]=$$

$$=\left[\frac{3\cdot\infty}{2}\right]=\infty$$