Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

ЛЕКЦИЯ 6. МАТЕМАТИКА, II сем.

Лекторы: к.ф.-м.н. Нагребецкая Ю.В., к.ф.-м.н. Перминова О.Е.

2022г.

Нахождение интегралов вида $\int \frac{bx+c}{x^2+a^2}dx$

Пример 1

$$\boxed{\int \frac{3x-1}{x^2+4}dx} = \int \frac{3x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx \text{ разбиваем на 2 интеграла}$$

$$1.\ \int \frac{3x}{x^2+4}dx = 3\int \frac{x}{x^2+4}dx = 3\int \frac{xdx}{x^2+4} = \begin{bmatrix} u = x^2+4 \\ du = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}du \end{bmatrix} =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}\ln|u| + C = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+4\right| + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+4) + C$$

Нахождение интегралов вида $\int \frac{bx+c}{x^2+a^2}dx$

Пример 1

$$2.\int \frac{1}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{x^2+2^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$$

это табличный интеграл

Ответ: $\boxed{\frac{3}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C}$

Константу прибавляем один раз

Нахождение интегралов вида

$$\int \frac{bx+c}{x^2-a^2}dx$$

Пример 2

$$\boxed{\int \frac{3x-1}{x^2-4}dx} = \int \frac{3x}{x^2-4}dx - \int \frac{1}{x^2-4}dx$$ разбиваем на 2 интеграла

Первый интеграл решается аналогично:

$$1. \int \frac{3x}{x^2-4}dx = 3\int \frac{x}{x^2-4}dx = 3\int \frac{xdx}{x^2-4} = \begin{bmatrix} u = x^2-4 \\ du = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}du \end{bmatrix} =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{3}{2}\ln|u| + C = \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4\right| + C$$

Нахождение интегралов вида

$$\int \frac{bx+c}{x^2-a^2}dx$$

Пример 2

$$2.\int \frac{1}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{x^2-2^2}dx = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

это табличный интеграл

Ответ: $\boxed{\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4\right| - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C}$

Нахождение интегралов вида

$$\int \frac{bx+c}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx$$

Пример 3

$$\boxed{\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2-1}}dx} = \int \frac{3x}{\sqrt{4x^2-1}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}dx \text{ разбиваем на 2 интеграла}$$

Первый интеграл решается аналогично:

$$1. \int \frac{3x}{\sqrt{4x^2-1}}dx = 3\int \frac{x}{\sqrt{4x^2-1}}dx = 3\int \frac{8xdx}{\sqrt{4x^2-1}} = \begin{bmatrix} u = 4x^2-1 \\ du = 8xdx \\ xdx = \frac{1}{8}du \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{3}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{3}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du + C = \frac{3}{8}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{3}{4}\sqrt{u} + C = \frac{3}{4}\sqrt{4x^2-1} + C$$

Нахождение интегралов вида

$$\int \frac{bx+c}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx$$

Пример 3

Найдем интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2-1}} = \left[\begin{array}{c} u = 2x \\ du = 2dx \\ dx = \frac{1}{2}du \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-1}\right| + C$$

Окончательно получаем

$$\boxed{\frac{3}{4}\sqrt{4x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-1}\right| + C}$$

Нахождение интегралов вида

$$\int \frac{bx+c}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

Пример 4

$$\boxed{\int \frac{3x-1}{\sqrt{1-4x^2}}dx} = \int \frac{3x}{\sqrt{1-4x^2}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$ разбиваем на 2 интеграла

Первый интеграл решается аналогично:

$$1.\ \int \frac{3x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = 3\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = 3\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} = \left[\begin{array}{c} u = 1-4x^2 \\ du = -8xdx \\ xdx = -\frac{1}{8}du \end{array}\right] =$$

$$= \frac{3}{-8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du + C = -\frac{3}{4}u^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{3}{4}\sqrt{u} + C = -\frac{3}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

Нахождение интегралов вида

$$\int \frac{bx+c}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

Пример 4

$$2.\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = [\text{решаем как в примере 3}]$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin 2x + C - \text{табличный интеграл}$$

Окончательно имеем

$$\boxed{-\frac{3}{4}\sqrt{1-4x^2} - \frac{1}{2}\arcsin 2x + C}$$

Нахождение интегралов вида

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx, \quad \int \frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+dx+e}}dx$$

При вычислении таких интегралов применяется метод выделения полного квадрата в знаменателе выражения

$$cx^2+dx+e=c\left(x^2+\frac{d}{c}x\right)+e=c\left(x^2+2\frac{d}{2c}x\pm\frac{d^2}{4c^2}\right)+e=$$

$$=c\left(x^2+2\frac{d}{2c}x+\frac{d^2}{4c^2}\right)-\frac{d^2}{4c}+e=c\left(x+\frac{d}{2c}\right)^2+e-\frac{d^2}{4c}$$

Нахождение интегралов вида

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx, \quad \int \frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+dx+e}}dx$$

Найти $\boxed{\int \frac{dx}{x^2+4x+5}}$

Выделим полный квадрат

$$x^2+4x+5=\left(x^2+4x\right)+5=\left(x^2+2\cdot 2\cdot x\pm 2^2\right)+5=$$

$$=\left(x^2+2\cdot 2\cdot x\pm 2^2\right)-4+5=\left(x+2\right)^2+1$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5}=\int \frac{dx}{(x+2)^2+1}=\left[\begin{array}{l} u=x+2 \\ du=dx \end{array}\right]=\int \frac{du}{u^2+1}=$$

$$=\operatorname{arctg} u+C=\boxed{\operatorname{arctg}(x+2)+C}$$

Нахождение интегралов вида

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx, \quad \int \frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+dx+e}}dx$$

Пример 7. Найти $\boxed{\int \frac{(x+1)dx}{x^2+3x+2}}$

Выделим полный квадрат в знаменателе выражения

$$x^2+3x+2=(x^2+3x+\tfrac{9}{4})-\tfrac{9}{4}+2=(x+\tfrac{3}{2})^2-\tfrac{1}{4}$$

Вычислим интеграл

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+3x+2}=\int \frac{(x+1)dx}{(x+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}}=\begin{bmatrix} t=x+\dfrac{3}{2} \\ dt=dx \\ x=t-\dfrac{3}{2} \end{bmatrix}=\int \frac{t-\frac{1}{2}}{t^2-\frac{1}{4}}dt$$

и интеграл свёлся к интегралу из примера 2

Нахождение интегралов вида

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx, \quad \int \frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+dx+e}}dx$$

Пример 7. Найти $\boxed{\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{2x^2+4x-1}}}$

Выделим полный квадрат в знаменателе выражения

$$2x^2+4x-1=2(x^2+2x+1)-2-1=2(x+1)^2-3$$

Вычислим интеграл

$$\int \frac{(3x+1)\,dx}{\sqrt{2x^2+4x-1}} = \int \frac{(3x+1)\,dx}{\sqrt{2(x+1)-3}} = \begin{bmatrix} t=x+1 \\ dt=dx \\ x=t-1 \end{bmatrix} = \int \frac{3t-2}{\sqrt{2t^2-3}}dt$$

и интеграл свёлся к интегралу из примера 3

Нахождение интегралов вида

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}dx, \quad \int \frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+dx+e}}dx$$

Пример 8

Особенную трудность для студентов представляют интегралы вида

$$\boxed{\int \frac{3x+2}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx} = \int \frac{3x+2}{\sqrt{-(x^2-2x-1)}}dx = \int \frac{3x+2}{\sqrt{-(x^2-2x\pm 1-1)}}dx =$$

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{-((x-1)^2-2)}}dx = \begin{bmatrix} t = x-1 \\ dt = dx \\ x = t+1 \end{bmatrix} = \int \frac{3(t+1)+2}{\sqrt{-(t^2-2)}}dt = \int \frac{3t+5}{\sqrt{2-t^2}}dt$$

и интеграл свёлся к интегралу из примера 4

МИНУС выносить за знак корня НЕЛЬЗЯ