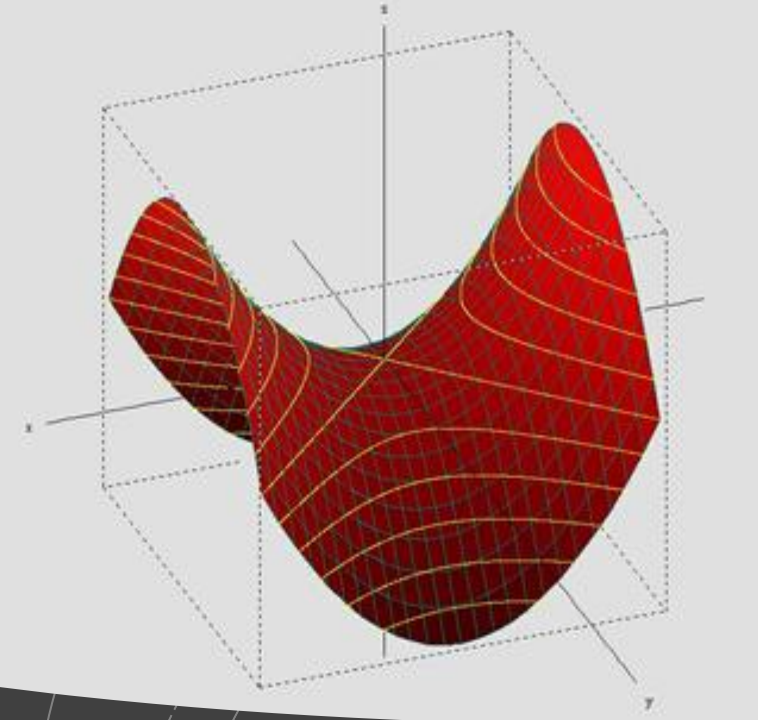
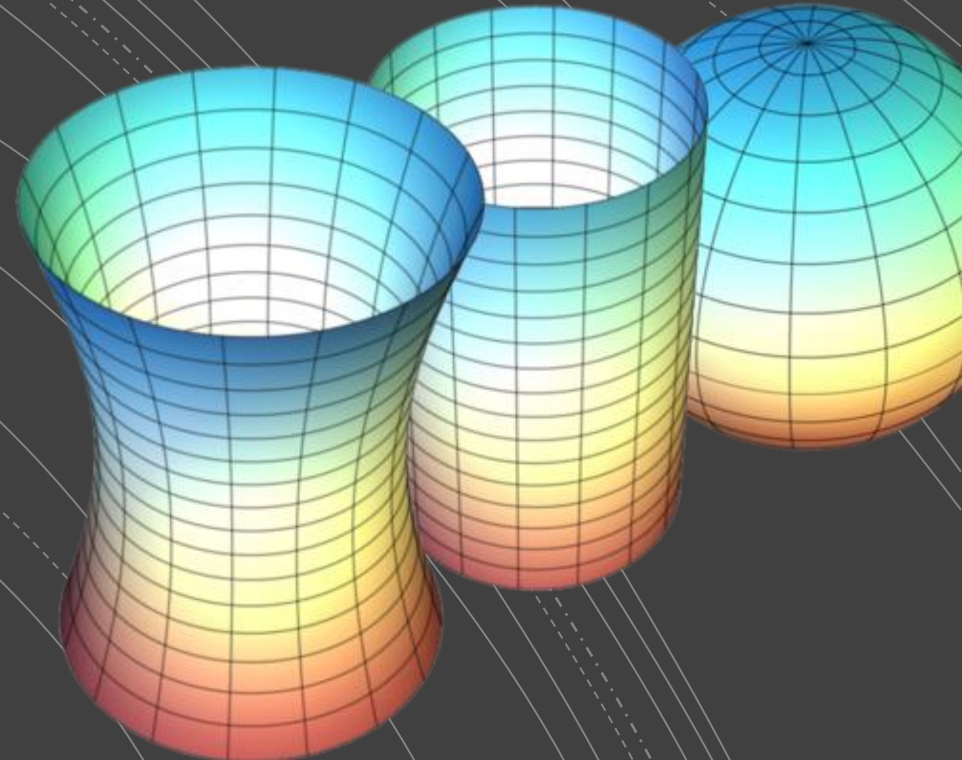




Лекция 8
Аналитическая геометрия
Поверхности II порядка

- Курс «Математика»
- Департамент фундаментальной и прикладной химии,
- I семестр (I курс)
- Лекторы:
- к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,
- к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Определение поверхности II порядка

Опр. Поверхность II-го порядка – это множество всех точек (пространства), удовлетворяющих уравнению

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz +$$
$$+ Gx + Ly + Mz + N = 0$$

где $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0$

Теорема о поверхности II порядка

Теорема 1. Для любой поверхности II-го порядка можно ввести новую систему координат так, чтобы уравнение в новой системе стало (каноническим) уравнением

1) эллипсоида;

2) однополостного гиперболоида;

3) двуполостного гиперболоида;

4) эллиптического параболоида;

Теорема о поверхности II порядка

5) гиперболического параболоида;

6) конуса;

7) эллиптического цилиндра;

8) гиперболического цилиндра;

9) параболического цилиндра;

10) вырожденных случаев.

Исследование поверхности II порядка по ее уравнению

Методом исследования поверхности по ее уравнению является **метод сечений**

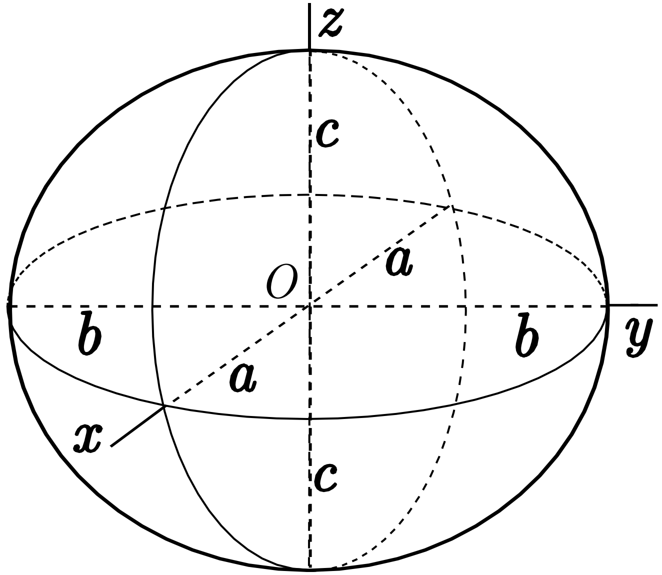
плоскостями

xOy: $z = 0$	xOz: $y = 0$	yOz: $x = 0$
параллельно xOy: $z = h$	параллельно xOz: $y = h$	параллельно yOz: $x = h$

Эллипсоид

<u>Опр</u>. Эллипсоидом называется поверхность II порядка с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$



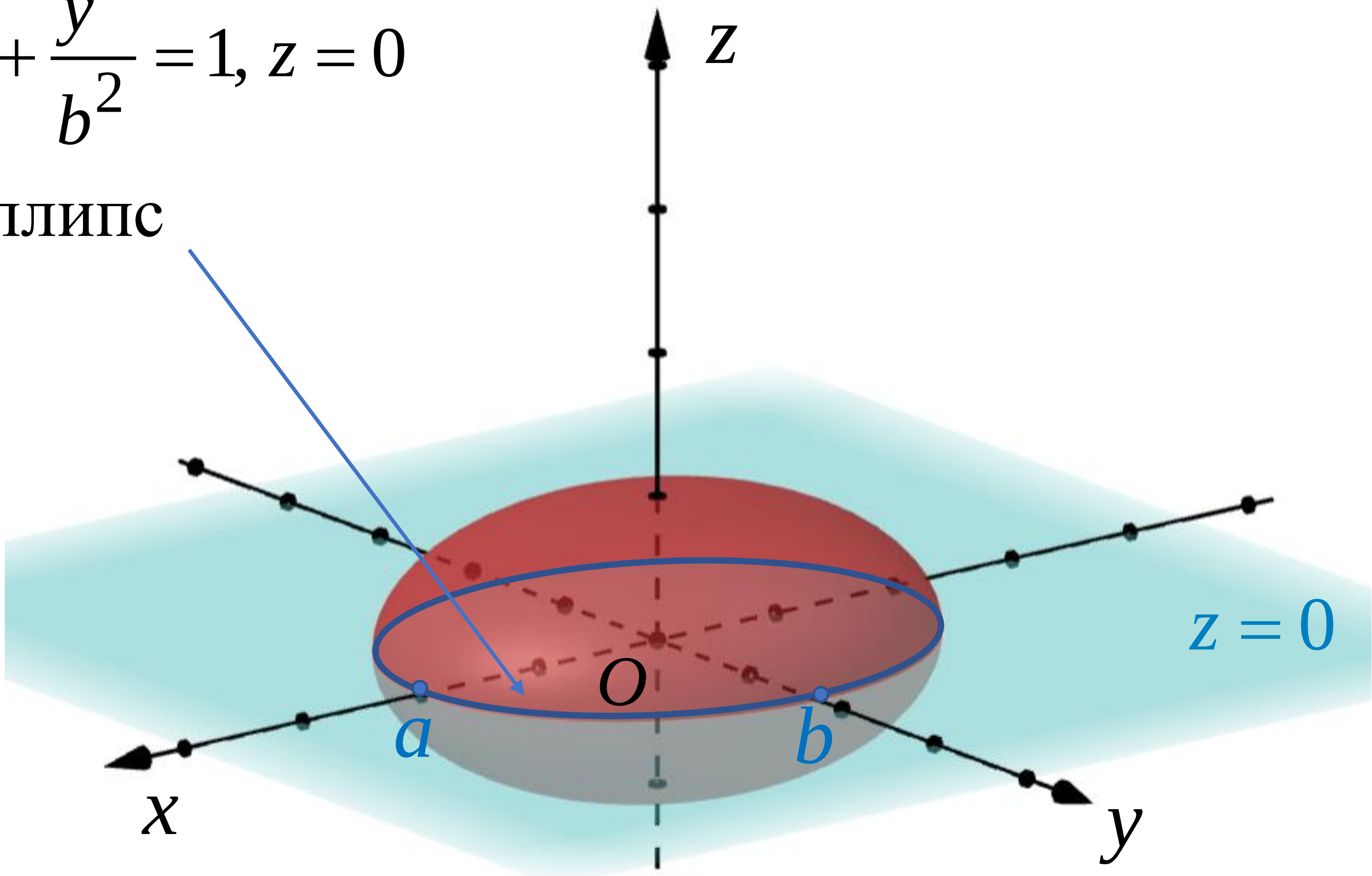
Сечение плоскостью xOy:

$$z=0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 - \text{эллипс}$$

Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$$

– эллипс

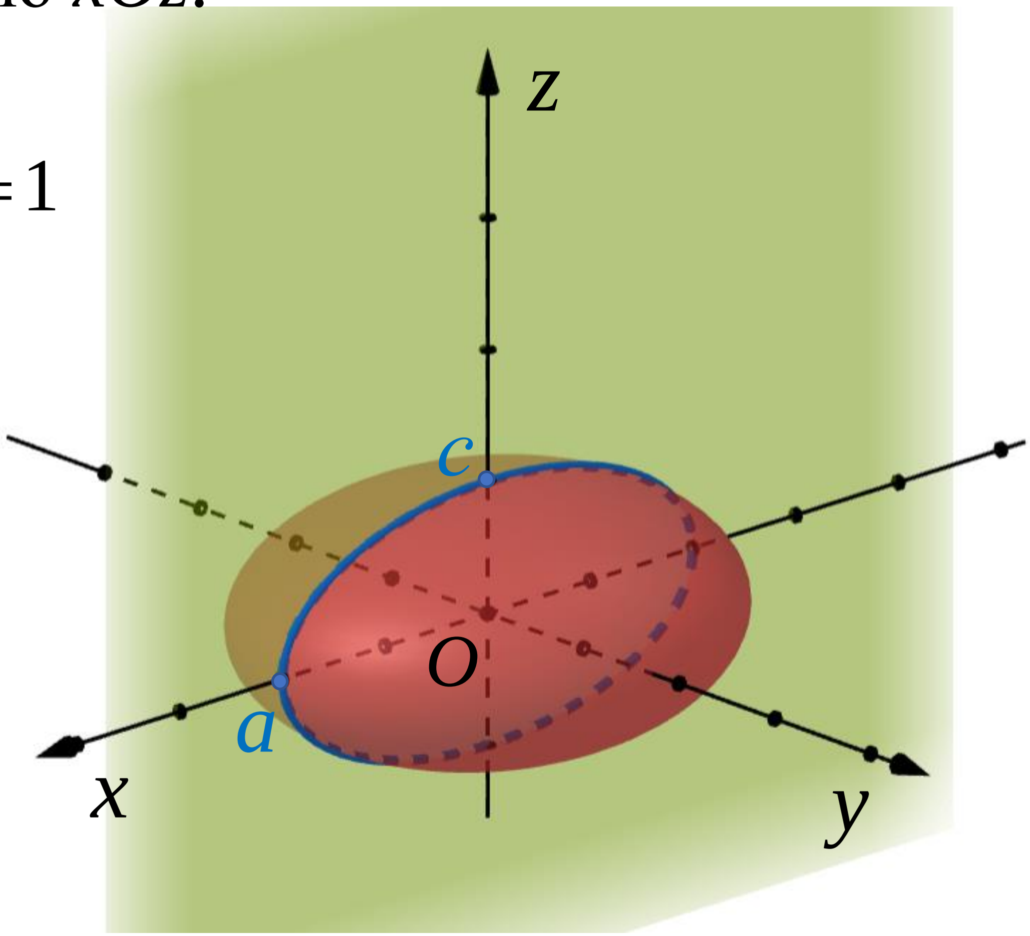


Эллипсоид

Сечение плоскостью xOz:

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

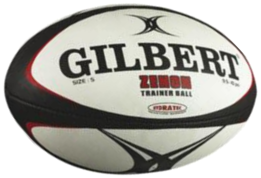
– эллипс



Сечение
Плоскостью yOz:

$\Rightarrow$ аналогично

Эллипсоид вращения



При $a = b$ получаем уравнение

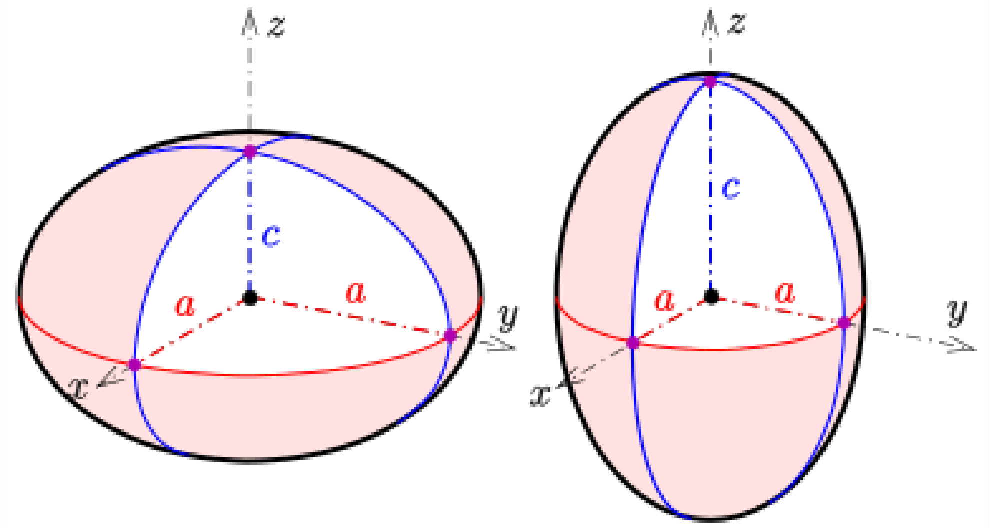
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

эллипсоида вращения

- поверхности, полученной вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

вокруг оси Oz



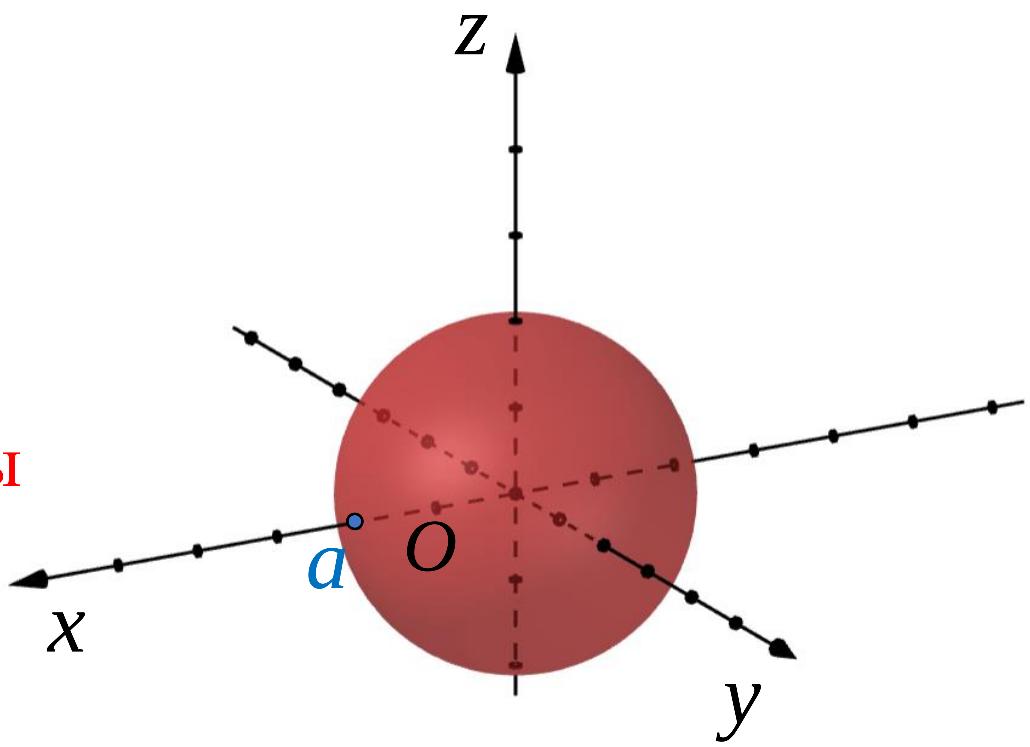
Сфера

При $a = b = c$ получаем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = a^2}$$

- уравнение сферы



Однополостный гиперболоид

<u>Опр</u>. Однополостным гиперболоидом называется поверхность II порядка с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

Сечение плоскостью xOy:

$$z=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 - \text{эллипс}$$

Однополостный гиперболоид

Сечение плоскостью xOz:

$y = 0 \Rightarrow$

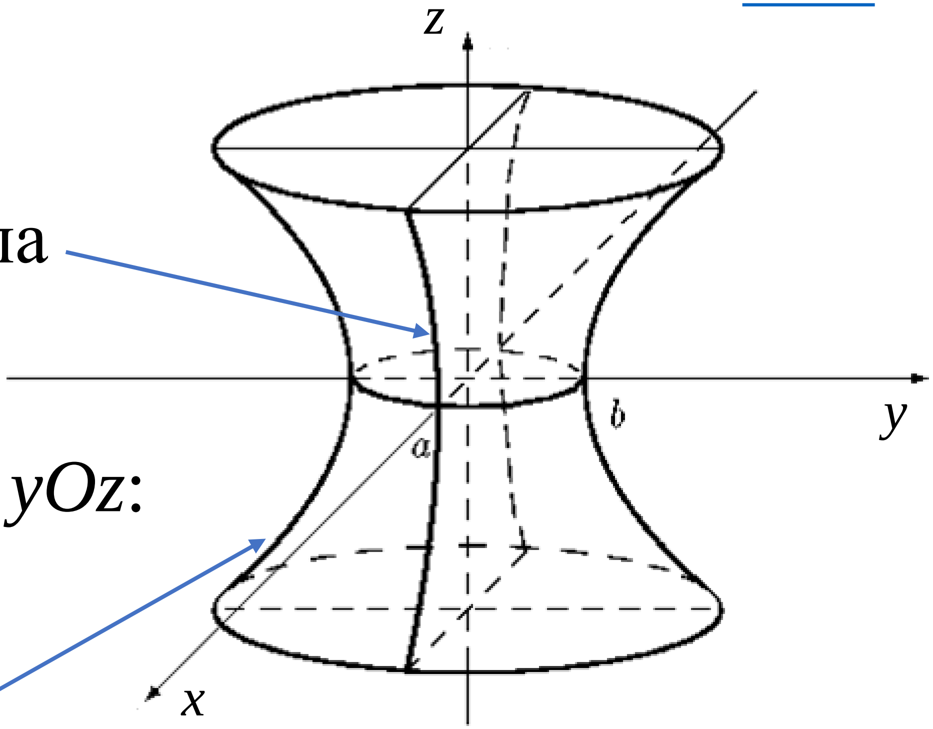
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \text{гипербола}$$

Сечение плоскостью yOz:

$x = 0 \Rightarrow$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \text{гипербола}$$

Изображение взято с САЙТА



Однополостный гиперболоид

Сечение плоскостью || xOy:

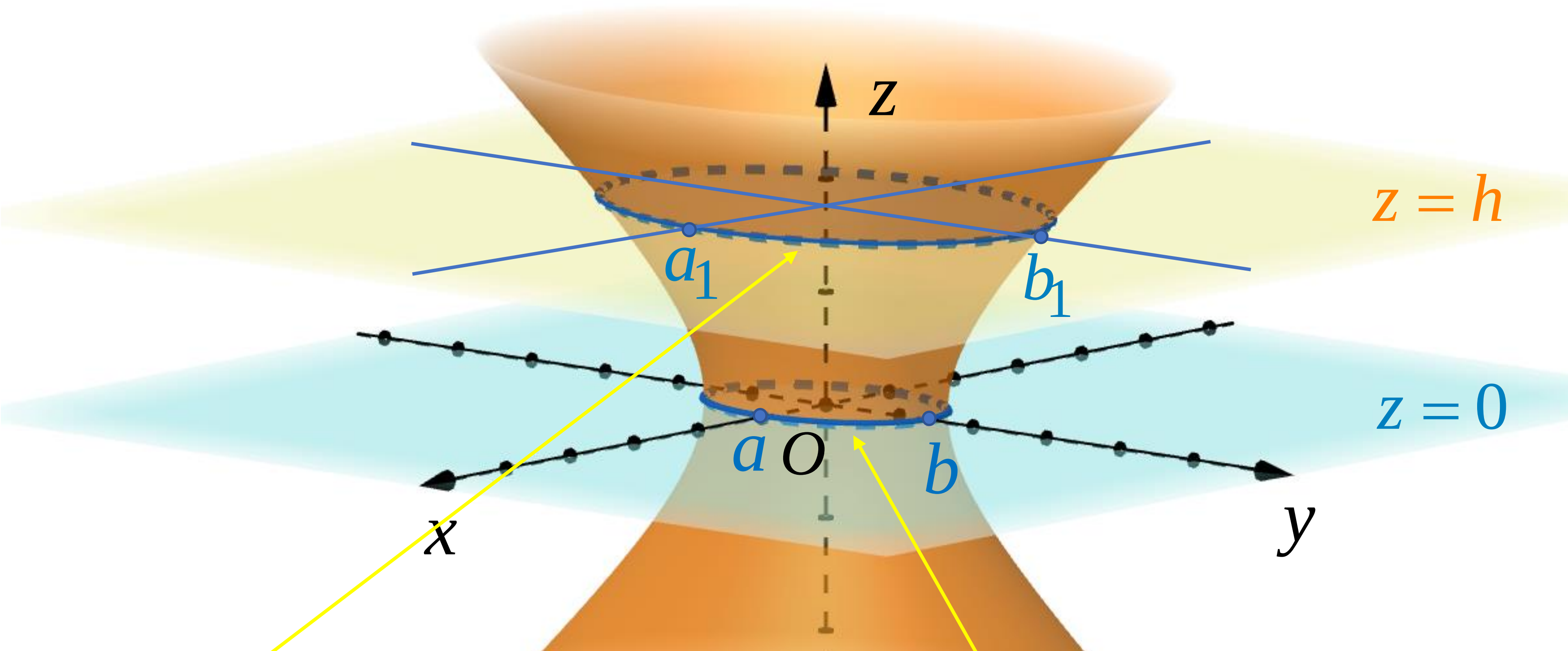
$z = h,\ h$ – любое $\Rightarrow$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 1 \ \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \underbrace{1 + \frac{h^2}{c^2}}_{d^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = d^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\underbrace{(ad)^2}_{a_1}} + \frac{y^2}{\underbrace{(bd)^2}_{b_1}} = 1 \ \Rightarrow \frac{x^2}{a_1{}^2} + \frac{y^2}{b_1{}^2} = 1 - \text{эллипс}$$

Однополостный гиперболоид



$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,\ z=h-\text{эллипс}\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0-\text{эллипс}$$

Однополостный гиперболоид вращения

При $a = b$ получаем уравнение

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

однополостного гиперболоида вращения

- поверхности, полученной вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ вокруг оси Oz

(см. слайд ▶ или вторую поверхность слева на титульном листе)

Двуполостный гиперболоид

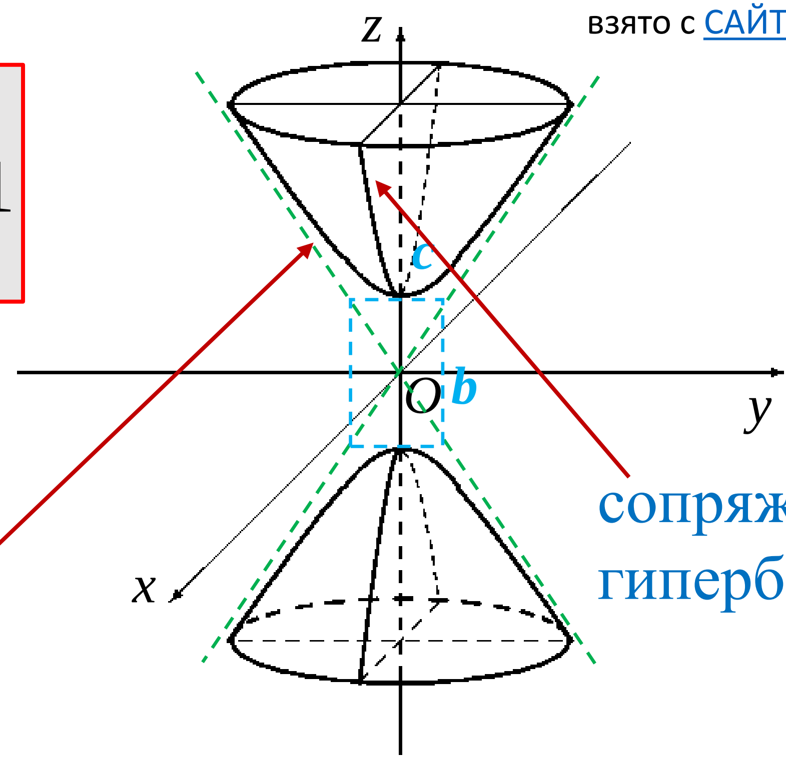
<u>Опр</u>. Двуполостным гиперболоидом называется поверхность II порядка с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

Изображение взято с [САЙТА]

Сечения плоскостью yOz:

$$x=0 \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



Однополостный гиперболоид

Сечение плоскостью xOz: аналогично.

Сечение плоскостью $||\ xOy$:

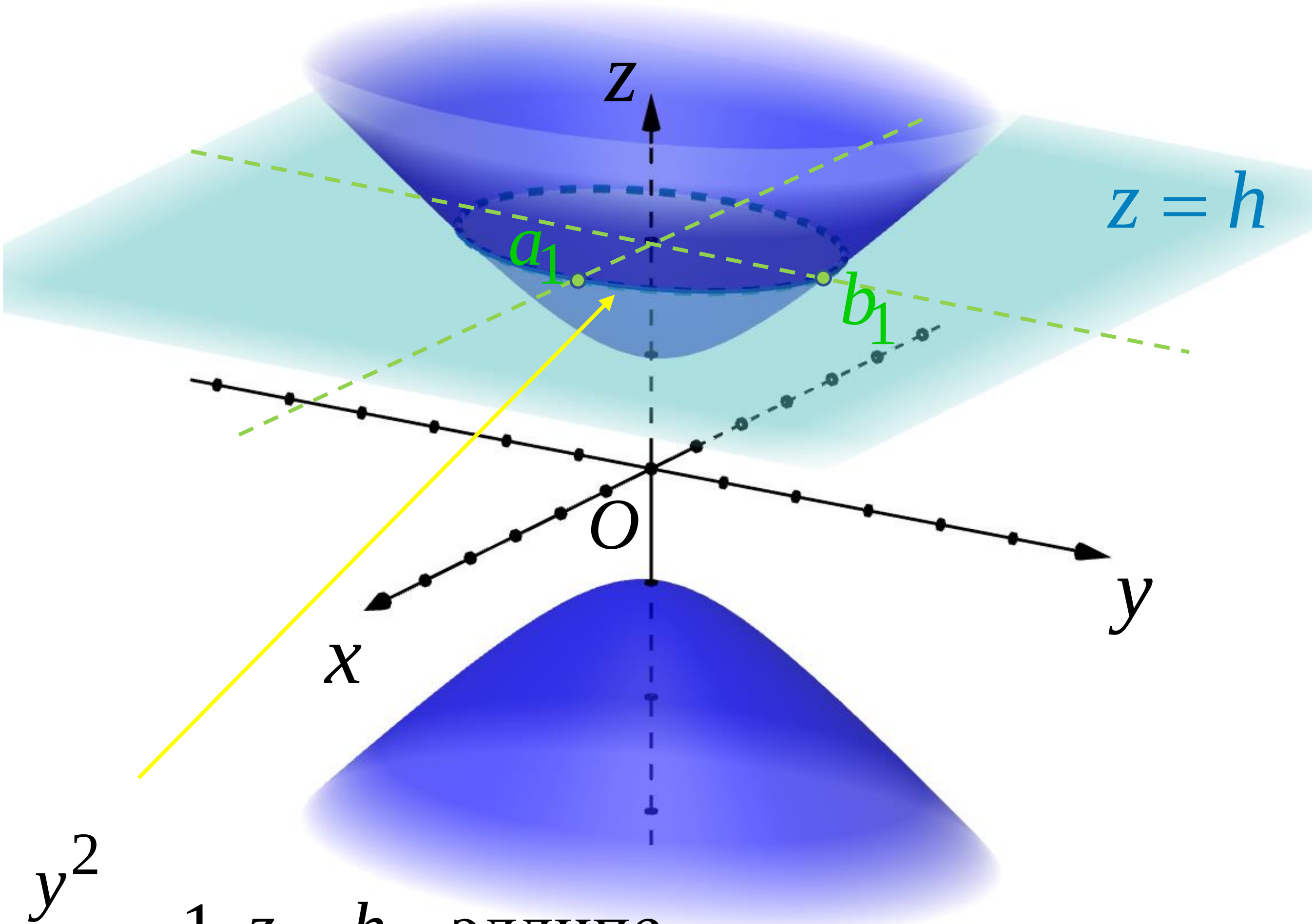
$$z = h \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{h^2}{c^2}=-1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\underbrace{\frac{h^2}{c^2}-1}_{d^2},$$

если $\frac{h^2}{c^2}-1>0 \Leftrightarrow \frac{h^2}{c^2}>1 \Leftrightarrow \left|\frac{h}{c}\right|>1$, т.е. $\boxed{|h|>c}$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=d^2\left(:d^2\right) \Rightarrow \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 - \text{эллипс}$$

Двуполостный гиперболоид



$$\frac{x^2}{a_1^{\,2}}+\frac{y^2}{b_1^{\,2}}=1,\ z=h-\text{эллипс}$$

Двуполостный гиперболоид вращения

При $a = b$ получаем уравнение

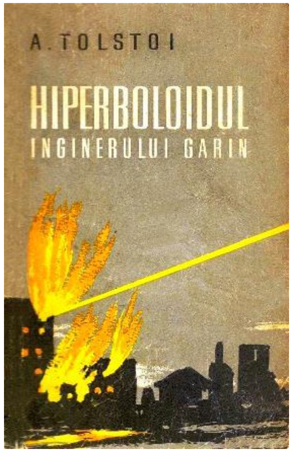
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

двуполостного гиперболоида вращения

- поверхности, полученной вращением сопряженной гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ вокруг оси Oz

(см. слайд ▷)

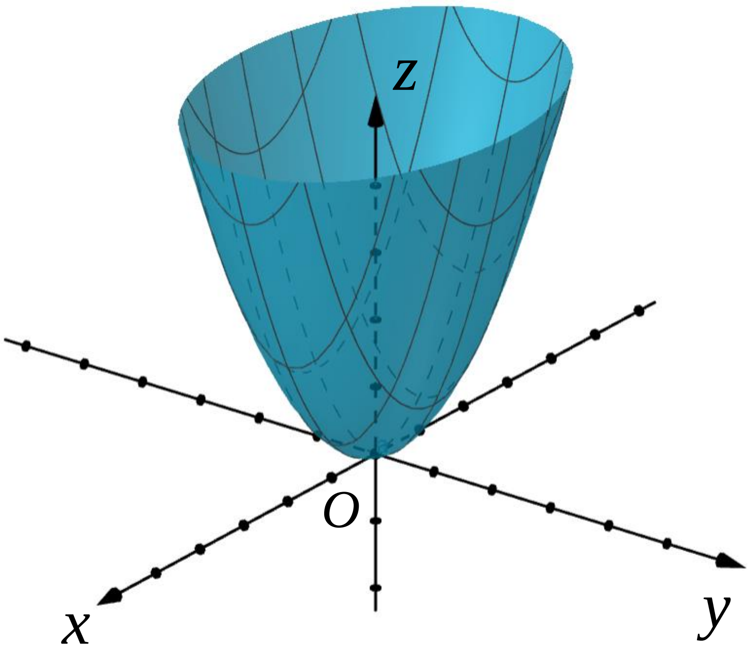


А.Н.Толстой. «Гиперболоид инженера Гарина»

Эллиптический параболоид

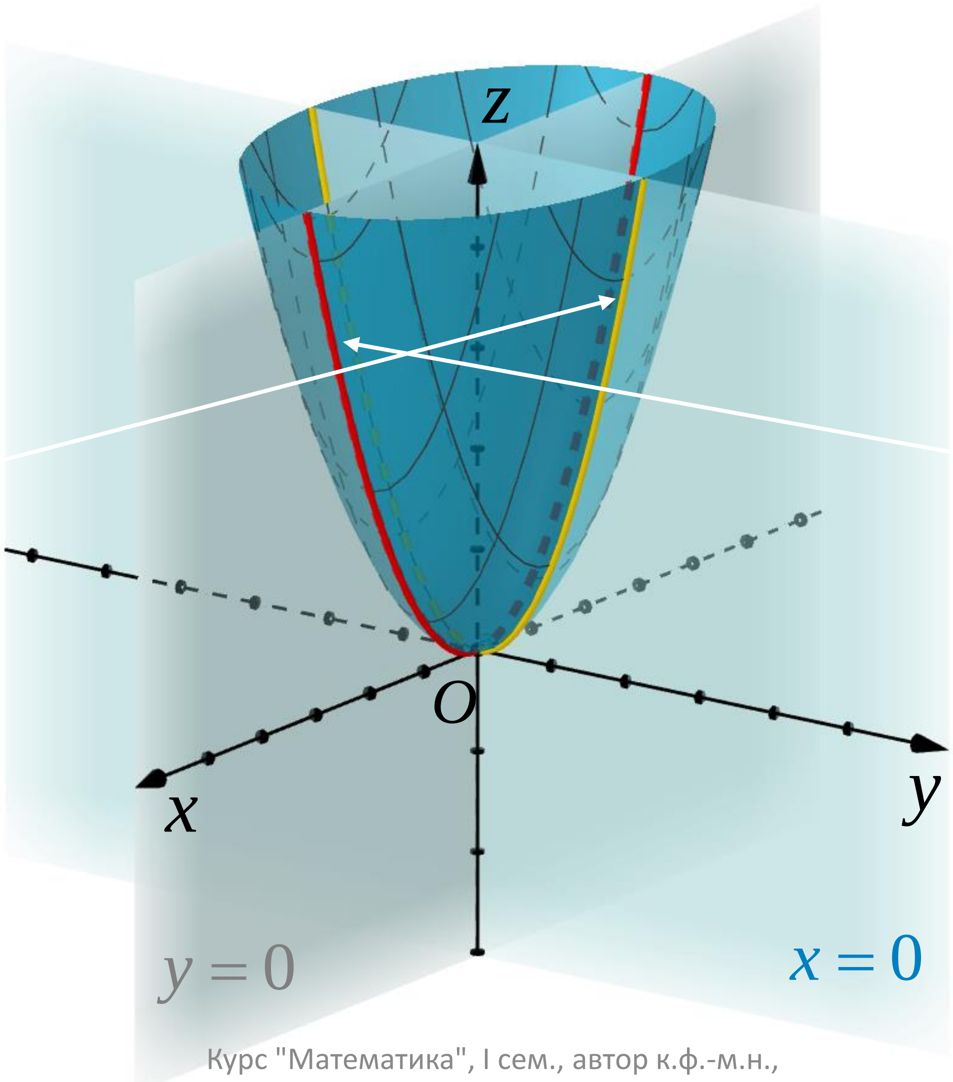
<u>Опр</u>. Эллиптическим параболоидом называется поверхность II порядка с каноническим уравнением

$$\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$



Эллиптический параболоид

$$x = 0$$
$$\Downarrow$$
$$z = \frac{y^2}{b^2}$$
парабола



$$y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$z = \frac{x^2}{a^2}$$
парабола

Эллиптический параболоид

$$z = 0$$

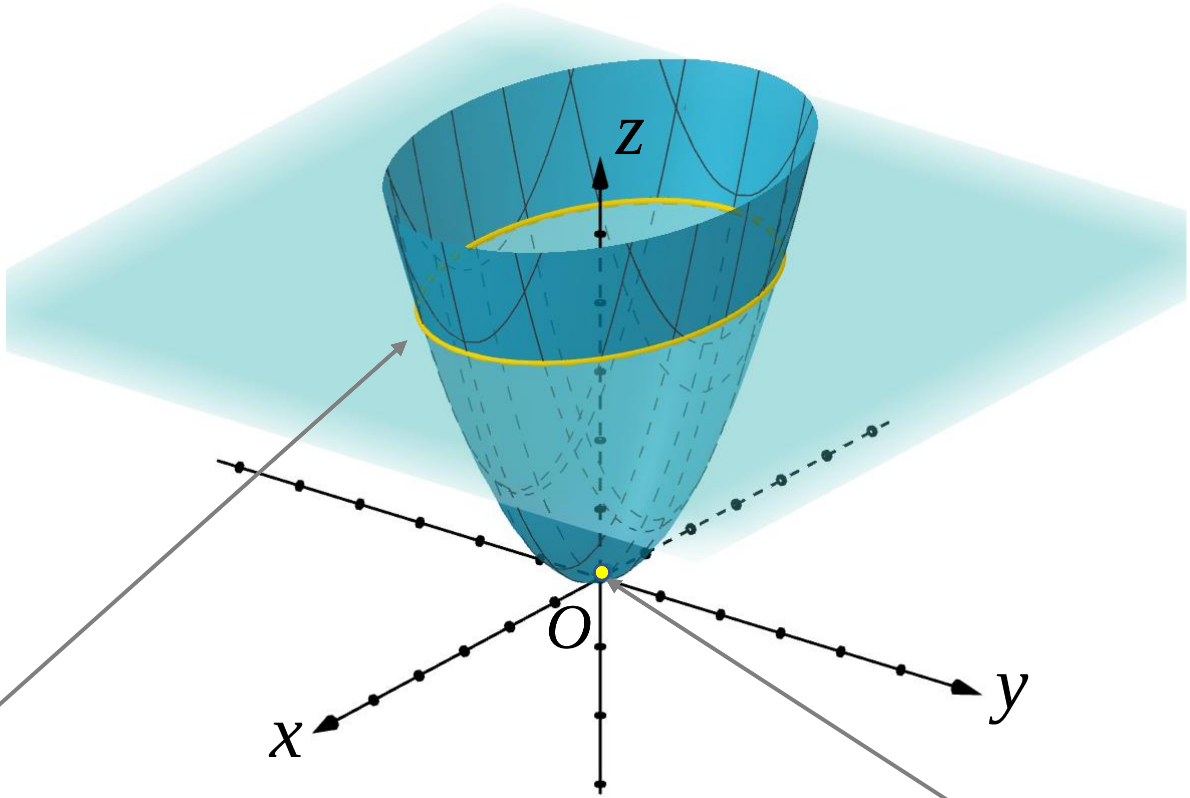
$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0,\ y = 0$$

$$\Downarrow$$



1) Сечением плоскостью xOy является точка O.

2) Сечением плоскостью $z = h$, $h>0$, является эллипс (самост.).

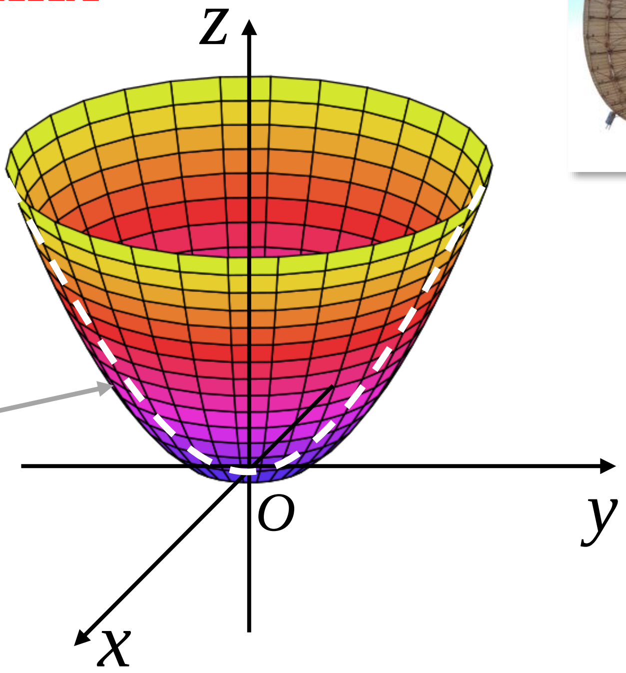
Эллиптический параболоид вращения

При $a = b$ получаем уравнение

$$\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}}$$

параболоида вращения

- поверхности, полученной вращением параболы (?) вокруг оси (?)



Гиперболический параболоид

Опр. Гиперболический параболоидом называется поверхность II порядка с каноническим уравнением

$$\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

$x = 0 \Rightarrow z = -\dfrac{y^2}{b^2}$ - парабола

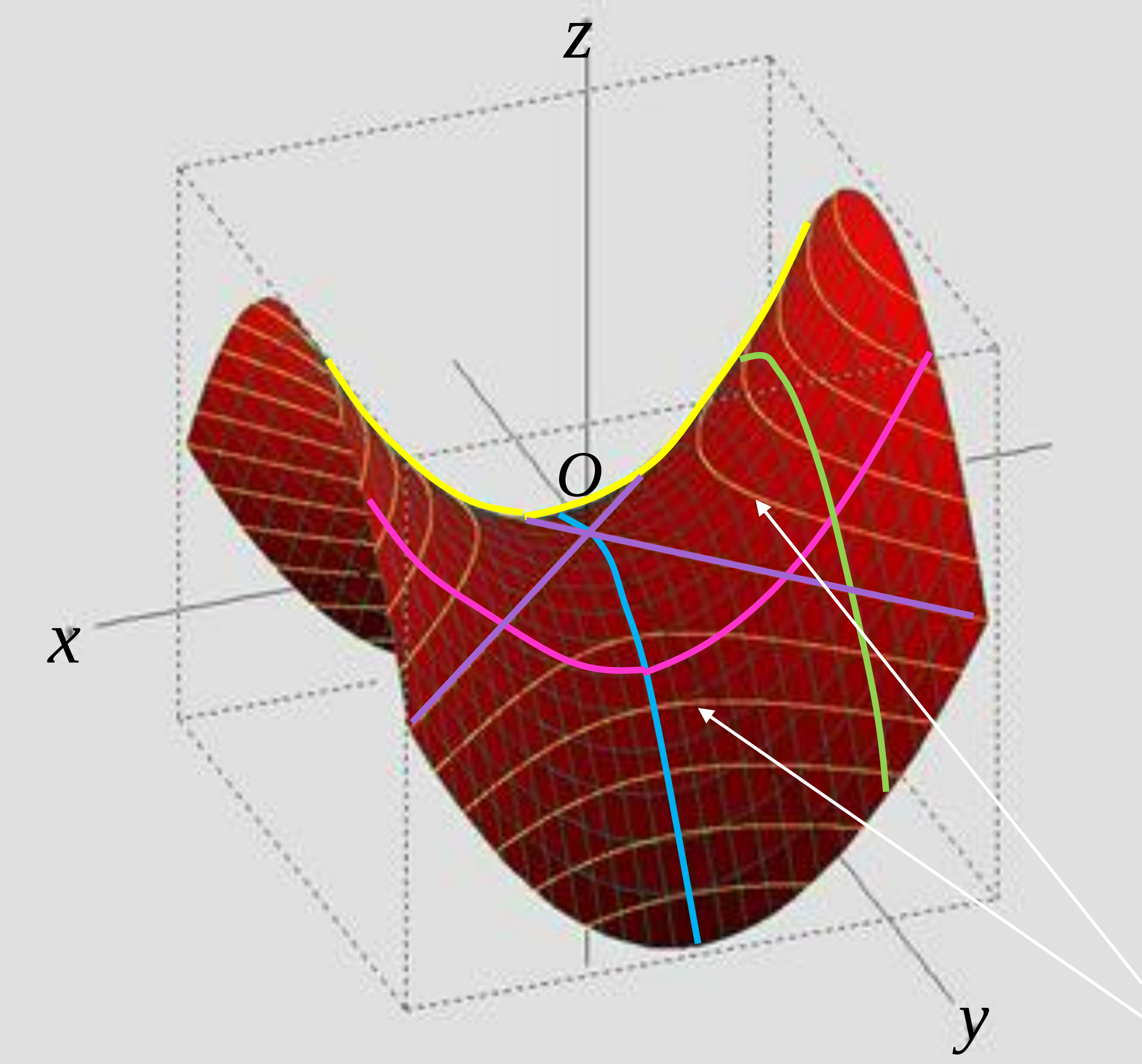
$y = 0 \Rightarrow z = \dfrac{x^2}{a^2}$ - парабола

$z = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y^2}{b^2} \Rightarrow$

$\dfrac{x}{a} = \pm\dfrac{y}{b} \Rightarrow y = \pm\dfrac{b}{a}x$

пара пересек. прямых

Гиперболический параболоид



$$z = -\frac{y^2}{b^2},\ x = 0$$

$$z = \frac{x^2}{a^2},\ y = 0$$

$$y = \pm\frac{b}{a}x,\ z = 0$$

$$z = \frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},\ x = h$$

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2},\ y = k$$

гиперболы

Гиперболический параболоид

$$x = h \Rightarrow z = \frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$ - парабола

$$y = k \Rightarrow z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}$$ - парабола

$z = \text{const} \Rightarrow$ *гиперболы* (самост.)

Пример. *Закон Менделеева-Клайперона:*
$PV = kT$ ($P = x$, $V = y$, $T = z$),
$z = 1/k\ xy$ – гиперболический параболоид, повернутый на 45 град. вокруг оси Oz.
Сечения плоскостью $T = \text{const}$ ($z = \text{const}$, $z > 0$) – изотермы.

Конус

<u>Опр</u>. Конусом называется поверхность II порядка с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}}$$

Сечения плоскостью yOz:

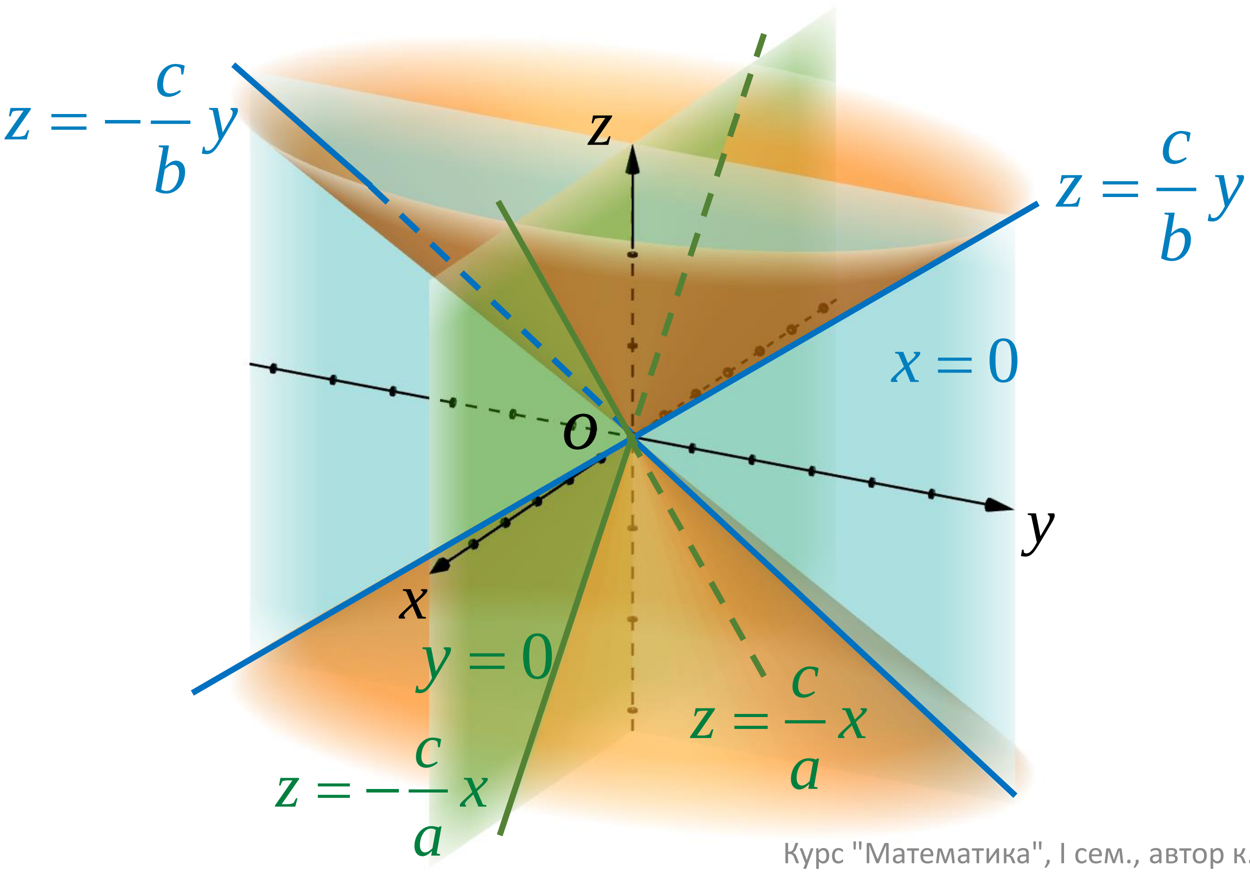
$$x=0\ \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\Rightarrow\left|\frac{y}{b}\right|=\left|\frac{z}{c}\right|\Rightarrow\frac{y}{b}=\pm\frac{z}{c}$$

$z=\pm\dfrac{c}{b}y$ - пара пересекающихся прямых

Конус

Сечение плоскостью xOz: $y = 0$ –

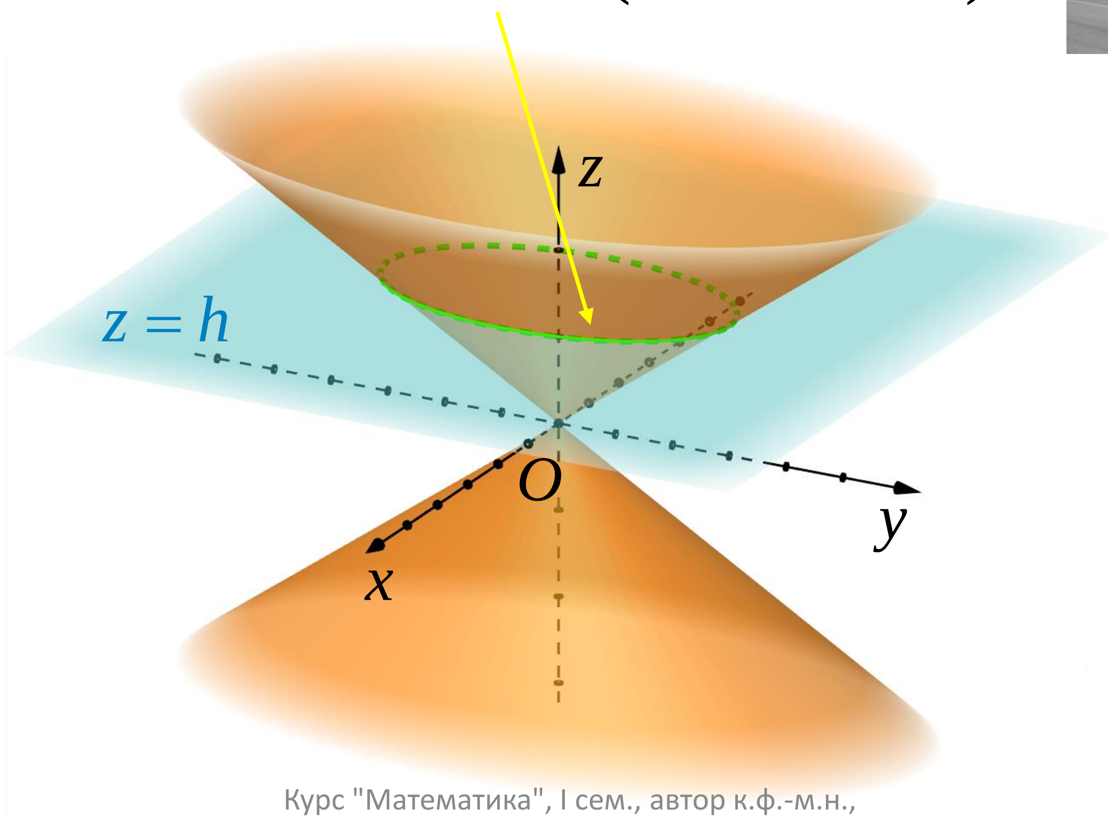
пара пересекающихся прямых (самост.) $z = \pm \dfrac{c}{b} y$



Конус

Сечение плоскостью || xOz:

$z = h$, h – любое: эллипс (самостоят.)



Эллиптический цилиндр

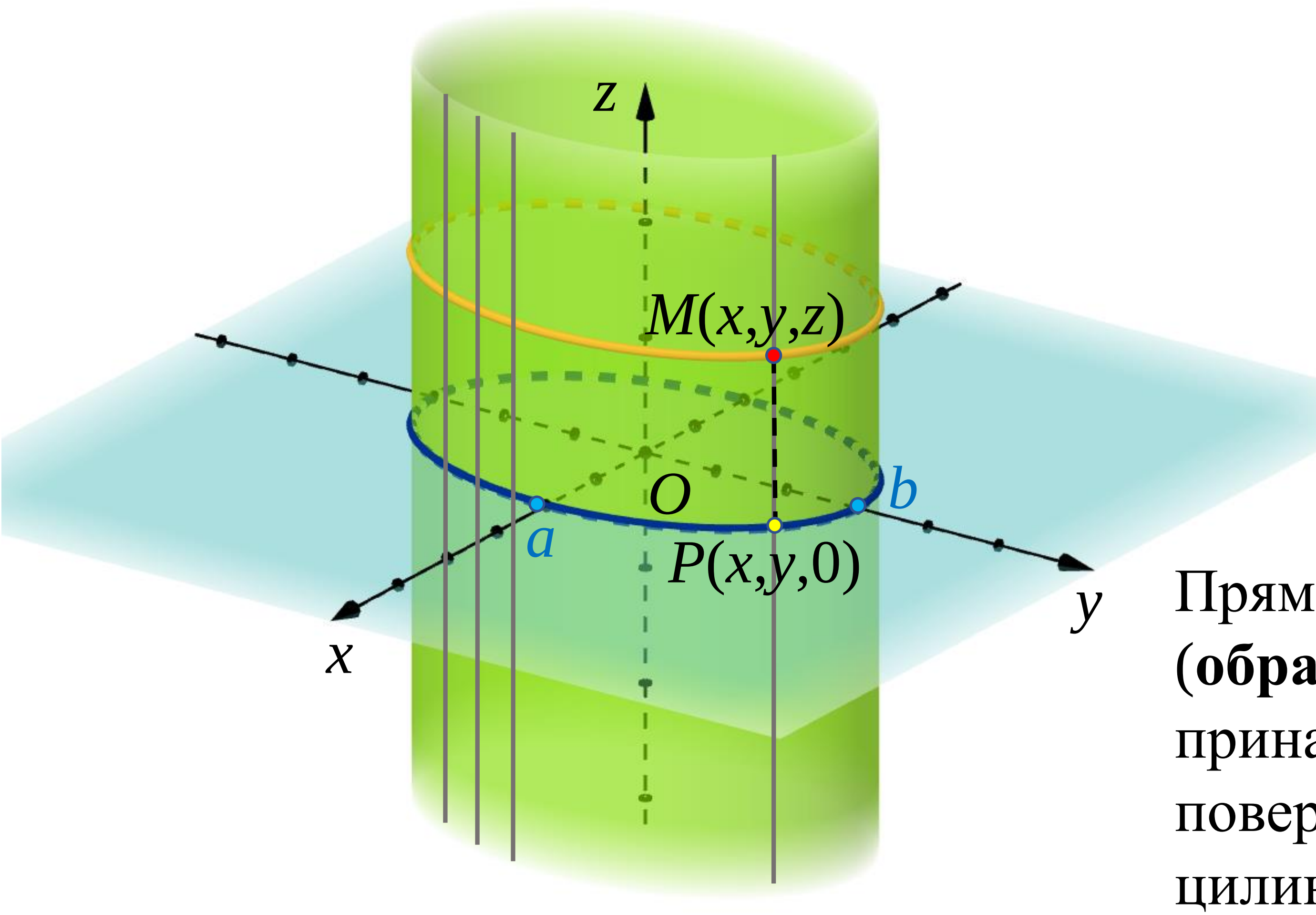
Опр. Эллиптическим цилиндром называется поверхность II порядка с каноническим уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Точка $M(x,y,z)$ принадлежит **цилиндру**

$\Leftrightarrow$ ее проекция $P(x,y,0)$ принадлежит **направляющей** цилиндра – эллипсу в плоскости xOy с уравнением

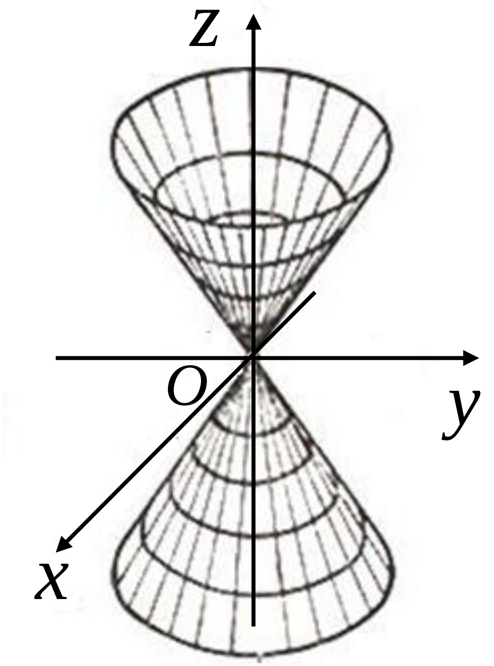
Эллиптический цилиндр

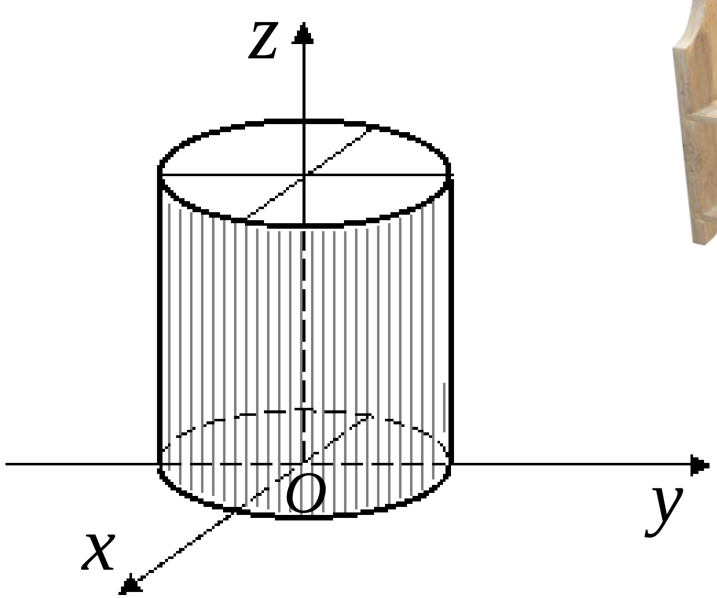


Прямая *MP* (**образующая**) принадлежит поверхности цилиндра

Круговые конус и цилиндр

При $a = b$ из уравнения конуса и цилиндра получаем уравнения кругового конуса и цилиндра (какие?)



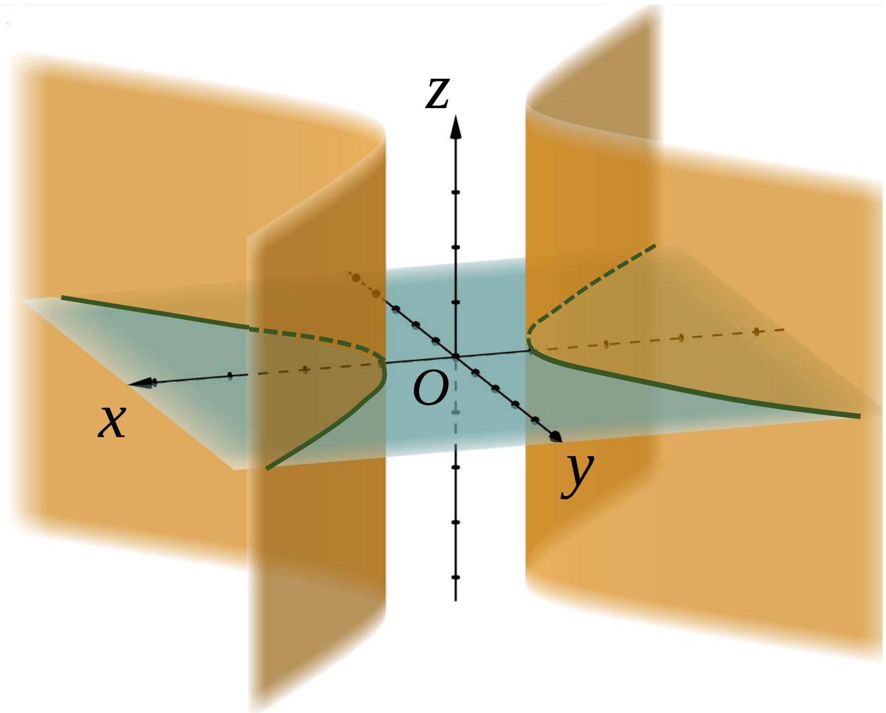


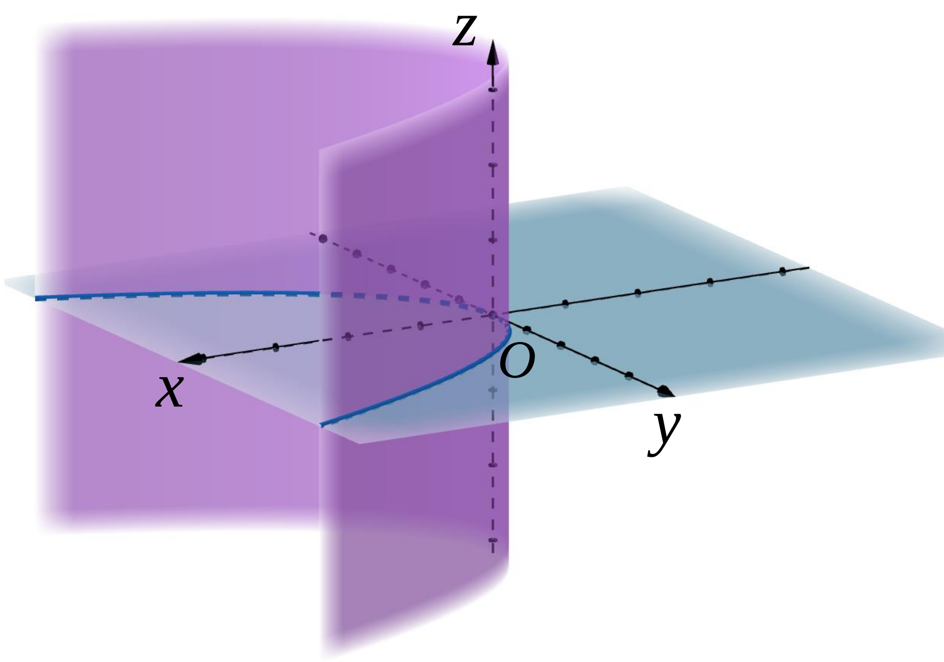
Гиперболический и параболический цилиндры

Опр. Гиперболическим цилиндром называется поверхность II порядка с каноническим уравнением $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$

Опр. Параболическим цилиндром называется поверхность II порядка с каноническим уравнением $\boxed{y^2=2px}$

Гиперболический и параболический цилиндры





$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = 2px$$