Лекция 7

Аналитическая геометрия

Кривые второго порядка

Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Презентации сделана на основе лекций к.ф.-м.н., доцента Щербаковой В.А.

Определение кривой второго порядка

Опр. Кривая II-го порядка – это множество всех точек (на плоскости), удовлетворяющих уравнению

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

Теорема о кривой второго порядка

Теорема 1. Для любой кривой II-го порядка можно ввести новую систему координат, полученную **поворотом** старой системы координат и ее **параллельным переносом** так, чтобы уравнение в новой системе стало уравнением

1) окружности;

2) эллипса;

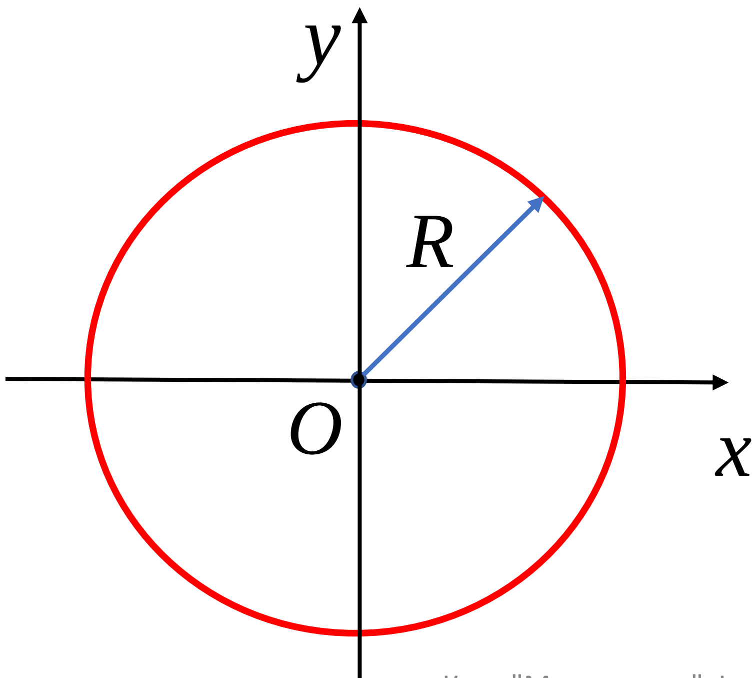
3) гиперболы;

4) параболы;

5) вырожденных случаев.

1) Окружность. Определение

Опр. Окружностью называется множество точек плоскости, равноудалённых от данной точки (центра окружности).



$$x^2 + y^2 = R^2$$

- уравнение окружности

Как нарисовать эллипс (Видео)

2) Эллипс. Определение

Опр. Эллипсом называется множество точек плоскости, **сумма** расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов F_1, F_2) постоянна (и равна $2a>F_1F_2$).

2) Эллипс. Определение

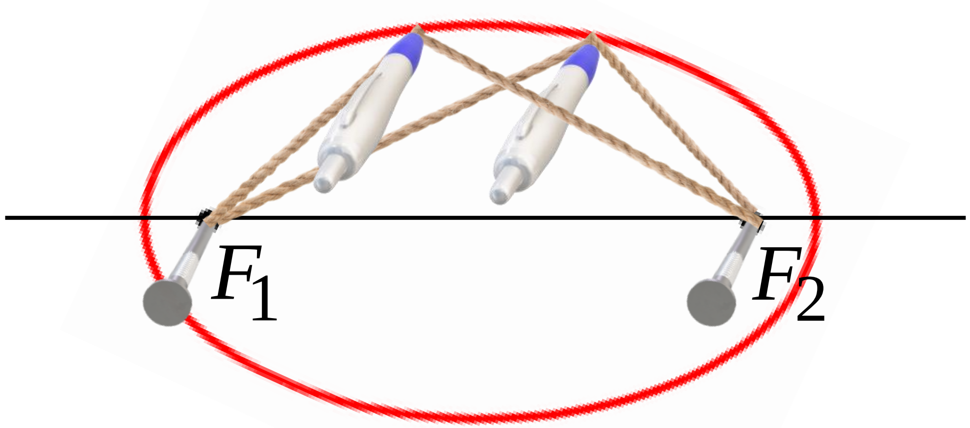
Как нарисовать эллипс (Видео)

Опр. Эллипсом называется множество точек плоскости, **сумма** расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов F_1, F_2) постоянна (и равна $2a > F_1F_2$).

2) Эллипс. Определние

Как нарисовать ЭЛЛИПС
(Видео)

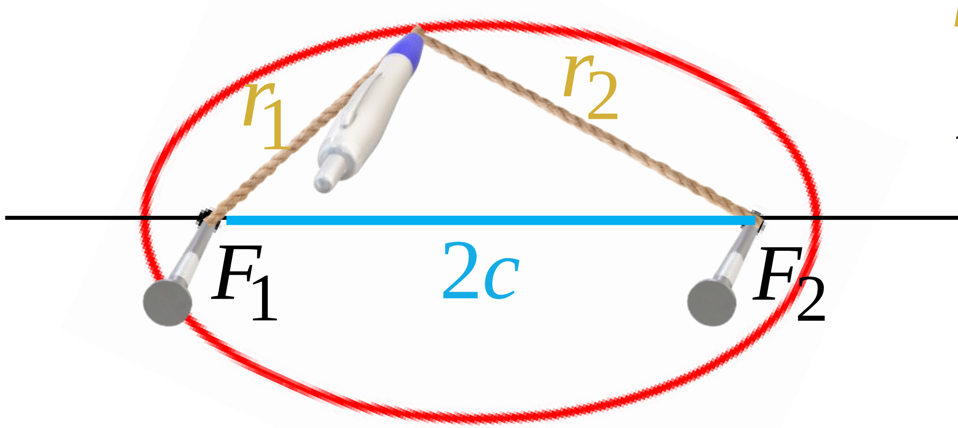
Опр. Эллипсом называется множество точек плоскости, **сумма** расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов F_1, F_2) постоянна (и равна $2a > F_1F_2$).



2) Эллипс. Определение

Как нарисовать эллипс (Видео)

Опр. Эллипсом называется множество точек плоскости, **сумма** расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов F_1, F_2) постоянна (и равна $2a > F_1F_2$).



$$r_1 + r_2 = 2a$$

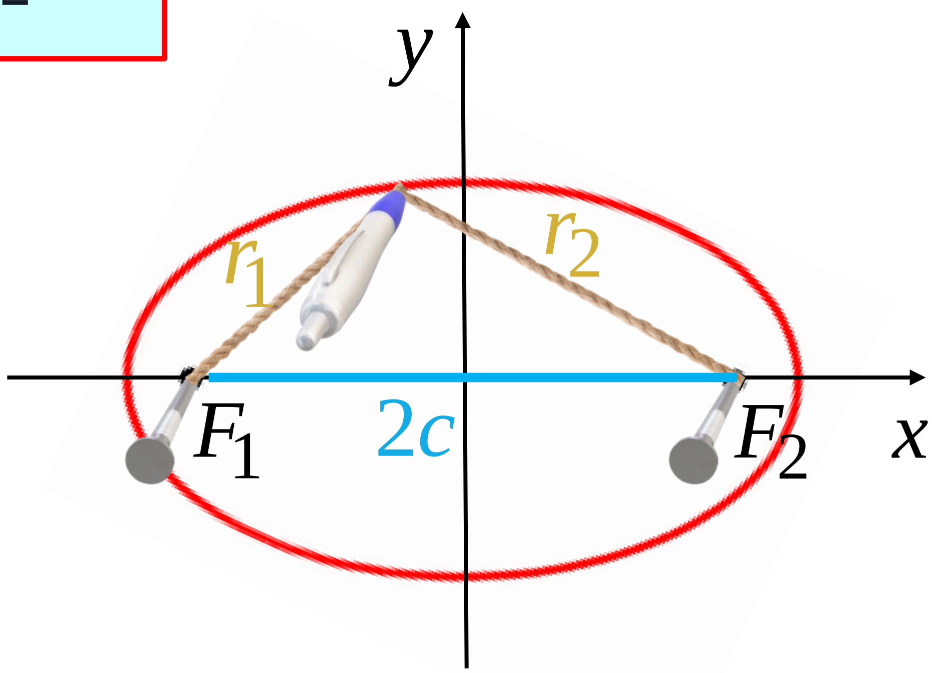
$$F_1F_2 = 2c$$

$$c < a$$

2) Эллипс. Уравнение

Теорема 2. Пусть $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, тогда уравнение эллипса

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$F_1F_2 = 2c$$

$$c < a$$

2) Эллипс в системе координат *xOy*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Пусть $\boxed{a>b}$

$$b=\sqrt{a^2-c^2} \;\Rightarrow\; b^2=a^2-c^2 \;\Rightarrow$$

$$c^2=a^2-b^2 \;\Rightarrow\; \boxed{c=\sqrt{a^2-b^2}}$$

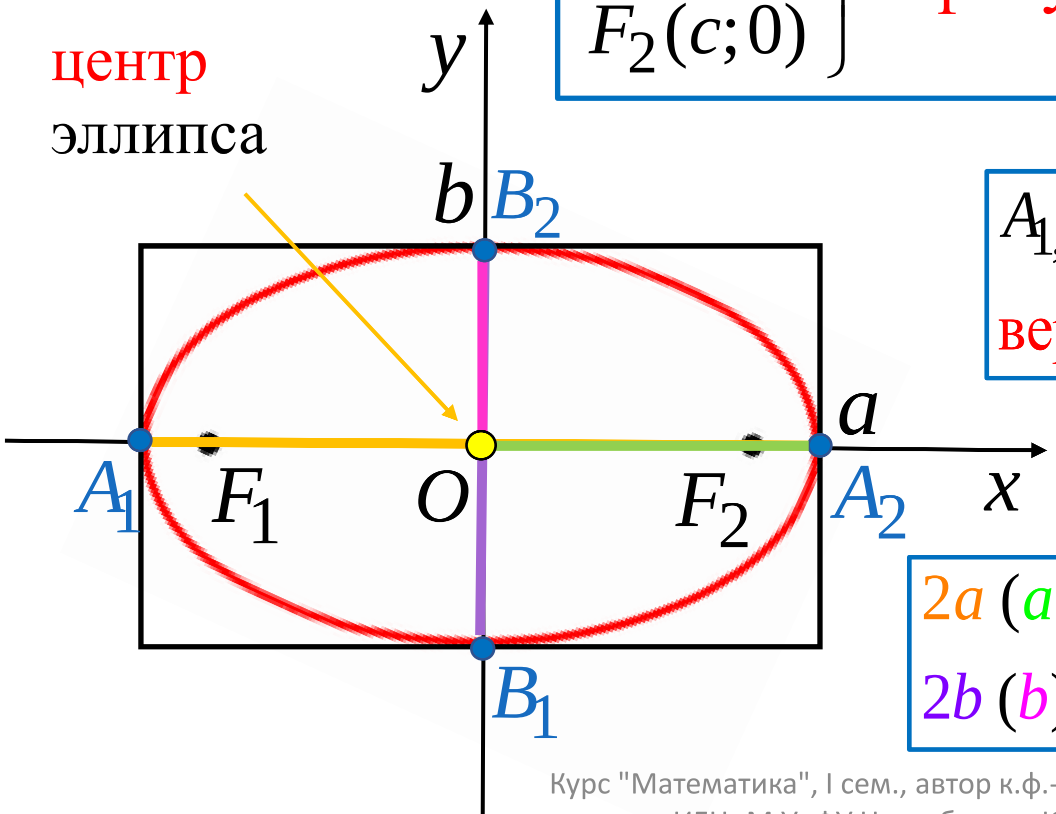
2) Эллипс в системе координат *xOy*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Пусть $\boxed{a>b}$

$$\left.\begin{aligned} F_1(-c;0) \\ F_2(c;0) \end{aligned}\right\} - \text{фокусы}$$

центр эллипса



$A_{1,2}(\mp a,0),\ B_{1,2}(0,\mp b)$ – вершины эллипса

$2a$ (a) – большая ось (полуось)

$2b$ (b) – малая ось (полуось)

2) Эллипс. Эксцентриситет

Опр. Эксцентриситетом называется значение $\boxed{\varepsilon = \dfrac{c}{a}}$

Замечание 1. Для эллипса $\boxed{0 < \varepsilon < 1}$

Замечание 2. Чем больше эксцентриситет ε, тем более вытянут эллипс.

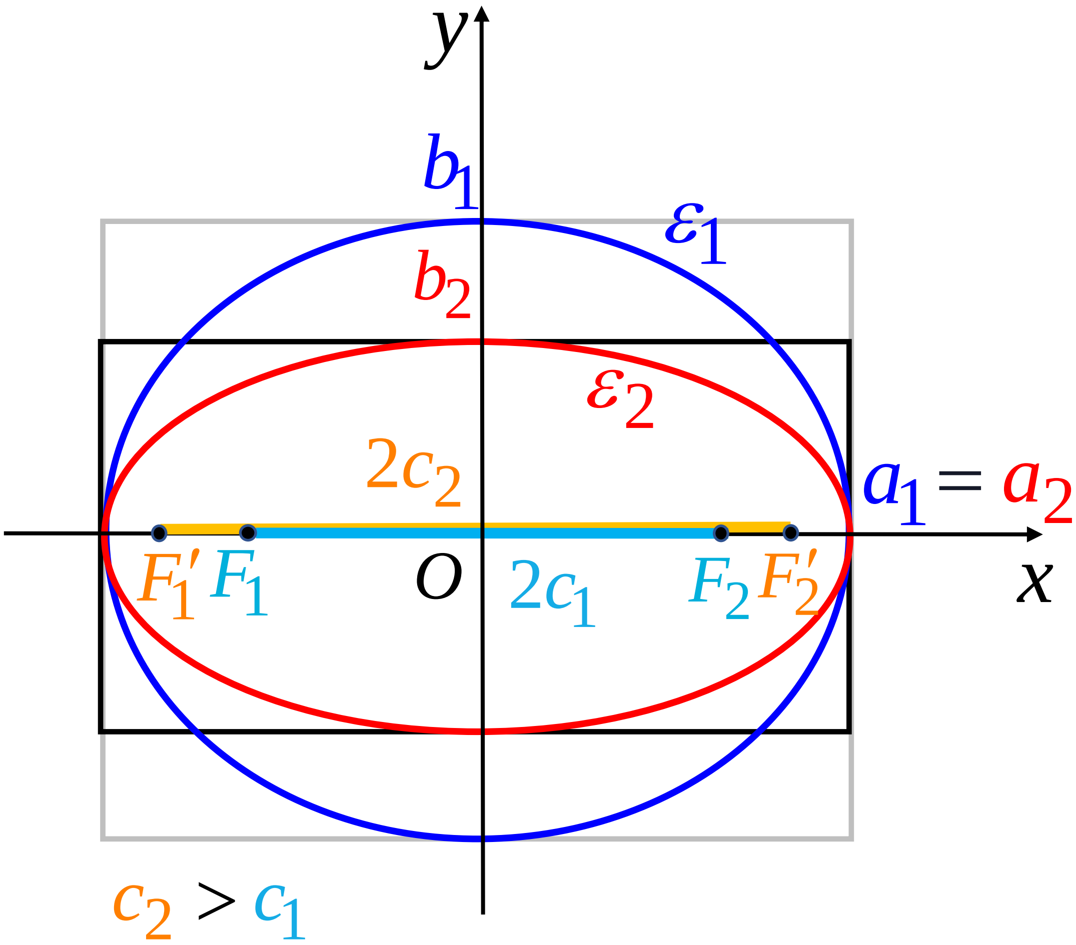
Доказательство

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

увел.

уменьш.

2) Эллипс. Эксцентриситет



$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$$

$a = \text{const}$

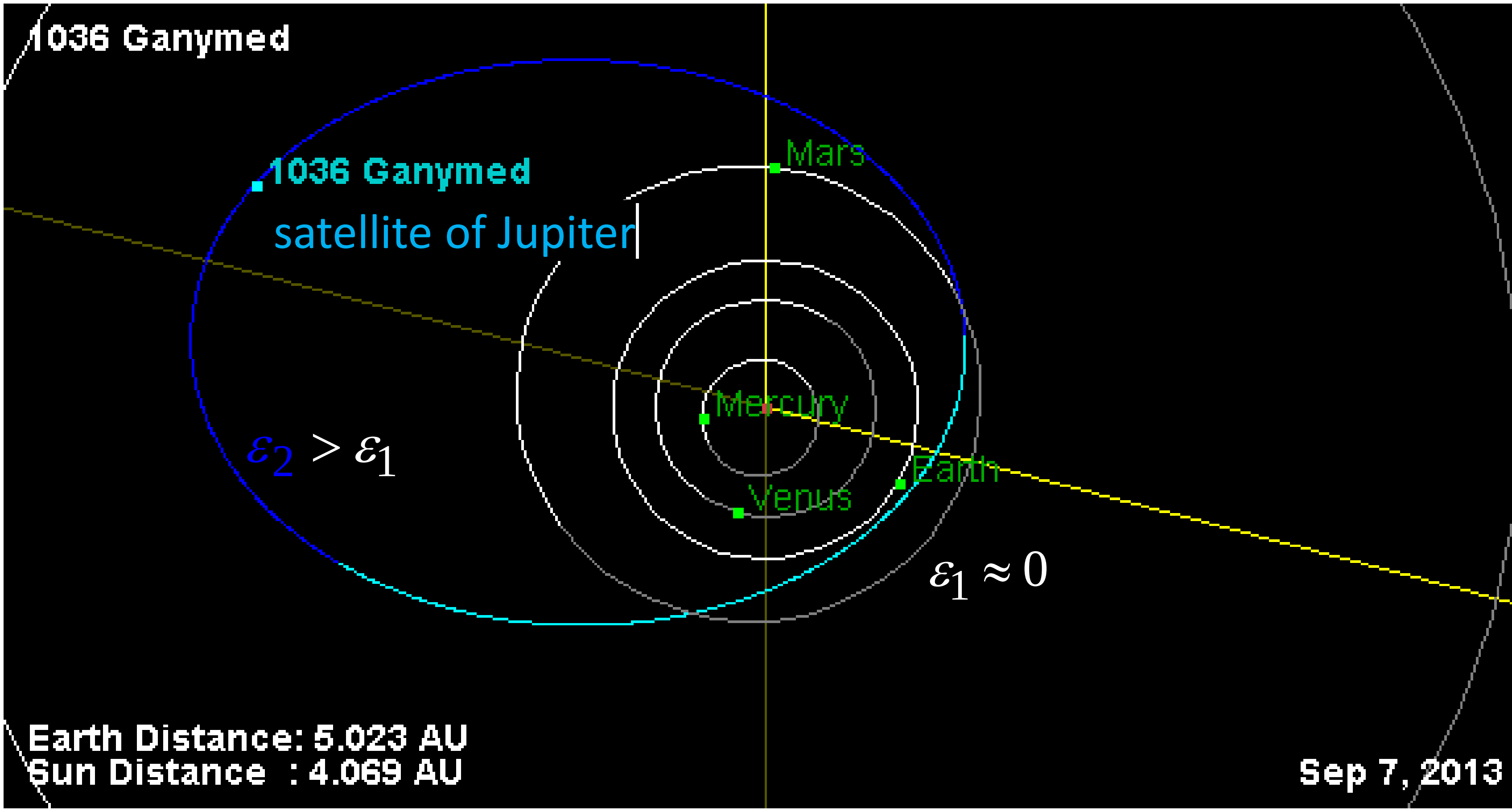
c увел.

$\Downarrow$

ε увел.

$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$

2) Эллипс. Эксцентриситет



Этот слайд конспектировать не надо

2) Эллипс. Эксцентриситет

Замечание 3. Если ε = 0, то $c = 0$, т.е. $a = b$

$$\Downarrow$$

фокусы склеиваются в одну точку – центр окружности:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

2) Эллипс. Директриссы

<u>Опр</u>. Директрисами эллипса называются прямые

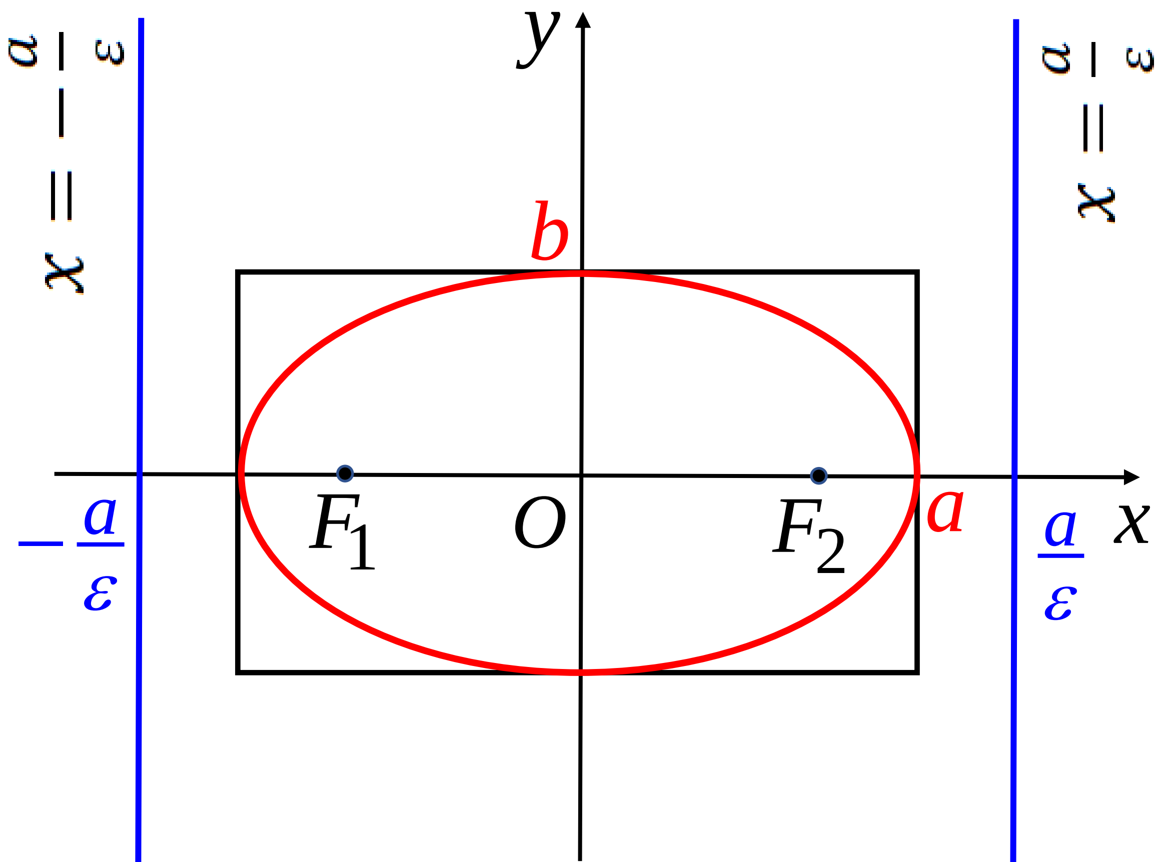
$$\boxed{x = \frac{a}{\varepsilon}}$$

$$\boxed{x = -\frac{a}{\varepsilon}}$$

$$\varepsilon < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a}{\varepsilon} > a$$

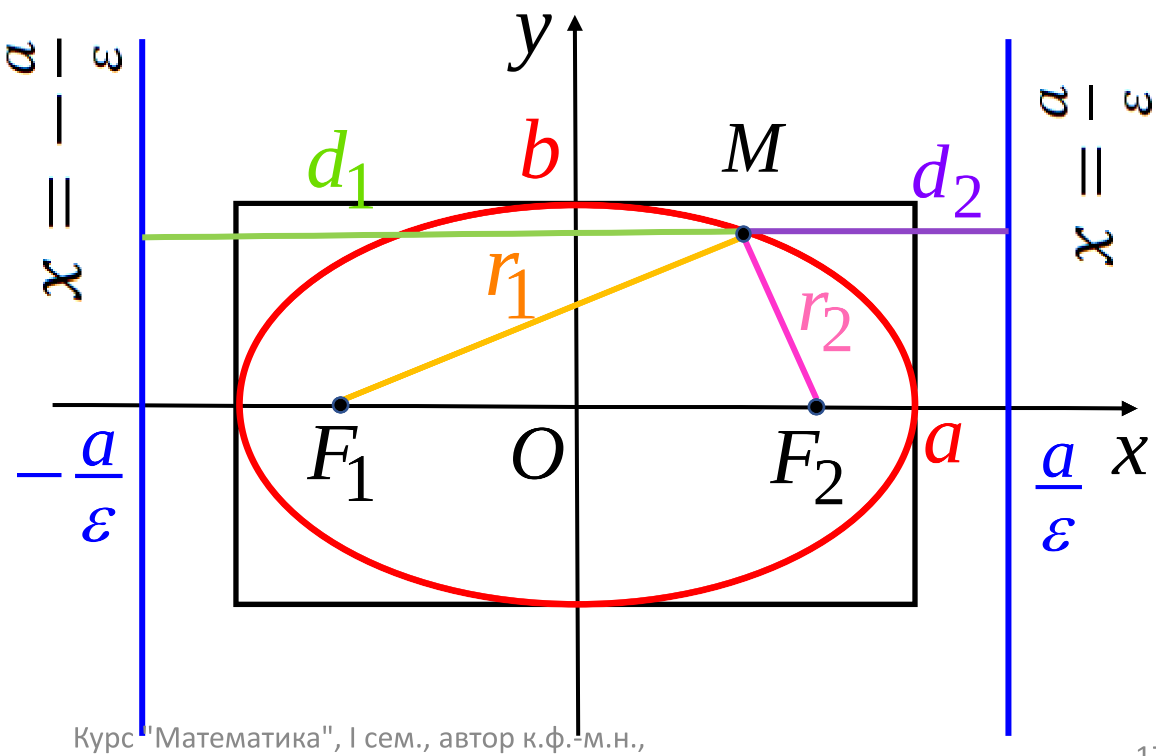


2) Эллипс. Основное директориальное свойство эллипса

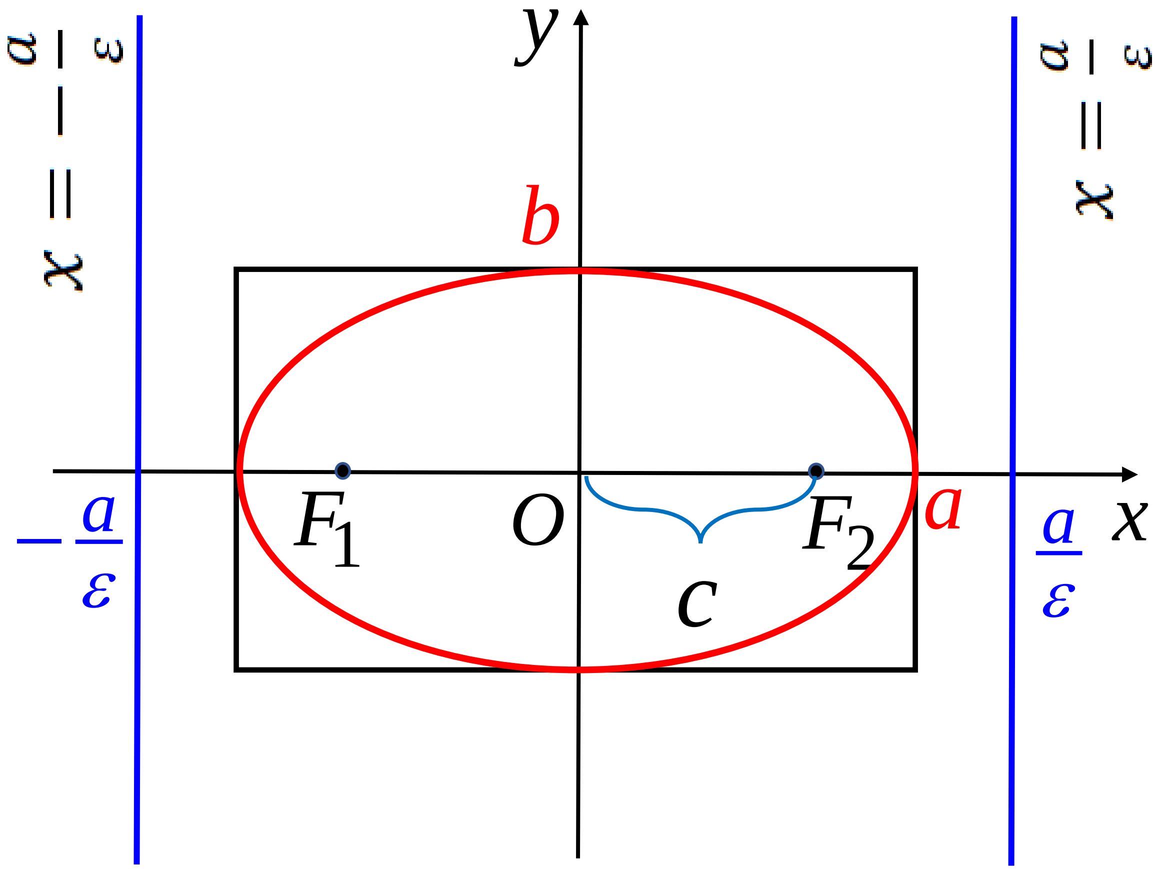
Теорема 3. Отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы постоянно и равно эксцентриситету (без док-ва).

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$$

$$\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$



2) Эллипс. Формулы для случая *a* > *b*



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$F_1(-c,0)$$

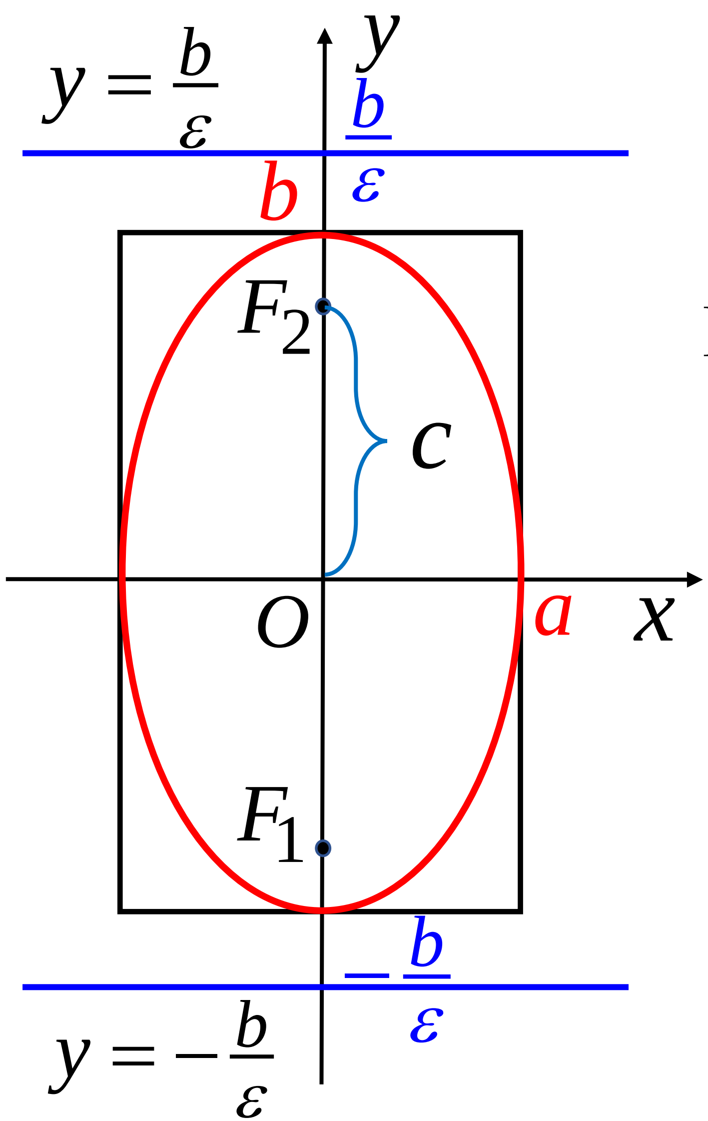
$$F_2(c,0)$$

$$\varepsilon=\frac{c}{a}$$

$$0<\varepsilon<1$$

$$x=\frac{a}{\varepsilon},\ x=-\frac{a}{\varepsilon}-\text{директрисы}$$

2) Эллипс. Формулы для случая *a* < *b*



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Пусть $\boxed{a < b}$

Во всех формулах поменяем

$$a \leftrightarrow b \qquad x \leftrightarrow y$$

$$\boxed{c = \sqrt{b^2 - a^2}}$$

$F_1(0,-c),\ F_2(0,c)$ – фокусы

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{b}}$$

$y = \frac{b}{\varepsilon},\ y = -\frac{b}{\varepsilon}$ – директрисы

3) Гипербола. Определение, уравнение

Опр. Гиперболой называется множество точек плоскости, **модуль разности** расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов F_1, F_2) постоянен (и равен $2a$).

Теорема 4. Если расстояние между фокусами равно $2c$, $b=\sqrt{c^2-a^2}$, то уравнение гиперболы

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

3) Гипербола. Определение, уравнение

$$|r_1 - r_2| = 2a \qquad F_1F_2 = 2c$$

$$c > a$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$A_1(-a,0),\ A_2(a,0)$ – вершины гиперболы

$2a, 2b\ (a,b)$ – оси (полуоси) гиперболы

3) Гипербола. Асимптоты. Директрисы

Опр. Асимптотами гиперболы называются прямые

$$\boxed{y = -\frac{b}{a}x,} \quad \boxed{y = \frac{b}{a}x.}$$

Опр. Директрисами гиперболы называются прямые

$$\boxed{x = \frac{a}{\varepsilon}} \quad \boxed{x = -\frac{a}{\varepsilon}} \qquad \varepsilon > 1 \Rightarrow \frac{a}{\varepsilon} < a, \text{ где } \varepsilon = \frac{c}{a}$$

Основное директориальное свойство гиперболы такое же, как и для эллипса.

3) Гипербола. Формулы

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

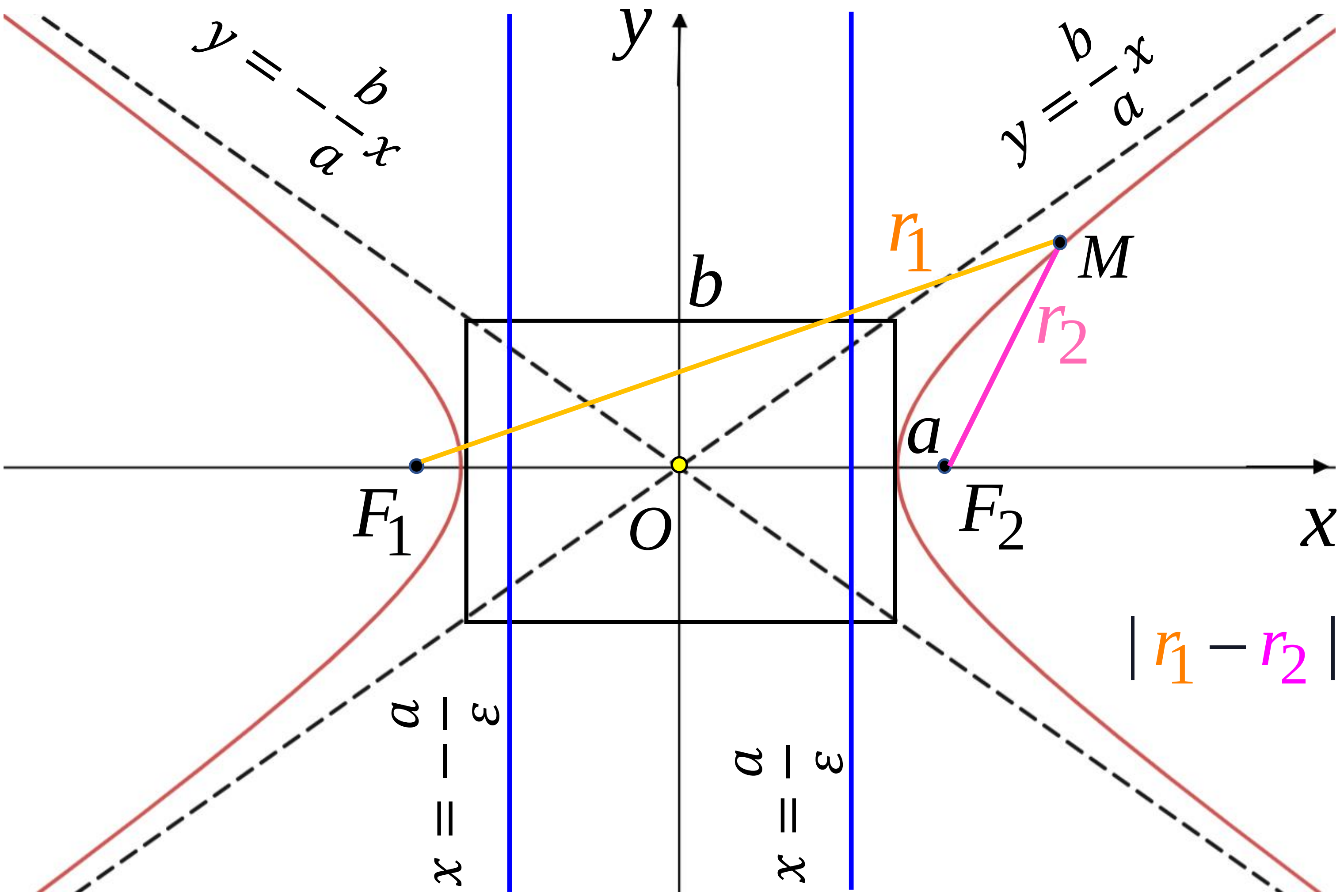
$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – фокусы

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}} \quad \boxed{\varepsilon > 1}$$

$$\boxed{x = -\frac{a}{\varepsilon},\ x = \frac{a}{\varepsilon} - \text{директрисы}}$$

$\boxed{y = -\frac{b}{a}x}$ $\boxed{y = \frac{b}{a}x}$ - асимптоты

3) Гипербола в системе координат *xOy*



$$|r_1 - r_2| = 2a$$

3) Сопряженная гипербола

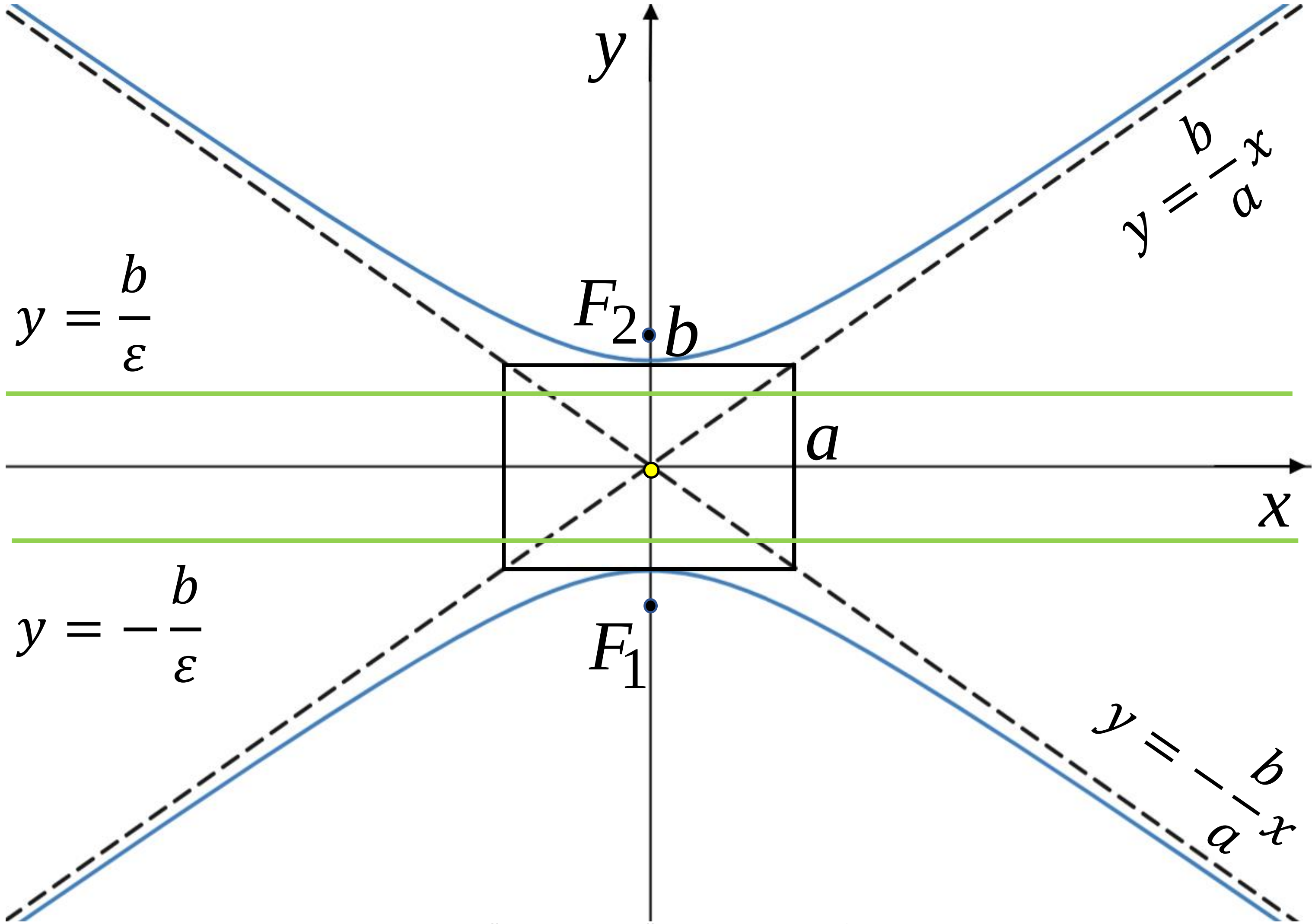
Опр. Сопряженной гиперболой называется множество точек плоскости, удовлетворяющей уравнению

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1}$$

Во всех формулах поменяем $a \leftrightarrow b \qquad x \leftrightarrow y$

Уравнения асимптот сопряженной гиперболы те же, что для исходной гиперболы (почему?-упр.).

3) Сопряженная гипербола в системе координат *xOy*



3) Сопряженная гипербола. Формулы

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1}$$

$$\boxed{c=\sqrt{a^2+b^2}}$$

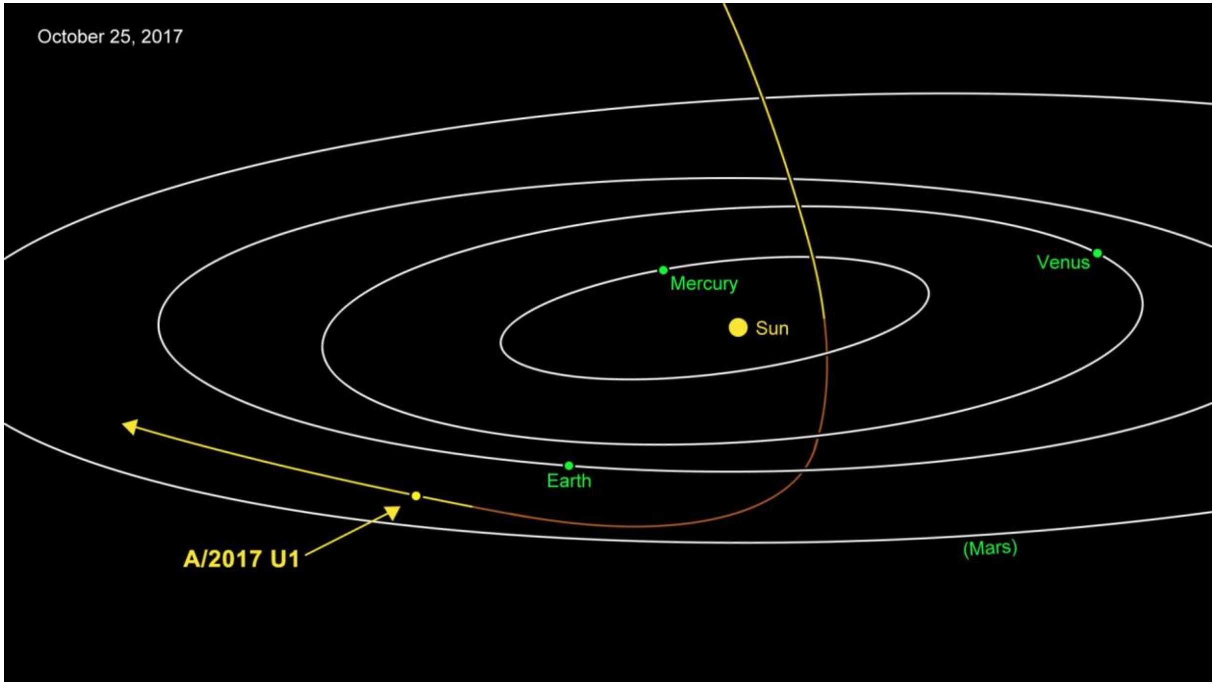
$$F_1(0,-c),\ \ F_2(0,c)-\text{фокусы}$$

$$\boxed{\varepsilon=\frac{c}{b}} \qquad \boxed{\varepsilon>1}$$

$$\boxed{y=-\frac{b}{\varepsilon},\ y=\frac{b}{\varepsilon}-\text{директрисы}}$$

$$\boxed{y=\frac{b}{a}x} \qquad \boxed{y=-\frac{b}{a}x}$$ - асимптоты

3) Гипербола как траектория межзвездных небесных тел



Оумуамуа (A/2017 U1)– межзвездный астероид 180м × 30м

Траектория **Оумуамуа** – гипербола

Информация взята со [СТРАНИЦЫ]

Этот слайд конспектировать не надо

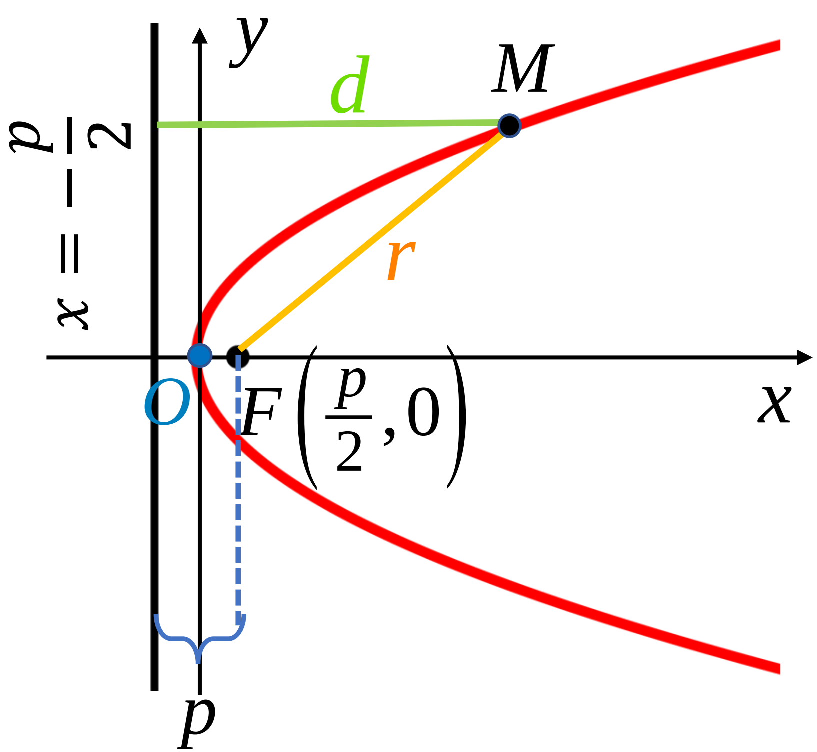
4) Парабола. Определение, уравнение

Опр. Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса F) и данной прямой (директрисы).

Теорема 5. Если расстояние от фокуса F параболы до директрисы равно p (фокальный параметр), координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$, то уравнение параболы

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

4) Парабола в системе координат *xOy*



Расстояние от фокуса до директрисы равно p

$$\boxed{y^2=2px}$$

O – вершина параболы

$\boxed{F\left(\frac{p}{2},0\right) – \text{ фокус параболы}}$

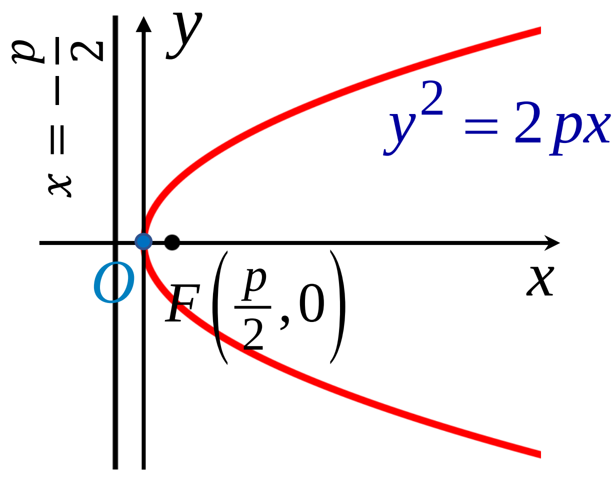
$\boxed{x=-\frac{p}{2} – \text{ директриса параболы}}$

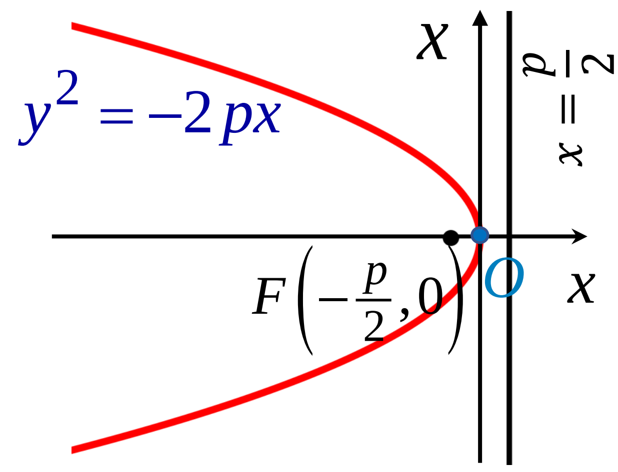
$r=d$ – по опред. параболы

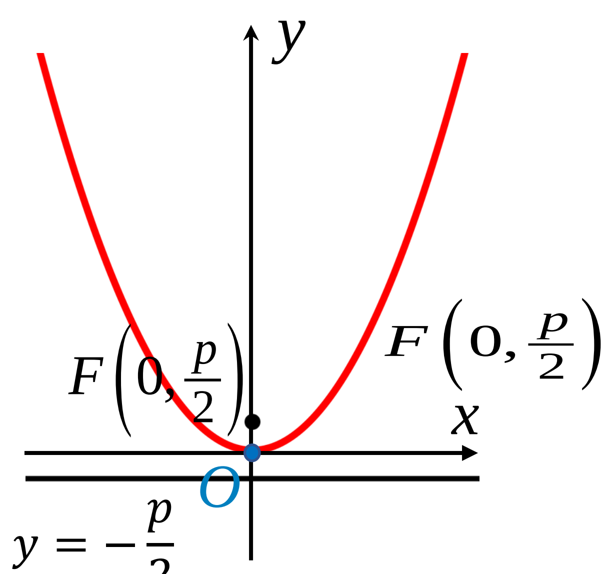
$$\Downarrow$$

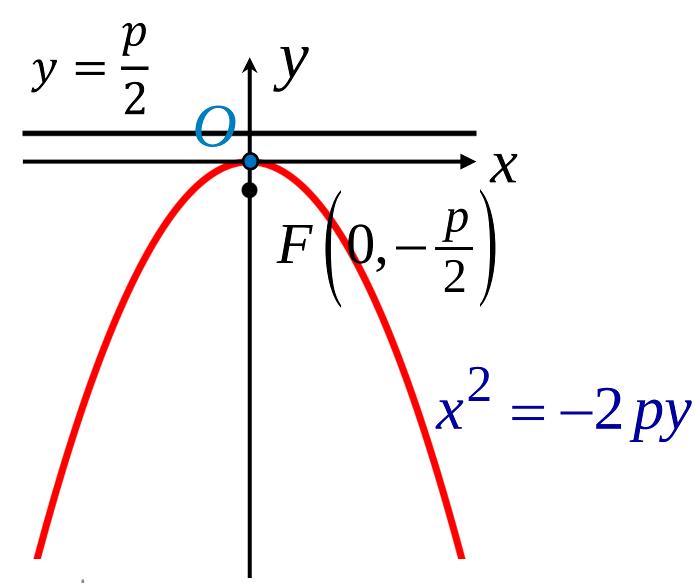
$$\varepsilon=\frac{r}{d}=1$$

5) Виды уравнений параболы

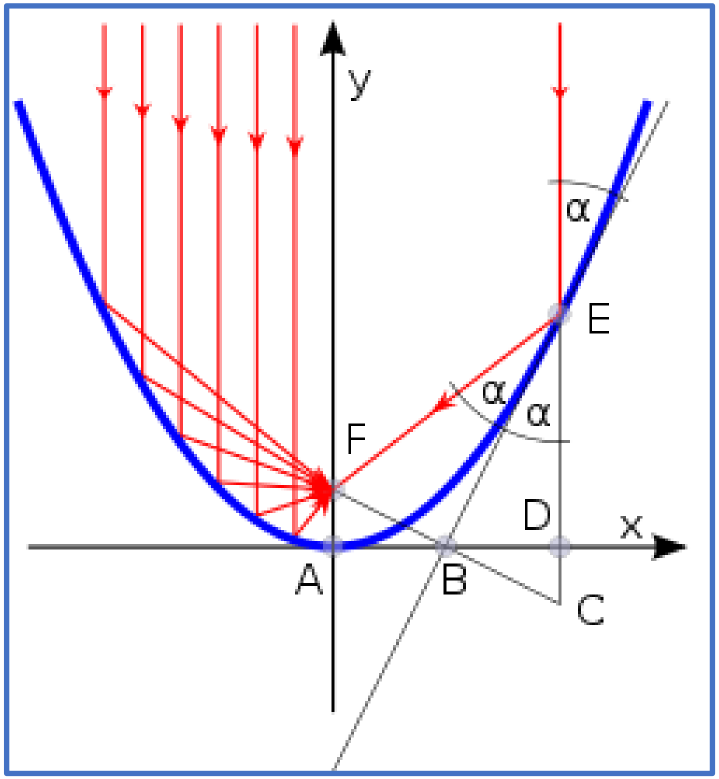








Оптическое свойство параболы



Параболическая антенна получена вращением параболы (**параболоид вращения**)

Этот слайд конспектировать не надо

Кривые II порядка, полученные параллельным переносом

Пусть $C(x_0, y_0)$ – центр кривой второго порядка. Тогда уравнения

1) окружности $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2}$

2) эллипса $\boxed{\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$

Кривые II порядка, полученные параллельным переносом

3) гиперболы

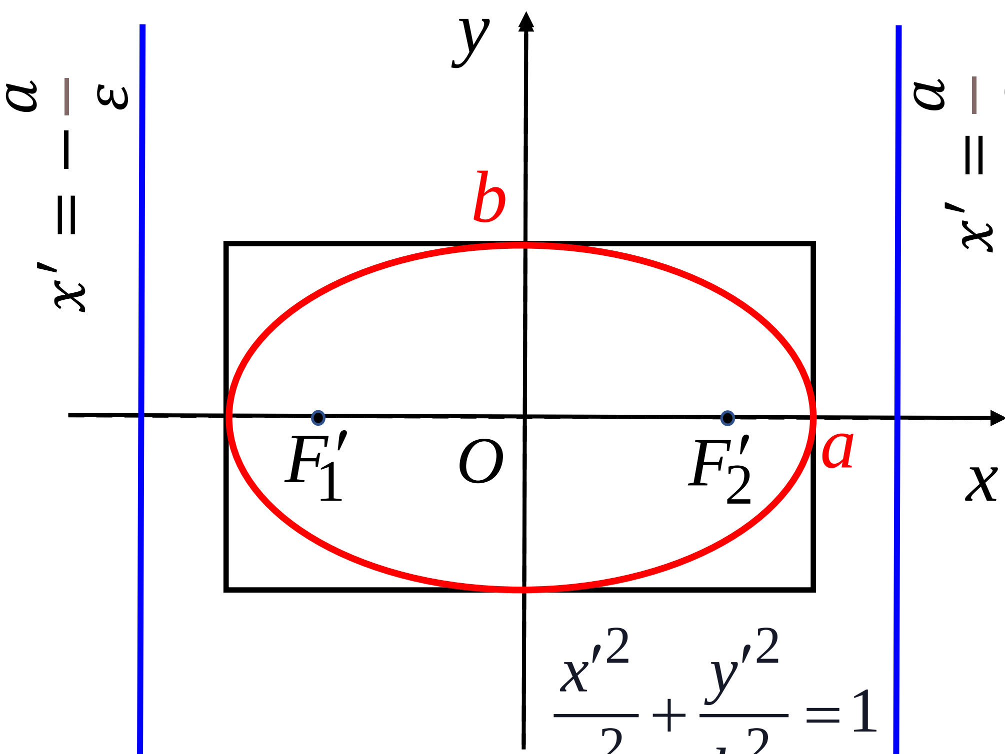
$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1} \qquad \boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1}$$

4) параболы

$$\boxed{(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0)} \qquad \boxed{(x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0)}$$

Параллельный перенос кривой II порядка

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

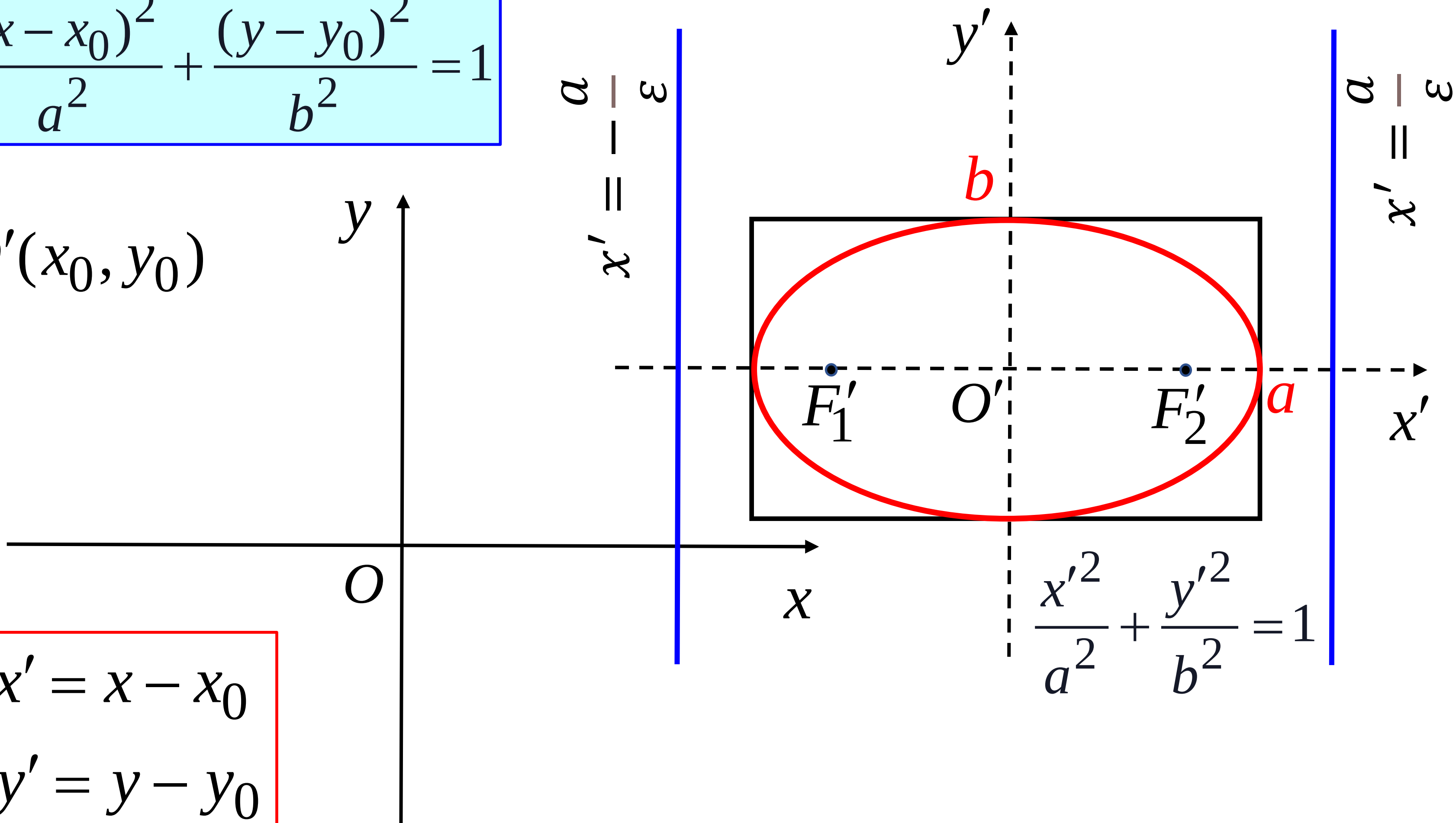


$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Параллельный перенос кривой II порядка

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

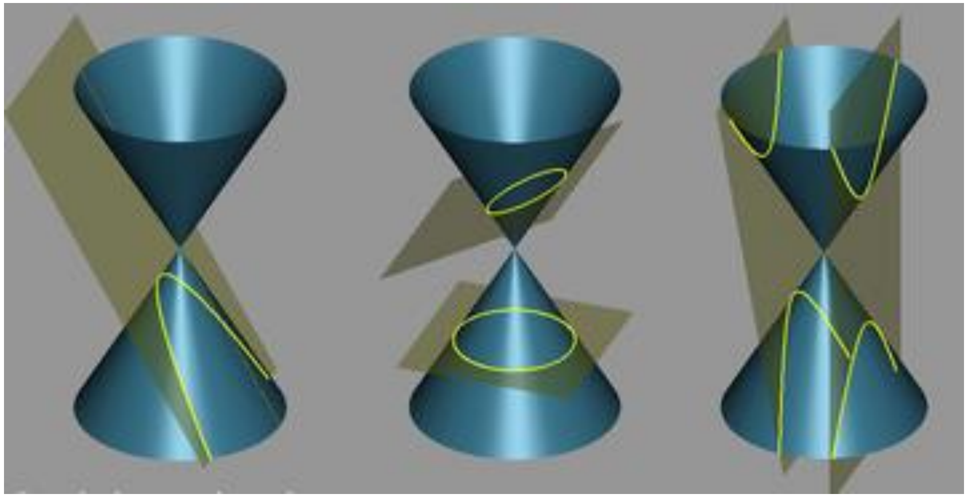
$O'(x_0, y_0)$

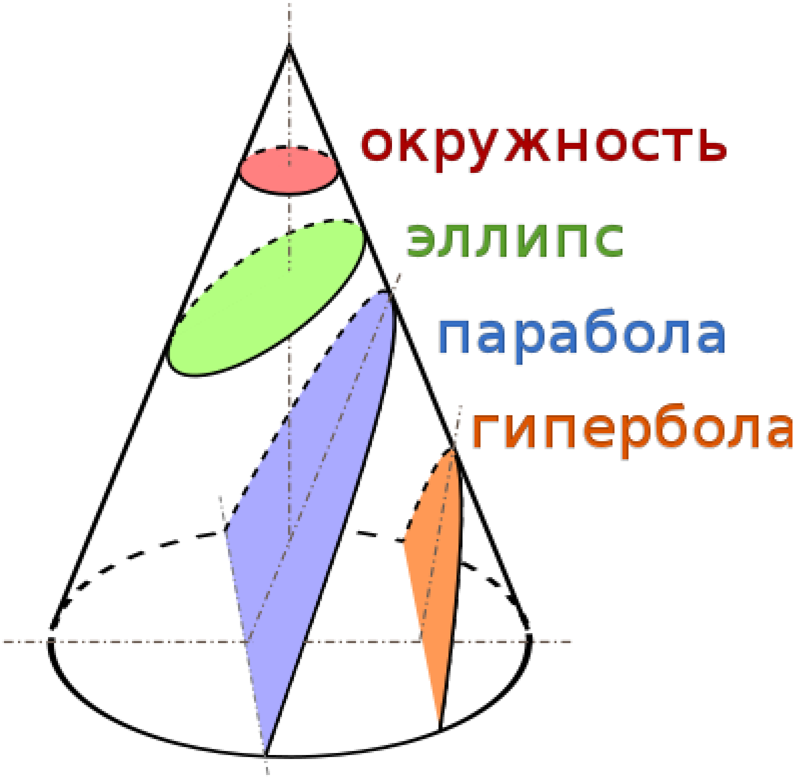


$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

$$\begin{cases} x'=x-x_0 \\ y'=y-y_0 \end{cases}$$

Конические сечения





Этот слайд конспектировать не надо