Интегрирование дробно-рациональных функций

Математика, II сем., ДФиПХ, ИЕНиМ
Лекция 7, 2022г.

Лекторы: к.ф.-м.н. Нагребецкая Ю.В.

к.ф.-м.н. Перминова О.Е.

Определение дробно-рациональной функции

Опр. Дробно-рациональной функцией называется

$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m, $Q_n(x)$ – многочлен степени n, т.е.

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$
$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Задача: найти $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$.

Теорема (о выделен. целой части)

Теорема (выделение целой части в неправильной дроби).

Если в дробно-рациональной функции $m \geq n$ *(дробь неправильная)*,

то $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = H_{m-n}(x) + \dfrac{R_S(x)}{Q_n(x)}$, где $s \leq n-1$.

Пример 1

$$\frac{x^4}{x^2-9} = x^2+9+\frac{81}{x^2-9}$$

1 способ: деление уголком.

$$\begin{array}{l|l} x^4 & \underline{x^2-9} \\ & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^4 \\ \underline{x^4-9x^2} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^2-9} \\ x^2 \end{array} \\ 9x^2 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^4 \\ \underline{x^4-9x^2} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^2-9} \\ x^2+9 \end{array} \\ -\begin{array}{r} 9x^2 \\ \underline{9x^2-81} \end{array} & \\ 81 & \end{array}$$

Пример 1 (продолж.)

$$\frac{x^4}{x^2-9} = x^2+9+\frac{81}{x^2-9}$$

2 способ: преобразование дроби

$$\frac{x^4}{x^2-9} = \frac{\left(x^2\right)^2-9^2+9^2}{x^2-9} = \frac{(x^2-9)(x^2+9)}{x^2-9}+\frac{9^2}{x^2-9} =$$

$$= x^2+9+\frac{81}{x^2-9}$$

Теорема Гаусса

<u>Теорема.</u> Любой многочлен $Q(x)$ равен произведению старшего коэффициента a на множители вида: $(x-\beta)$, $(x-\beta)^k$, (x^2+px+q), $(x^2+px+q)^m$, где $k > 1$, $m > 1$, k, m – натуральные числа, $D = p^2 - 4q < 0$.

Пример 2

$$2x^2 + 6x - 8 = ?$$

Решим квадратное уравнение $2x^2 + 6x - 8 = 0$.
$x^2 + 3x - 4 = 0;$

$D = 3^2 - 4 \cdot (-4) = 25; \sqrt{D} = 5;$
$x_1 = \frac{-3-5}{2} = -4;\ x_2 = \frac{-3+5}{2} = 1.$

Тогда $2x^2 + 6x - 8 = 2(x+4)(x-1)$.

Пример 3

$$x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = ?$$

Подбором находим $x_1 = -1$ – корень уравнения $x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = 0$.

Делим многочлен $x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ на $x + 1$ «уголком».

Пример 3 (продолж.)

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3+2x^2+4x+3 & x+1 \\
\underline{x^3+x^2} \qquad\qquad & \overline{x^2+x+3} \\
-\,x^2+4x+3 & \\
\underline{x^2+x} \qquad & \\
-\,3x+3 & \\
\underline{3x+3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Тогда $x^3+2x^2+4x+3=(x+1)(x^2+x+3)$.

Пример 3 (продолж.)

Попробуем разложить на множители $(x^2 + x + 3)$.

$D = 1^2 - 4 \cdot 3 = -11 < 0.$

Следовательно, по теореме Гаусса

$$x^3 + 2x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x^2 + x + 3).$$

Простейшие дроби

Опр. Простейшими дробями называются дроби вида:

1) $\frac{A}{(x-\beta)}$,

2) $\frac{A}{(x-\beta)^k}$,

3) $\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)}$,

4) $\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^k}$.

- **Интегралы 1-го 2-го типа сводятся к табличным при помощи замены $u = x - \beta$.**
- **Интегралы 3-го типа рассматривались на предыдущ. лекции.**
- **Интеграл 4-го типа сводится к интегралам 3-го типа при помощи метода интегрирования по частям.**

Теорема о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей

Теорема. Если в дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ степень числителя меньше степени знаменателя и знаменатель $Q(x)$ равен произведению коэффициента a при старшей степени на множители вида $(x-\beta)$, $(x-\beta)^k$, (x^2+px+q), $(x^2+px+q)^k$, то

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \text{СУММА ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ}$$

Теорема о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей

При этом

множителю $(x-\beta)$ соответствует дробь $\frac{A}{(x-\beta)}$;

множителю $(x-\beta)^k$ соответствует сумма дробей $\frac{A_1}{(x-\beta)}+\frac{A_2}{(x-\beta)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-\beta)^k}$;

множителю (x^2+px+q) соответствует дробь $\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)}$,

множителю $(x^2+px+q)^k$ соответствует сумма дробей $\frac{B_1x+D_1}{(x^2+px+q)}+\cdots+\frac{B_kx+D_k}{(x^2+px+q)^k}$.

Следствие из теоремы о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей

Следствие. Если в дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ степень числителя меньше степени знаменателя, и знаменатель $Q(x)$ равен произведению коэффициента a при старшей степени на множители вида $(x-\beta)$, $(x-\beta)^k$, (x^2+px+q), $(x^2+px+q)^k$, то

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \text{СУММА ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ}$$

Пример 4

Найти $\int \frac{x^3+4x^2+9x+2}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}dx$

Подинтегральная функция -
правильная дробь, поэтому применим теорему

$$\frac{x^3+4x^2+9x+2}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}=\frac{A_1}{(x+1)}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{Bx+D}{(x^2+2x+5)}=$$

Пример 4 (продолж.)

Приведем к общему знаменателю

$$=\frac{A_1(x+1)(x^2+2x+5)+A_2(x^2+2x+5)+(Bx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}$$

Приравниваем числители и знаменатели дробей, имеющих общие знаменатели

$$x^3+4x^2+9x+2=$$

$$=A_1(x+1)(x^2+2x+5)+A_2(x^2+2x+5)+(Bx+D)(x+1)^2=$$

$$=A_1(x^3+3x^2+7x+5)+A_2(x^2+2x+5)+$$

$$+B(x^3+2x^2+x)+D(x^2+2x+1)$$

Пример 4 (продолж.)

1) При подстановке различных значений *x* в левую и правую часть равенства получаются одинаковые значения. Обычно подставляют корни знаменателя.

2) Коэффициенты при одинаковых степенях *x* в левой и правой частях равны.

$$
\begin{array}{l|l}
x=-1 & -4=A_2\cdot 4 \text{ (подставили в левую и правую часть } x=-1) \\
x^3 & A_1+B=1 \text{ (приравняли коэффициенты при } x^3) \\
x^2 & 3A_1+A_2+2B+D=4 \text{ (приравняли коэффициенты при } x^2) \\
x^0\,(x=0) & 5A_1+5A_2+D=2 \text{ (приравняли свободные коэфф.)}
\end{array}
$$

Пример 4 (продолж.)

Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4A_2 = -4 \\ A_1 + B = 1 \\ 3A_1 + A_2 + 2B + D = 4 \\ 5A_1 + 5A_2 + D = 2 \end{cases}$$

Пример 4 (продолж.)

Решаем

$$\begin{cases} A_2 = -1 \\ A_1 + B = 1 \Rightarrow A_1 = 1 - B \\ 3(1-B) + (-1) + 2\cdot B + D = 4 \\ 5(1-B) + 5(-1) + D = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = -1 \\ A_1 + B = 1 \Rightarrow A_1 = 1 - B \\ -B + D = 2 \\ -5B + D = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = -1 \\ A_1 = 1 - B \\ \left.\begin{array}{l} -B + D = 2 \\ -5B + D = 2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow B = 0,\ D = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = -1 \\ B = 0 \\ D = 2 \end{cases}$$

Пример 4 (продолж.)

Ответ: $A_1 = 1; \quad A_2 = -1; \quad B = 0; \quad D = 2.$

Тогда

$$\frac{x^3+4x^2+9x+2}{(x+1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x^2+2x+5)}.$$

$$\int \frac{x^3+4x^2+9x+2}{(x+1)^2(x^2+2x+5)}dx = \int \frac{dx}{(x+1)} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} + 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)}$$

Пример 4 (продолж.)

$$1)\int\frac{dx}{x+1}=\begin{bmatrix}u=x+1\\ du=dx\end{bmatrix}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|x+1|+C$$

$$2)\int\frac{dx}{(x+1)^2}=\begin{bmatrix}y=x+1\\ dy=dx\end{bmatrix}=\int y^{-2}dy=$$

$$=\frac{y^{-2+1}}{-2+1}+C=-\frac{1}{y}+C=-\frac{1}{x+1}+C$$

$$3)\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{x^2+2x\pm1+5}=\int\frac{dx}{(x^2+2x+1)+4}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=$$

$$=\begin{bmatrix}u=x+1\\ du=dx\end{bmatrix}=\int\frac{du}{u^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$$

Пример 4 (ответ)

Получаем: $\ln|x+1| - \left(-\frac{1}{x+1}\right) + 2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}.$

Ответ: $\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$

Помним, что C прибавляем только один раз!

Пример 5

Найти $\int \frac{x^6+x^4-15x^2-16}{x^4-16}dx$

Дробь неправильная

1) Выделим целую часть. $\frac{x^6+x^4-15x^2-16}{x^4-16}=x^2+1+\frac{x^2}{x^4-16}$

2) Разложим знаменатель на множители. $x^4-16=(x-2)(x+2)(x^2+4)$

3) Разложим дробную часть в сумму простейших дробей. $\frac{x^2}{x^4-16}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$

4) Приведем к общему знаменателю.

$$\frac{x^2}{x^4-16}=\frac{A(x+2)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x+2)(x-2)}{x^4-16}$$

Пример 5 (продолж.)

5). Приравняем числители левой и правой частей

$$x^2 = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x+2)(x-2)$$

6). Подставим в левую и правую часть разные значения *x*, приравняем коэффициенты при равных степенях *x*.

$$\begin{array}{l|l} x=-2 & 4 = B\cdot(-4)\cdot 8 \ \text{(подставили в левую и правую часть } x=-2\text{)} \\ x=2 & 4 = A\cdot 4\cdot 8 \ \text{(подставили в левую и правую часть } x=2\text{)} \\ x^3 & 0 = A+B+C \ \text{(приравняли коэффициенты при } x^3\text{)} \\ x^0 (x=0) & 0 = A\cdot 8 + B\cdot(-8) + D\cdot(-4) \ \text{(приравняли свободные коэфф.)} \end{array}$$

Пример 5 (продолж.)

7) Найдем коэффициенты A, B, C, D из системы п. 6).

$$A=\tfrac{1}{8},\ B=-\tfrac{1}{8},\ C=0,\ D=\tfrac{1}{2}$$

8) Подставим в равенство из п. 3).

$$\frac{x^2}{x^4-16}=\frac{1}{8(x-2)}-\frac{1}{8(x+2)}+\frac{1}{2(x^2+4)}$$

9) Проинтегрируем левую и правую часть равенства из п.1).

$$\int\frac{x^6+x^4-15x^2-16}{x^4-16}dx=\int\left(x^2+1\right)dx+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+x+\frac{1}{8}\ln|x-2|-\frac{1}{8}\ln|x+2|+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$$

Примеры разложения дробей в сумму простейших дробей

$$\frac{5x-4}{(x-1)(x+3)(x-6)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-6}$$

$$\frac{3x+1}{(x-4)(x+2)^3} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3}$$

$$\frac{2x^2-3x}{(x^2-4x+10)(x^2+9)} = \frac{Ax+B}{x^2-4x+10} + \frac{Cx+D}{x^2+9}$$

$$\frac{x^3-3x+5}{x^2(x-4)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-4} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

$$\frac{2x^2+1}{x^3-8} = \frac{2x^2+1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$