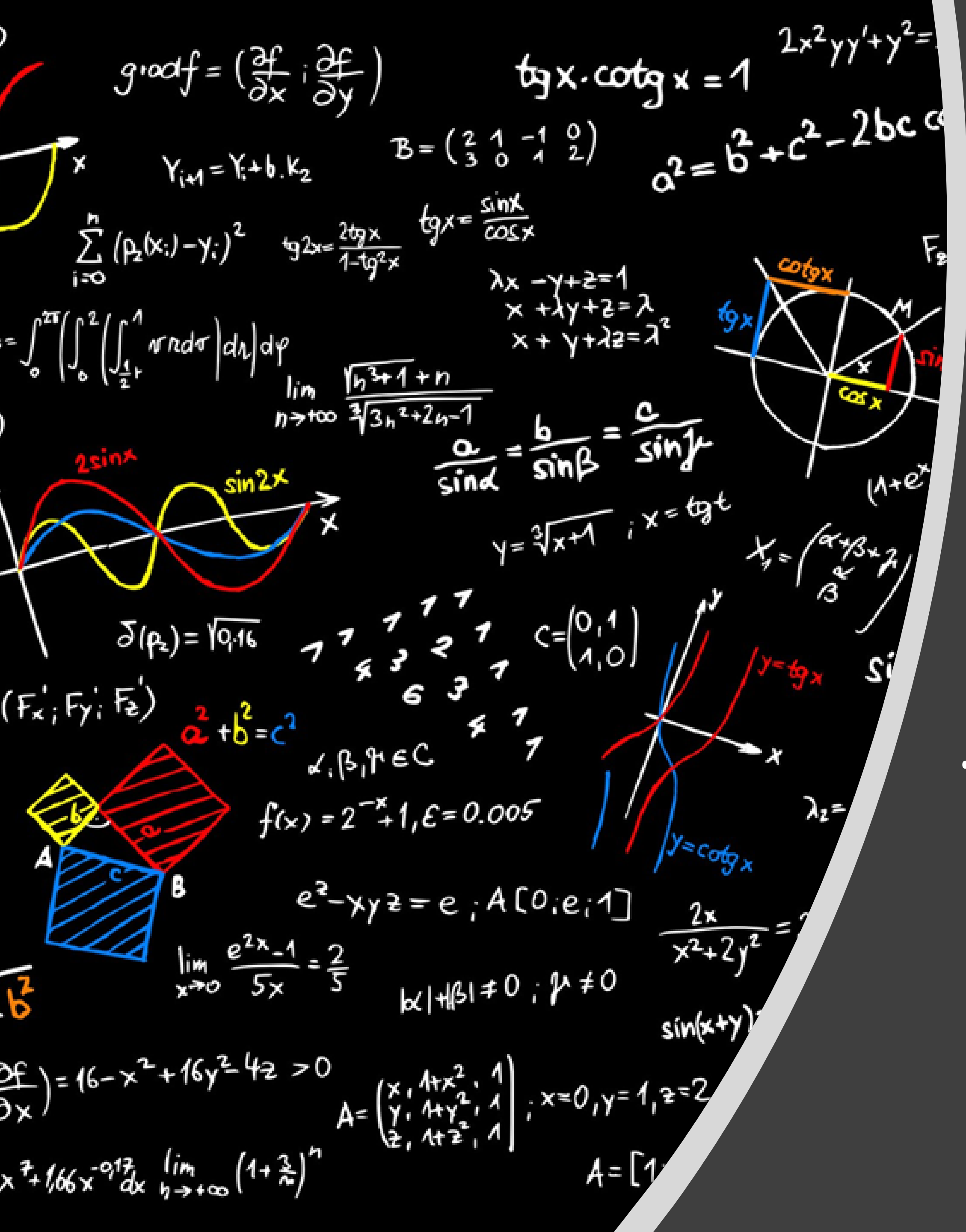


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, III семестр (II курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 7

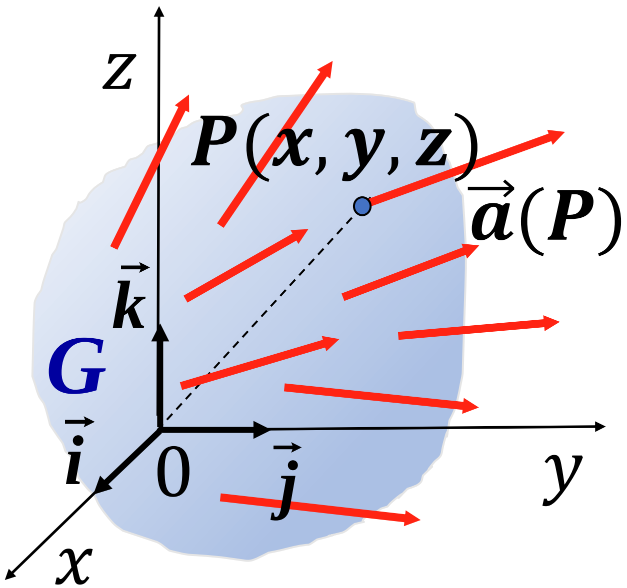
Криволинейный интеграл II рода

Лекция 7
Криволинейный интеграл II рода

1. Понятие векторного поля.
2. Понятие криволинейного интеграла II рода.
3. Свойства криволинейного интеграла.
4. Вычисление криволинейного интеграла.
5. Физический смысл криволинейного интеграла.
6. Примеры.

Понятие векторного поля

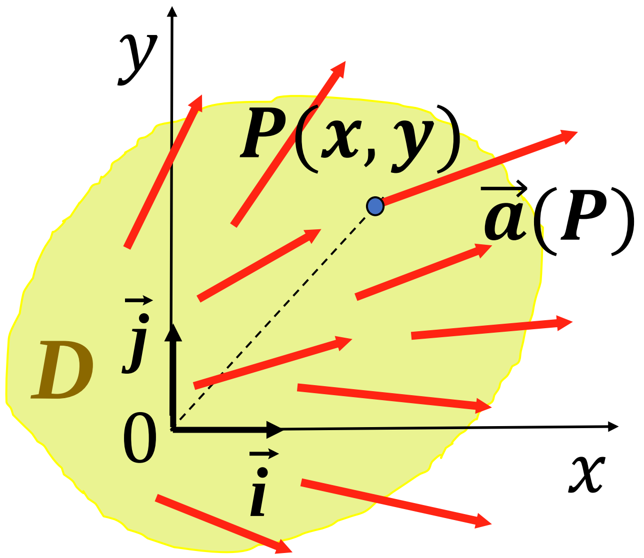
Опр. Если с каждой точкой $P(x, y, z)$ пространственной области G связана векторная функция $\vec{a} = \vec{a}(P)$, то в области G задано векторное поле.



$$\vec{a} = \vec{a}(P) = \vec{a}(x, y, z) =$$
$$= a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$$

Понятие векторного поля

Опр. Если с каждой точкой $P(x, y)$ области D на плоскости связана векторная функция $\vec{a} = \vec{a}(P)$, то в области D задано векторное поле.



$$\vec{a} = \vec{a}(P) = \vec{a}(x, y) =$$
$$= a_x(x, y)\vec{i} + a_y(x, y)\vec{j}$$

Понятие векторного поля

Опр. Мы будем говорить, что поле

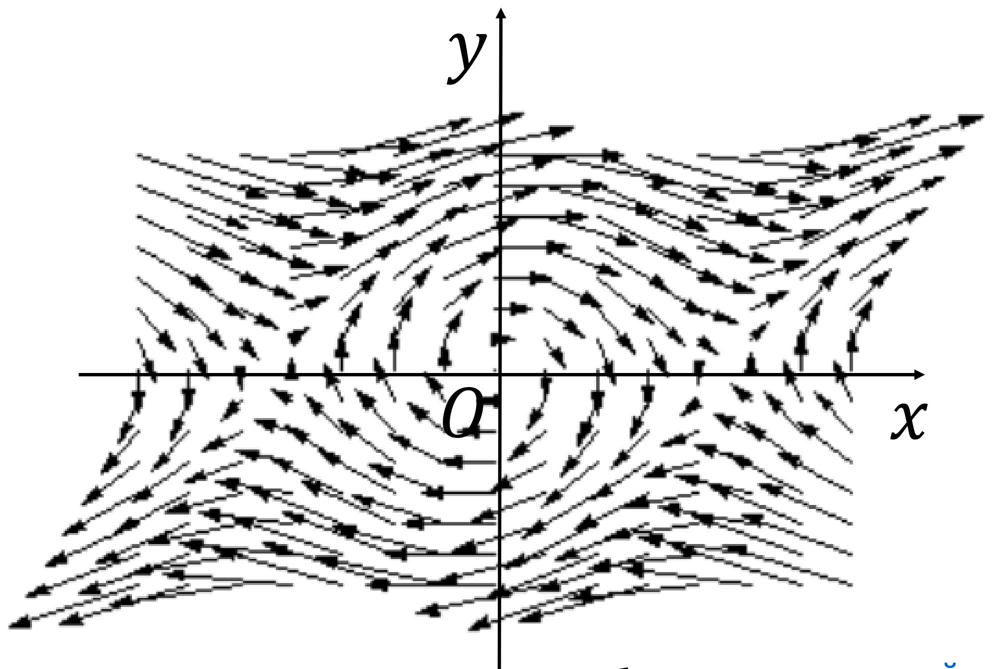
$$\vec{a} = \vec{a}(P) = \vec{a}(x, y, z) =$$
$$= a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$$

непрерывно (дифференцируемо, гладкое), если непрерывны (дифференцируемы, непрерывно дифференцируемы) функции

$$a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z)$$

Примеры векторных полей. Пример 1

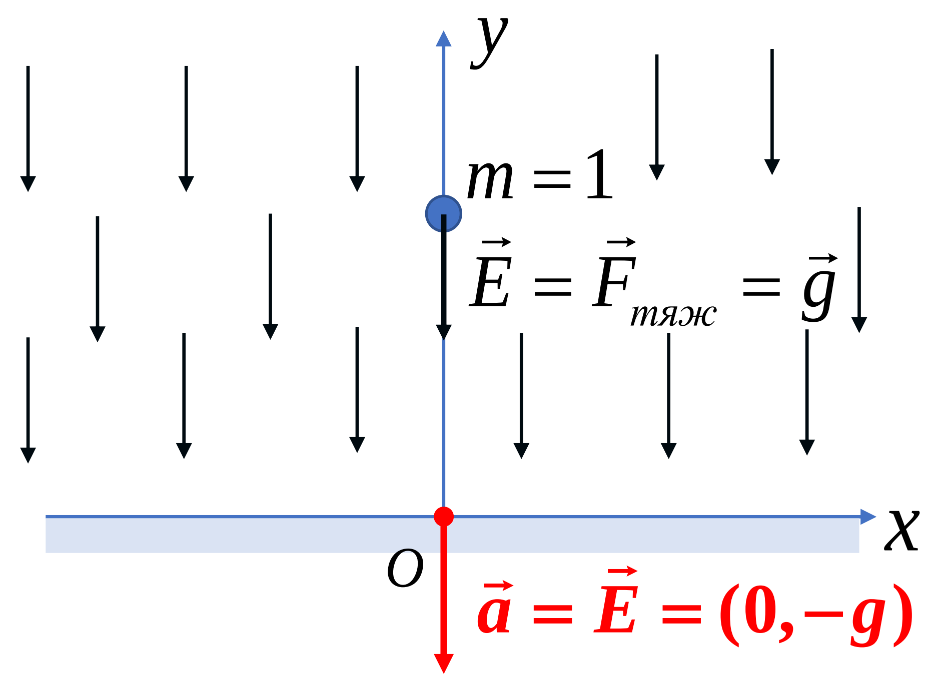
Пример 1. $\vec{a} = \left(a_x, a_y\right) = (y, -\sin x)$.



Изображение взято с САЙТА

Примеры векторных полей. Пример 2

<u>Пример 2</u>. Напряженность гравитационного поля у поверхности Земли: $\vec{a} = \vec{E} = \vec{g} = (0, -g)$.



Примеры векторных полей. Пример 3

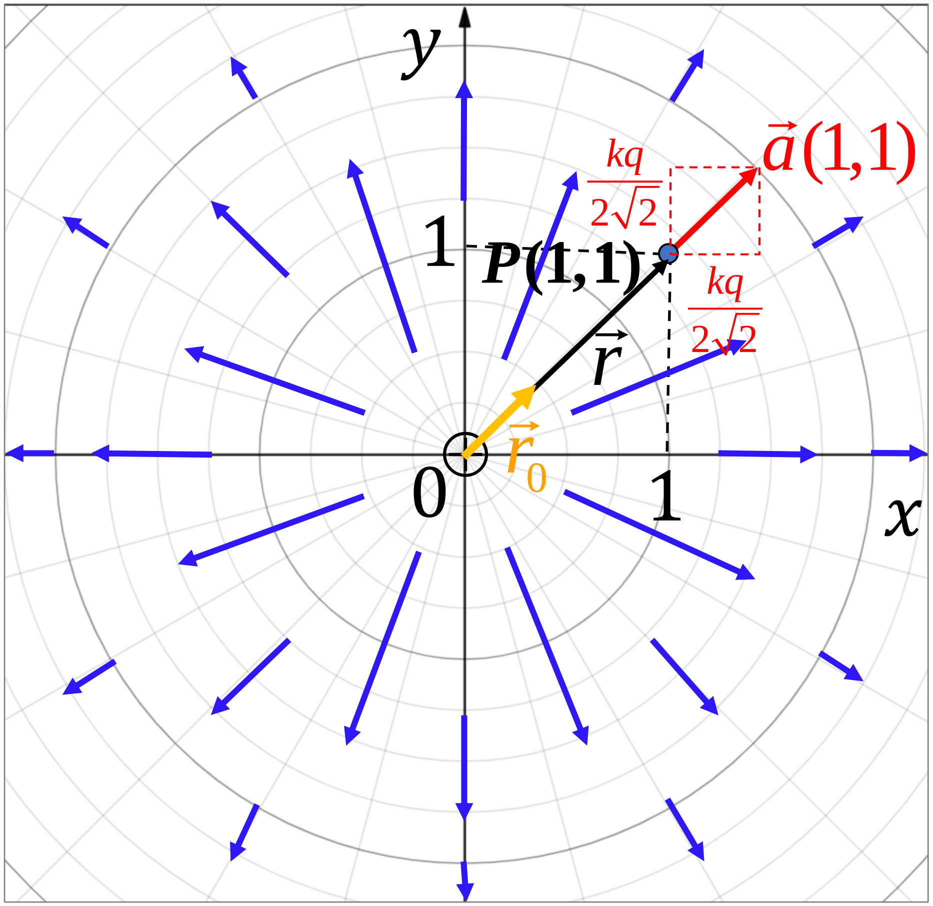
<u>Пример 3</u>. Напряженность электростатического поля точечного заряда: $\vec{a} = \vec{E}$.

$$E = \frac{k \cdot q}{r^2}, r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$ Если: $\vec{r}_0 -$ орт $\vec{r}$, то

$$\vec{E} = \frac{k \cdot q}{r^2}\vec{r}_0 = \left[r_0 = \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{k \cdot q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{k \cdot q}{r^3}\vec{r}, \ \vec{r} = (x, y)$$

$$\vec{E} = \frac{k \cdot q}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}(x, y) = k \cdot q \left(\frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}, \frac{y}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \right)$$

Примеры векторных полей. Пример 3

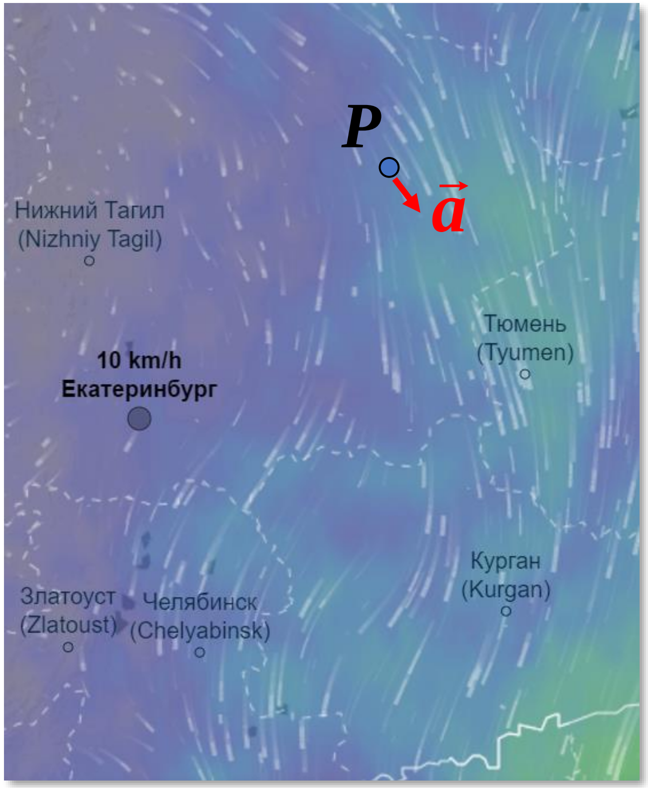


$$\vec{a}(1,1) = \vec{E}(1,1) =$$

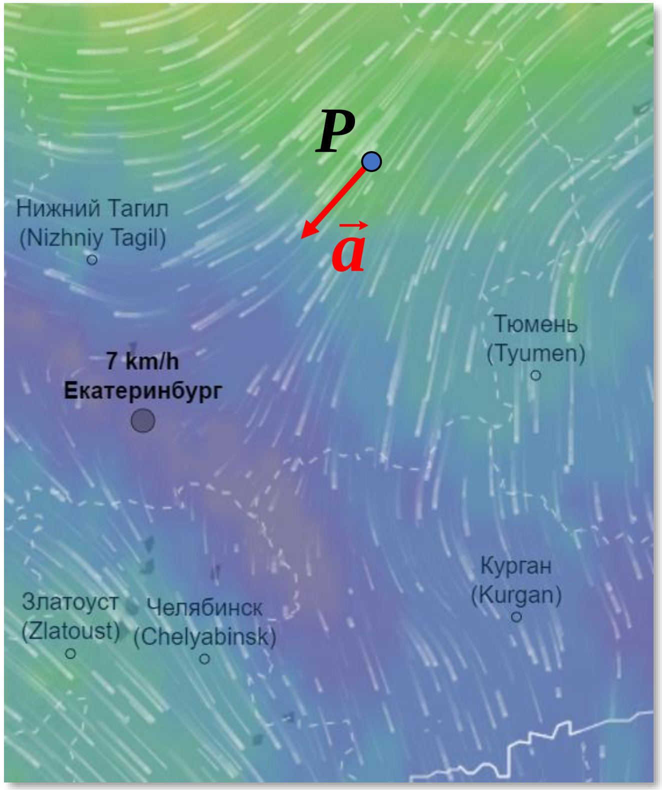
$$= k \cdot q\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

Примеры векторных полей. Пример 4

Информация взята с [САЙТА]



Карта ветров. 30.07.2022, 100 м над землей



Карта ветров. 30.07.2022, 12000 м над землей

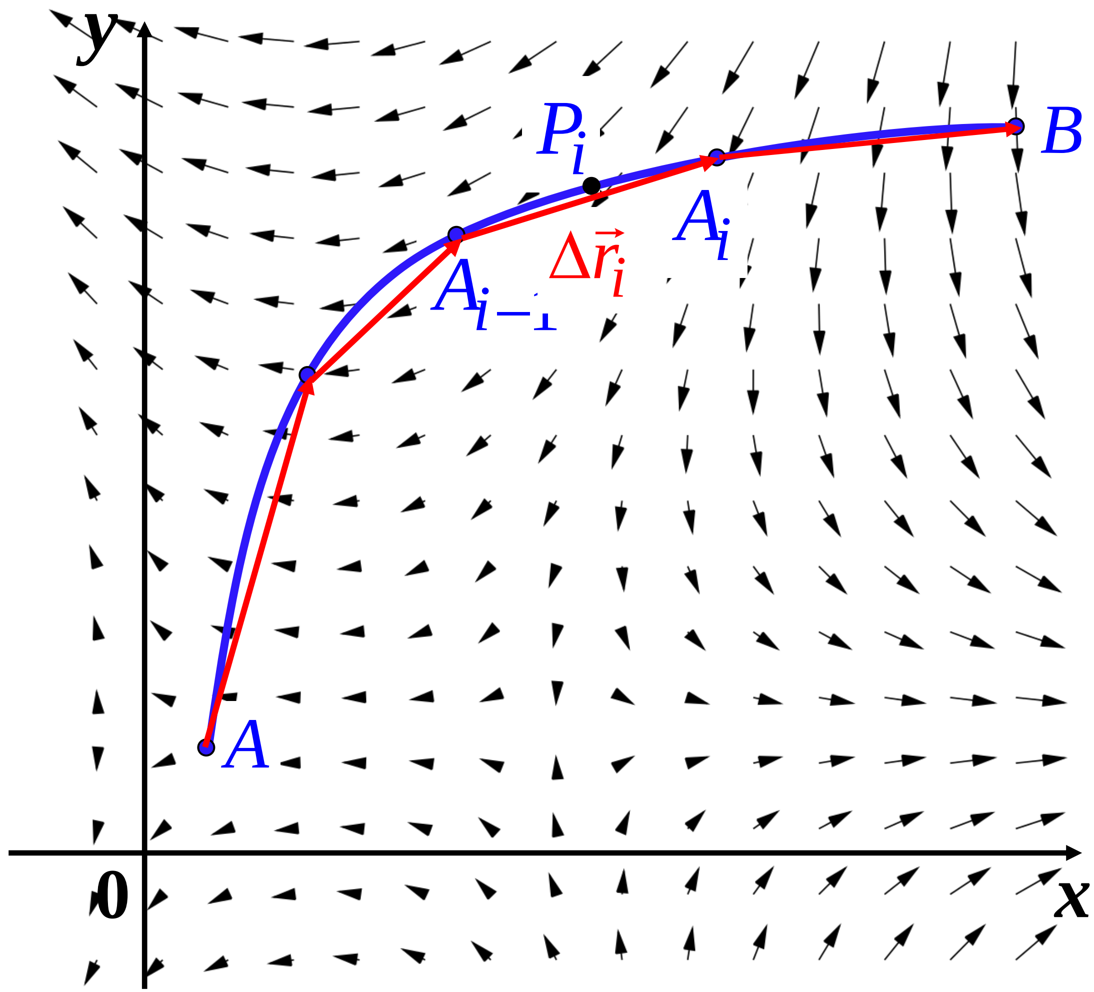
Этот слайд можно не конспектировать

Понятие криволинейного интеграла на плоскости

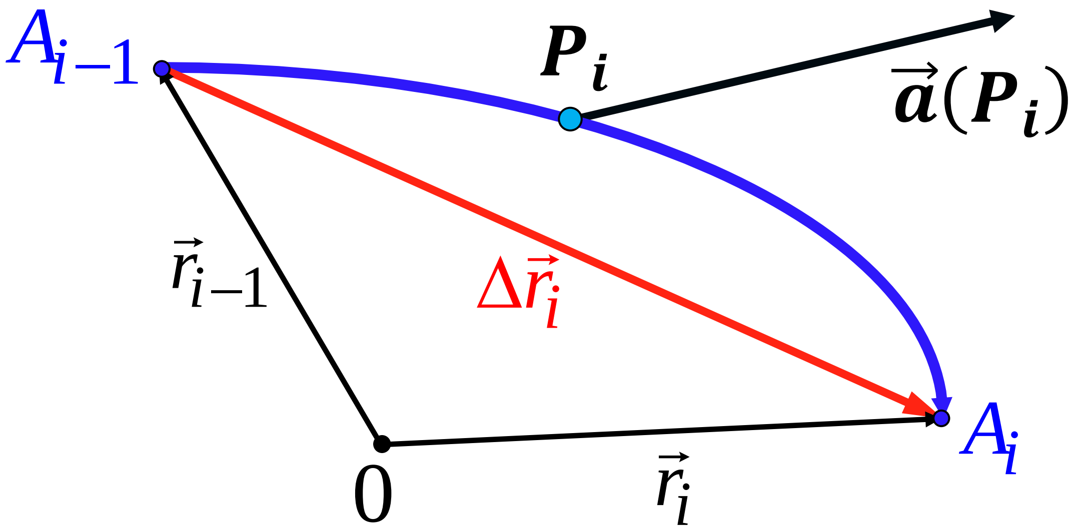
Пусть

- $\overset{\frown}{AB}$ – **ориентированная** (с заданным направлением от точки A к точке B) дуга кривой;
- $\vec{a} = \vec{a}(P)$ – векторное поле, определенное в любой точке дуги $\overset{\frown}{AB}$.
- Разобьем дугу $\overset{\frown}{AB}$: $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$;
  $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ – элементарная дуга с номером i;
  P_i – фиксированная точка i-й дуги.

Понятие криволинейного интеграла



Понятие криволинейного интеграла



$$\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$$

Понятие криволинейного интеграла

Обозначим **интегральную** сумму через

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (\vec{a}(P_i), \Delta\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_x(P_i)\Delta x_i + a_y(P_i)\Delta y_i\right)$$

Скалярное произведение векторов

Здесь

$$\vec{a}(P_i) = (a_x(P_i), a_y(P_i)) = (a_x(x_i, y_i), a_y(x_i, y_i))$$

$$\Delta\vec{r}_i = (\Delta x_i, \Delta y_i)$$

Понятие криволинейного интеграла

Рассмотрим предел

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\vec{a}(P_i),\Delta\vec{r}_i) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(a_x(x_i,y_i)\Delta x_i + a_y(x_i,y_i)\Delta y_i\right)$$

где $\lambda = \max_i |\Delta\vec{r}_i|$.

Понятие криволинейного интеграла

Если этот предел существует и не зависит от способа разбиения дуги на участки и от выбора точки на дуге, то он называется криволинейным интегралом II рода векторного поля $\vec{a}$ по дуге $\overset{\frown}{AB}$ в направлении от A до B и обозначается

Понятие криволинейного интеграла

$$\int\limits_{\smile AB} (\vec{a}(P), d\vec{r}) = \int\limits_{\smile AB} a_x(x,y)dx + a_y(x,y)dy$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл II рода в пространстве.

Существование криволинейного интеграла II рода

Теорема 1. Пусть

- $\overset{\frown}{AB}$ – **кусочно−гладкая** (имеет конечное число точек излома), ориентированная дуга кривой;
- $\vec{a} = \vec{a}(P)$ – **непрерывное векторное поле**, определенное в любой точке дуги $\overset{\frown}{AB}$.

Существование криволинейного интеграла II рода

Тогда криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\vec{a}(P), d\vec{r})$$

существует.

Без <u>док-ва</u>.

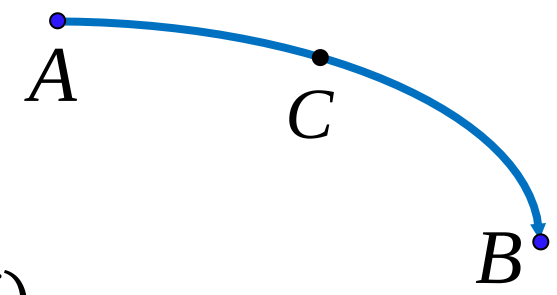
Свойства криволинейного интеграла

$$1)\ \int\limits_{\breve{AB}} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2, d\vec{r}) = \int\limits_{\breve{AB}} (\vec{a}_1 d\vec{r}) + \int\limits_{\breve{AB}} (\vec{a}_2 d\vec{r})$$

$$2)\ \int\limits_{\breve{AB}} (\lambda\vec{a}, d\vec{r}) = \lambda \int\limits_{\breve{AB}} (\vec{a}, d\vec{r})$$

Свойства криволинейного интеграла

$$3)\ \int\limits_{\smile{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{\smile{AC}} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int\limits_{\smile{CB}} (\vec{a}, d\vec{r})$$



$$4)\ \int\limits_{\smile{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = -\int\limits_{\smile{BA}} (\vec{a}, d\vec{r})$$

Вычисление криволинейного интеграла

Теорема 2. Пусть поле

$$\vec{a}(x,y,z) = \left(a_x(x,y,z), a_y(x,y,z), a_z(x,y,z)\right)$$

непрерывно, а кривая

$$\breve{AB}: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha, \beta] - \text{гладкая} \\ z = z(t), \end{cases}$$

(т.е. непрерывно дифференцируема)

Вычисление криволинейного интеграла

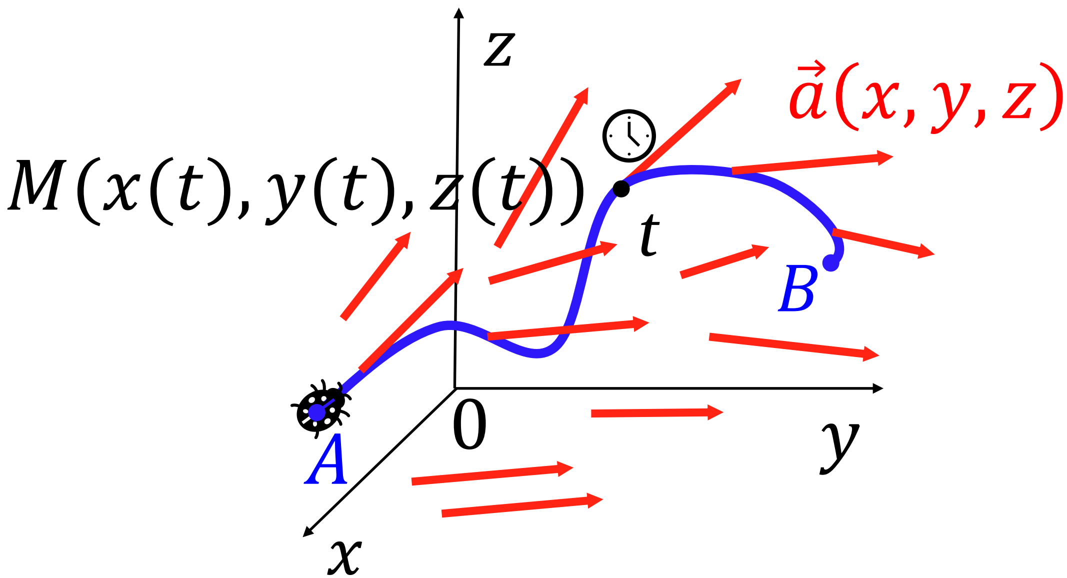
Тогда $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} a_x dx + a_y dy + a_z dz =$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$+ a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt$$

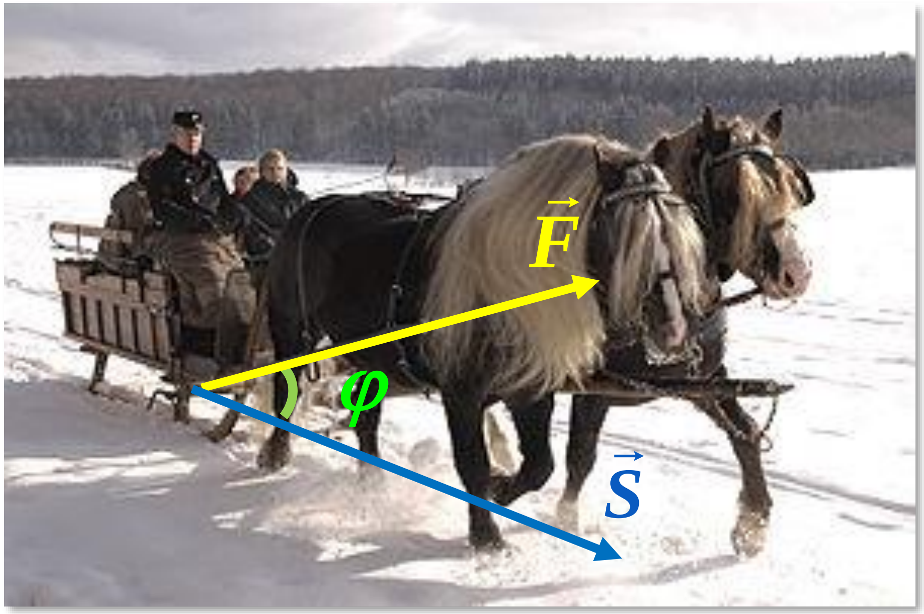
Криволинейный интеграл вычисляется сведением к определенному!

Вычисление криволинейного интеграла. Иллюстрация



Физический смысл скалярного произведения (повторение)

<u>Физический смысл скалярного произведения</u>: работа постоянной силы по перемещению тела.



Этот слайд можно не конспектировать

$$A = F \cdot S \cdot \cos\varphi =$$

$$= \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos \widehat{\vec{F}\vec{S}} = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

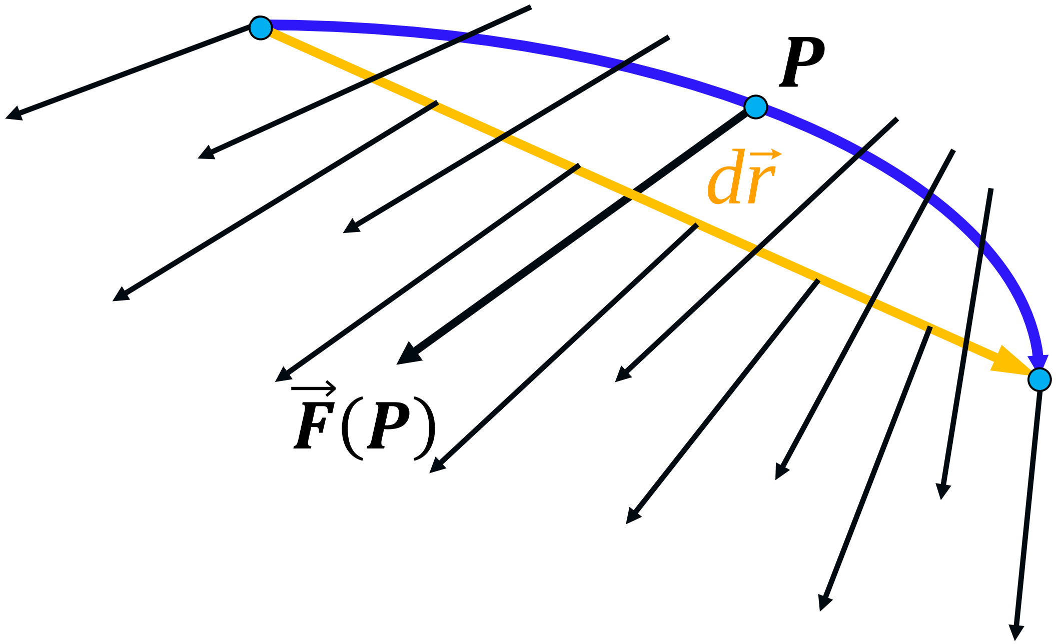
Физический смысл криволинейного интеграла II рода

Пусть $\vec{a}(P) = \vec{F}(P) -$ непрерывное векторное (силовое) поле, $\overset{\frown}{AB}$ – кусочно-гладкая дуга кривой. Тогда

$dA = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) -$ работа силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки на вектор $d\vec{r}$.

Векторное поле $\vec{a} = \vec{F}$ считается const на небольшом участке кривой, а кривая на этом участке – прямолинейной, т.е. перемещение равно $d\overrightarrow{r}$.

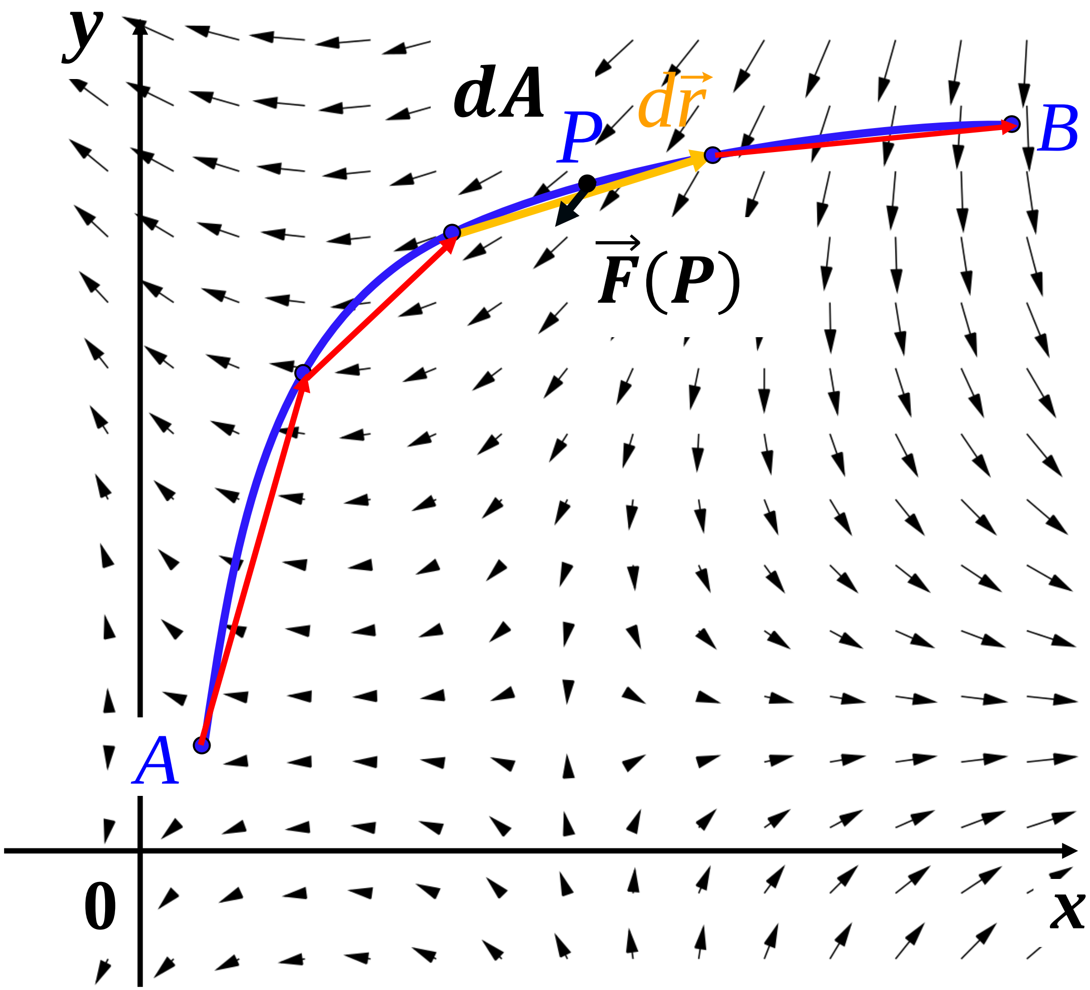
Физический смысл криволинейного интеграла II рода



Физический смысл криволинейного интеграла II рода

$A = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\vec{F}, d\vec{r})$ − работа силового поля $\vec{F}$ по перемещению материальной точки по дуге кривой $\overset{\frown}{AB}$.

Физический смысл криволинейного интеграла II рода



Вычисление криволинейного интеграла. Задача 1

Задача 1. (I способ: непосредств. вычисление) Найти работу силу тяжести поднятия груза массы $m = 1$ по винтовой лестнице радиуса R шага 1 на высоту h.

Решение: $\vec{a} = m\vec{g} = (0, 0, -g)$

$$L: \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = \frac{t}{2\pi} \end{cases}, \qquad \left.\begin{array}{l} z = 0 \Rightarrow t = \alpha = 0 \\ z = h \Rightarrow t = \beta = 2\pi h \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \in [0; 2\pi h]$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 1

$$\begin{cases} dx = -R\sin t\, dt \\ dy = R\cos t\, dt \\ dz = \dfrac{1}{2\pi} dt \end{cases}$$

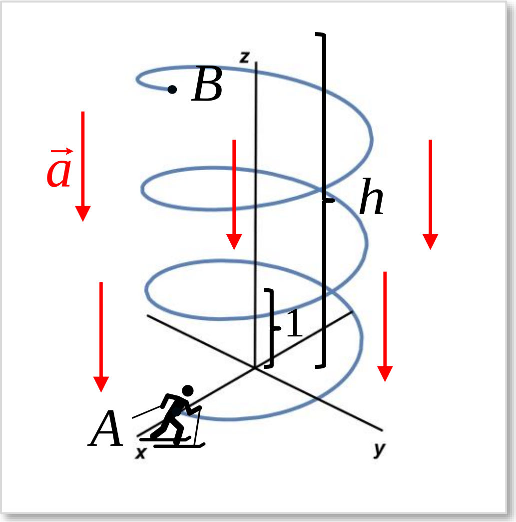
$$A = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} a_x dx + a_y dy + a_z dz =$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 1

$$= \int_0^{2\pi h} \left[0 \cdot (-R\sin t)\, dt + 0 \cdot (R\cos t)\, dt - g \cdot \frac{1}{2\pi} \right] dt =$$

$$= -\frac{g}{2\pi} \int_0^{2\pi h} dt = -\frac{g}{2\pi} t \Big|_0^{2\pi h} =$$

$$= -\frac{g}{2\pi} \cdot 2\pi h = -gh = -mgh$$



Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2

Задача 2. (I способ: непосредств. вычисление). Найти работу электростатических сил точечного заряда q по перемещению единичного заряда вдоль единичной окружности (циркуляцию) против часовой стрелки.

Решение:
(см. пример 3)

$$\vec{a} = k \cdot q \left(\frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}, \frac{y}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \right)$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2

$$L:\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases} \quad t\in[0;\,2\pi] \quad \Rightarrow \begin{cases} dx=-\sin t\,dt \\ dy=\cos t\,dt \end{cases}$$

$$A=\oint\limits_L\left(\vec{a},d\vec{r}\,\right)=\oint\limits_L a_x dx+a_y dy=$$

$$=\oint\limits_L\left[\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}dx+\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}dy\right]=[\underline{\text{Теорема 2}}]$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2

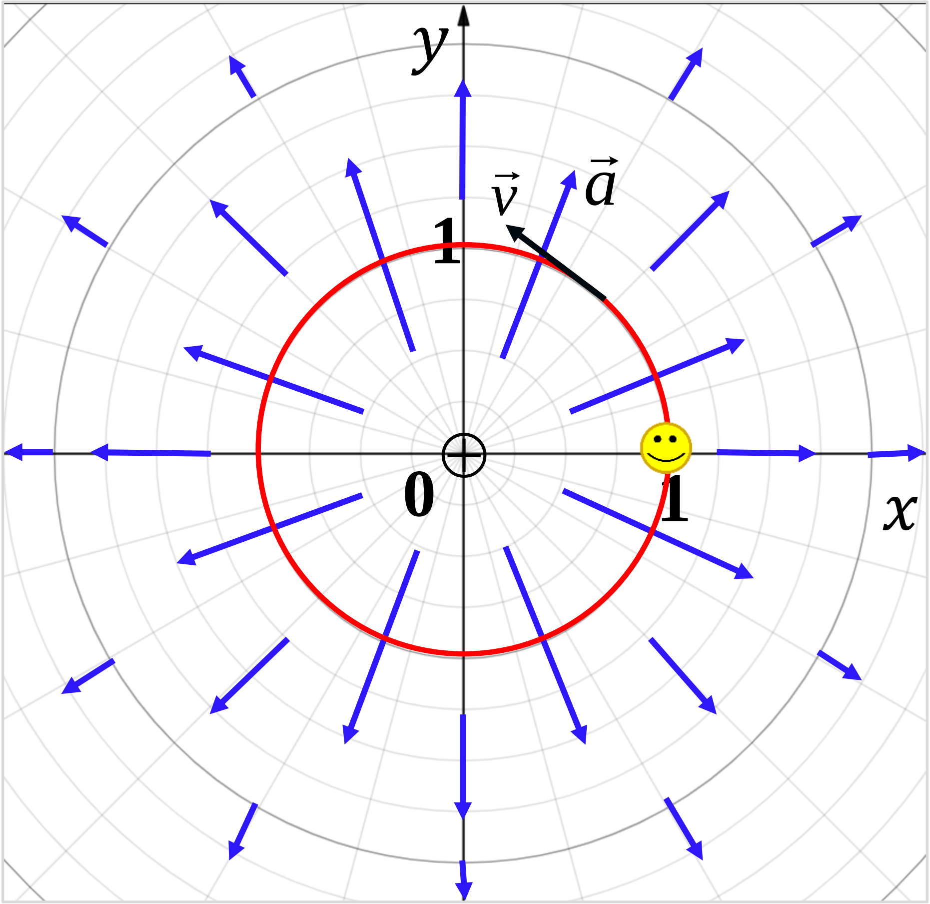
$$\left[\cos^2 t + \sin^2 t = 1\right]$$

$$= kq\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cos t}{\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)^{3/2}}(-\sin t\,dt)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin t}{\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)^{3/2}}(\cos t\,dt)\right]=$$

$$= kq\int_0^{2\pi}\left[\cos t(-\sin t)dt+\sin t\cos t\,dt\right]=0$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2



$$d\vec{r} = \dot{\vec{r}}dt = \vec{v}dt$$

$$\vec{a} \perp d\vec{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = 0$$