Лекция 6

Аналитическая геометрия

Прямая в пространстве

Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

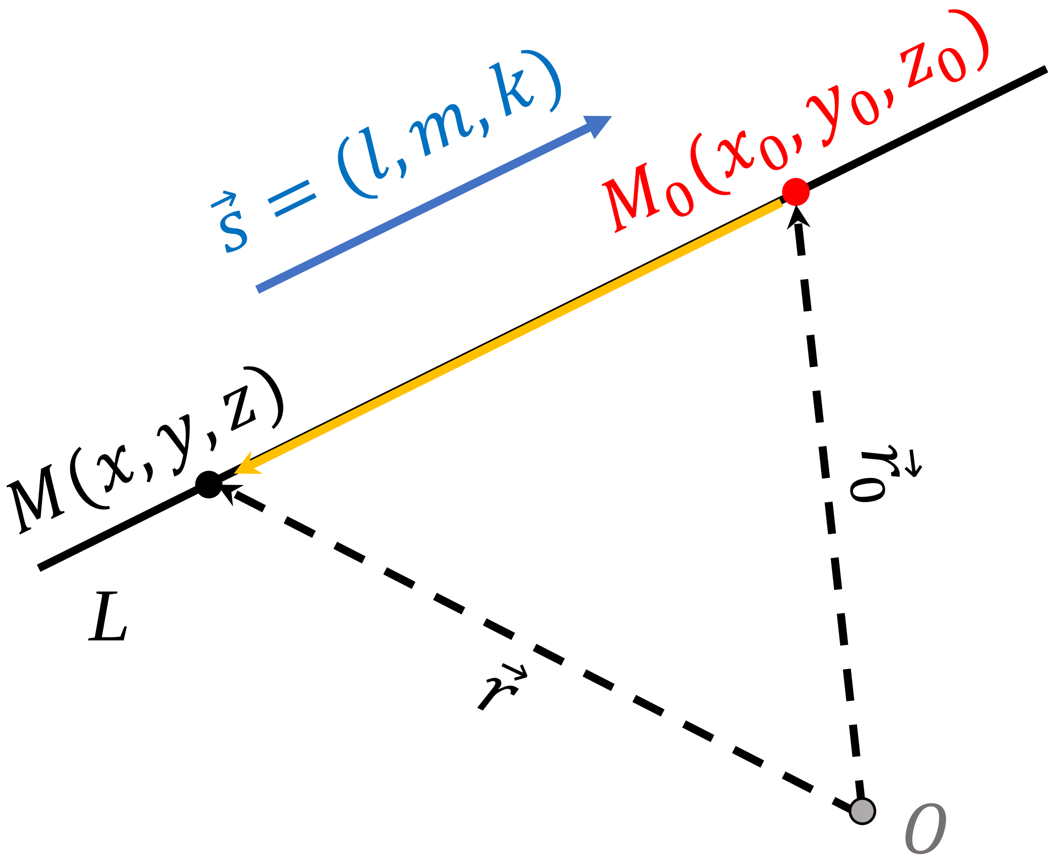
к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Презентации сделана на основе лекций

к.ф.-м.н., доцента Щербаковой В.А.

Векторное уравнение прямой в пространстве



§1. Прямая в пространстве

Векторное уравнение прямой в пространстве

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{s} \quad \text{или}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}$$

Параметрическое уравнение прямой в пространстве

Выводится из векторного так же как для прямой на плоскости:

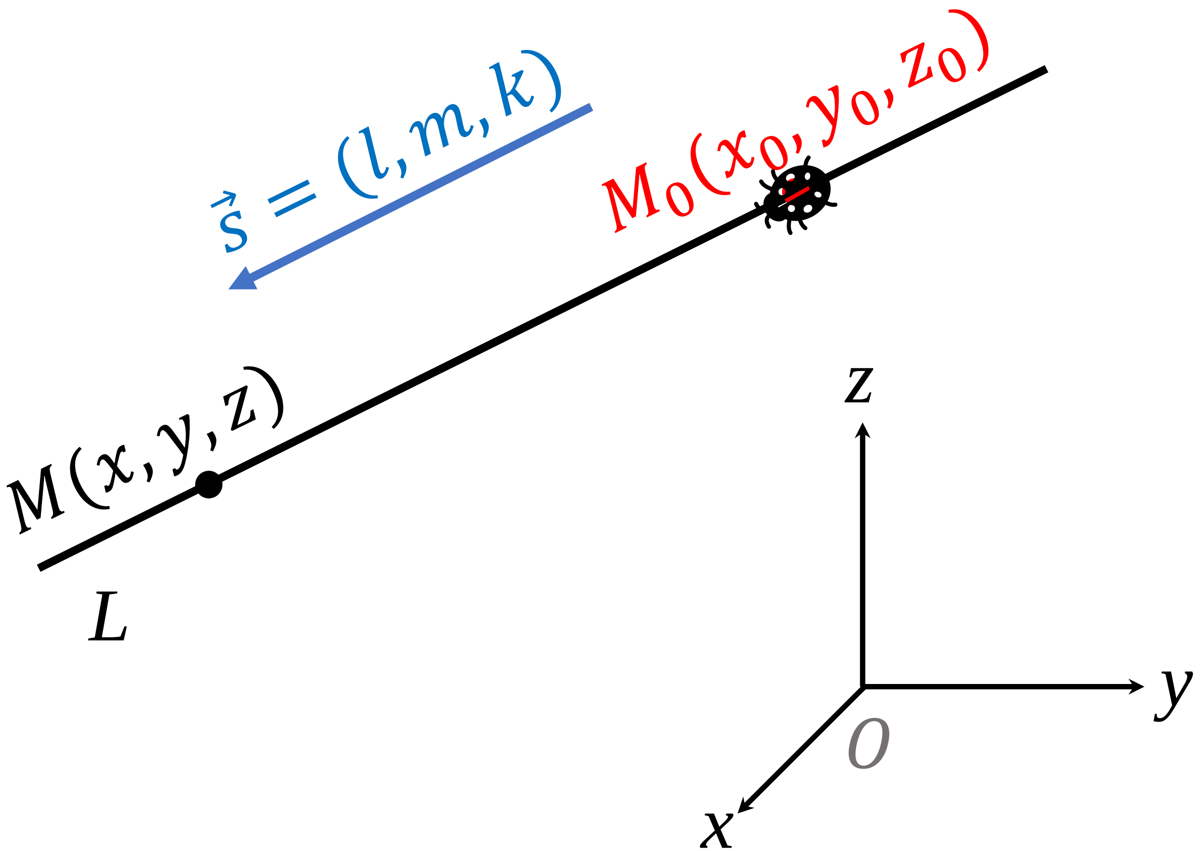
$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + t \cdot \ell \\ y = y_0 + t \cdot m \\ z = z_0 + t \cdot k \end{cases}}$$

$$\vec{s} = (\ell, m, k) \parallel L; \;\; \vec{s} \neq \vec{0}$$

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$$

<u>Физический смысл</u>: x, y, z – координаты материальной точки в момент времени t, движущейся равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{s}$.

Векторное уравнение прямой в пространстве



Каноническое уравнение прямой в пространстве

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \left(x - x_0, y - y_0, z - z_0\right)$$

$\overrightarrow{M_0M} \;||\; \vec{s} \;\Leftrightarrow$ векторы коллинеарны т. и т. т., к. их координаты пропорциональны

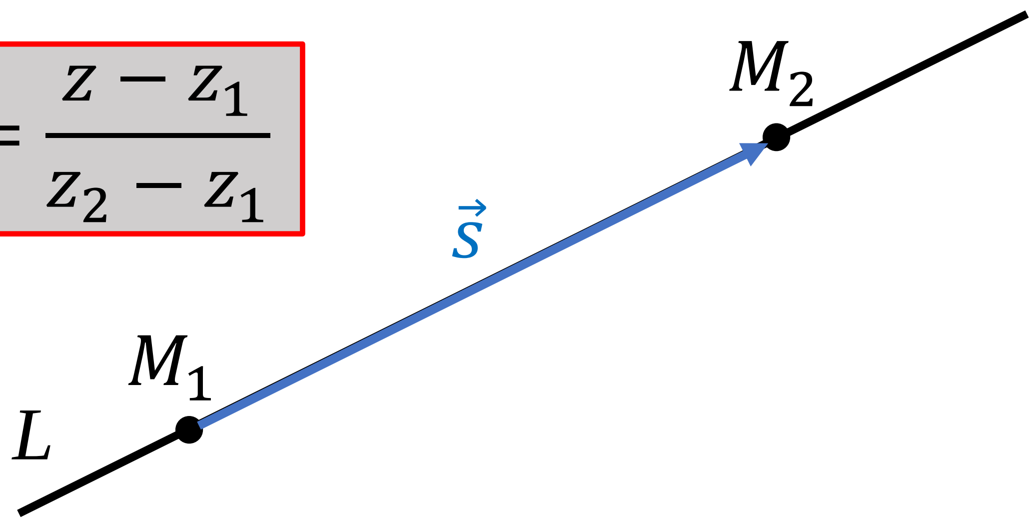
$$\boxed{\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{k}}$$

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – несовпадающие точки.

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$



Уравнение прямой как пересечения двух плоскостей

<u>Задача</u>. Составить каноническое уравнение прямой L, являющейся пересечением плоскостей $\alpha_1: 2x - 3y + 6z + 3 = 0$ и α_2: $x + 4y - 4z - 4 = 0$.

<u>Решение</u>. 1) Найдем какую-нибудь точку прямой L, подставив в систему

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6z + 3 = 0, \\ x + 4y - 4z - 4 = 0, \end{cases}$$ например, $x = 0$:

$$\begin{cases} -3y + 6z + 3 = 0, \\ 4y - 4z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2z = 1, \\ y - z = 1 \end{cases} \quad (-)$$

Уравнение прямой как пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} -z = 0, \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M_0(0,1,0) \in L$$

2) Найдем направляющий вектор $\vec{s}$ прямой L:

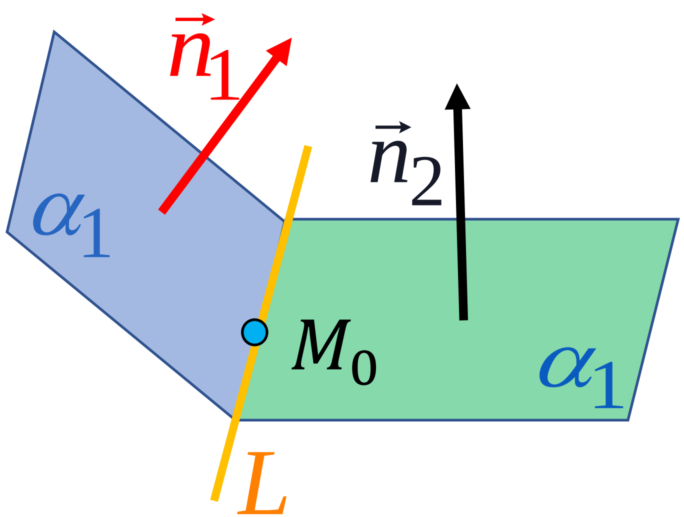
$$\vec{n}_1 \perp \alpha_1 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp L$$

$$\vec{n}_2 \perp \alpha_2 \Rightarrow \vec{n}_2 \perp L$$

$$\vec{n}_1, \vec{n}_2 \perp \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 || L \Rightarrow \boxed{\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2}$$



Уравнение прямой как пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} -z = 0, \\ y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M_0(0,1,0) \in L$$

2) Найдем направляющий вектор $\vec{s}$ прямой L:

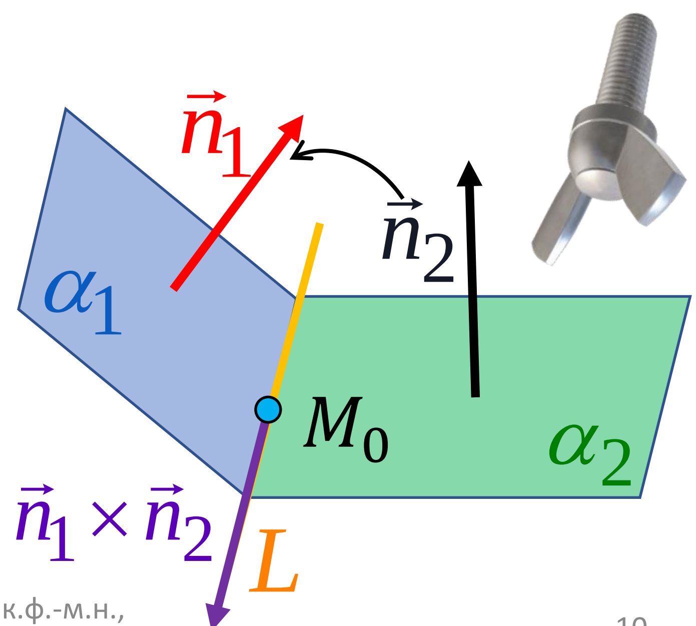
$$\vec{n}_1 \perp \alpha_1 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp L$$

$$\vec{n}_2 \perp \alpha_2 \Rightarrow \vec{n}_2 \perp L$$

$$\vec{n}_1, \vec{n}_2 \perp \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 || L \Rightarrow \boxed{\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2}$$



Уравнение прямой как пересечения двух плоскостей

$$\left.\begin{aligned}\vec{n}_1 &= (2,-3,6)\\ \vec{n}_2 &= (1,4,-4)\end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

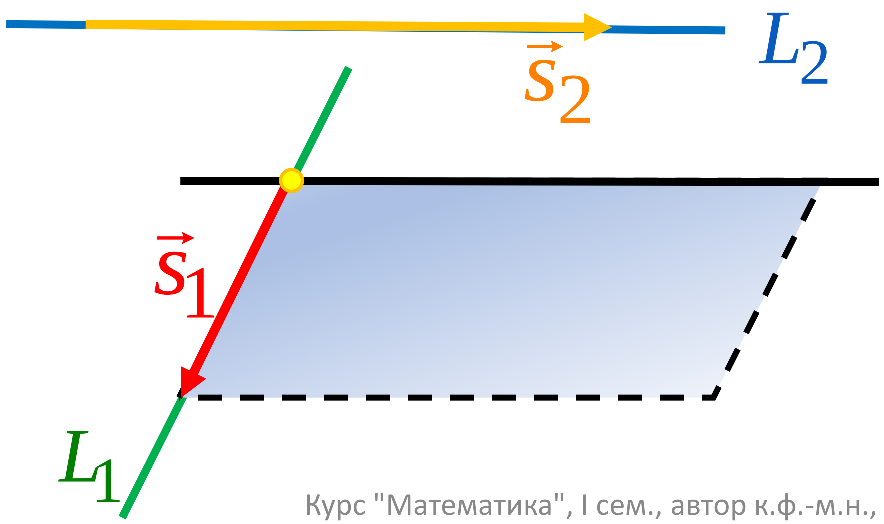
$$= -12\vec{i} + 14\vec{j} + 15\vec{k} = (-12,14,15)$$

$\left[\text{по формуле } \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{k}\right]$ $\quad L\colon \dfrac{x}{-12} = \dfrac{y-1}{14} = \dfrac{z}{15}$

Угол между двумя прямыми

$$\cos\varphi = \cos(L_1 L_2) = \left|\cos(\vec{s}_1 \vec{s}_2)\right|$$

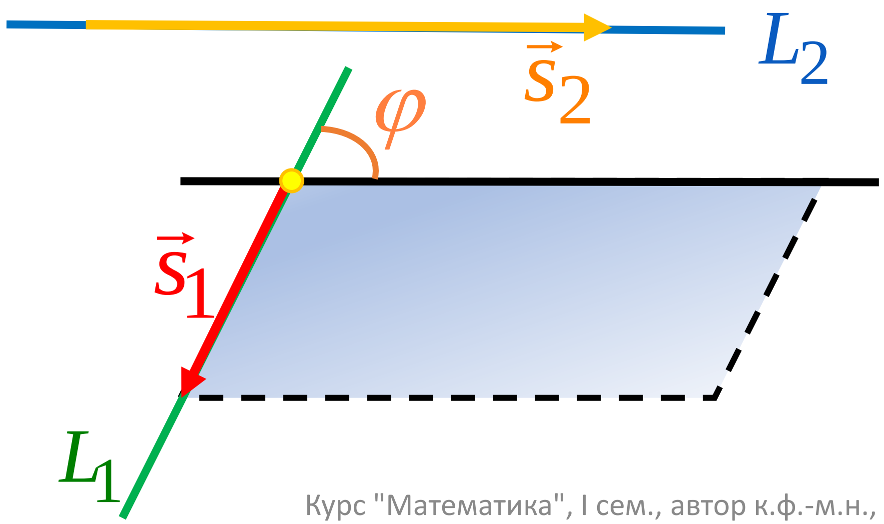
$$\cos\varphi = \frac{\left|\ell_1\ell_2 + m_1 m_2 + k_1 k_2\right|}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + k_1^2}\cdot\sqrt{\ell_2^2 + m_2^2 + k_2^2}}$$



Угол между двумя прямыми

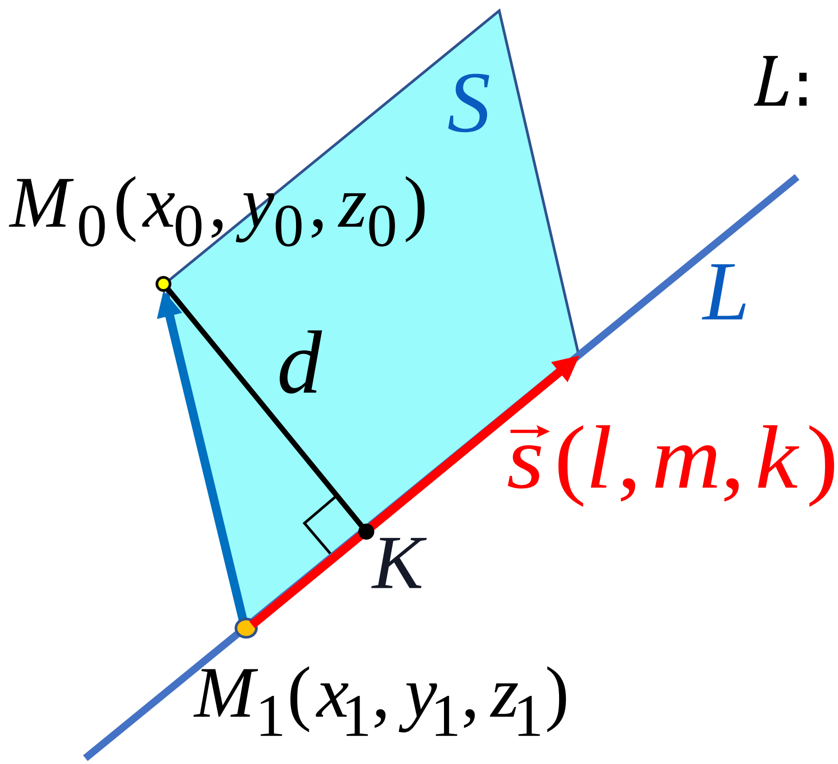
$$\cos\varphi = \cos(L_1 L_2) = \left|\cos(\vec{s}_1 \vec{s}_2)\right|$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|\ell_1\ell_2 + m_1 m_2 + k_1 k_2\right|}{\sqrt{\ell_1^2 + m_1^2 + k_1^2}\cdot\sqrt{\ell_2^2 + m_2^2 + k_2^2}}$$



Расстояние от точки до прямой

<u>Опр</u>. Расстоянием d от точки M до прямой называется наименьшее расстояние от M до точек прямой.



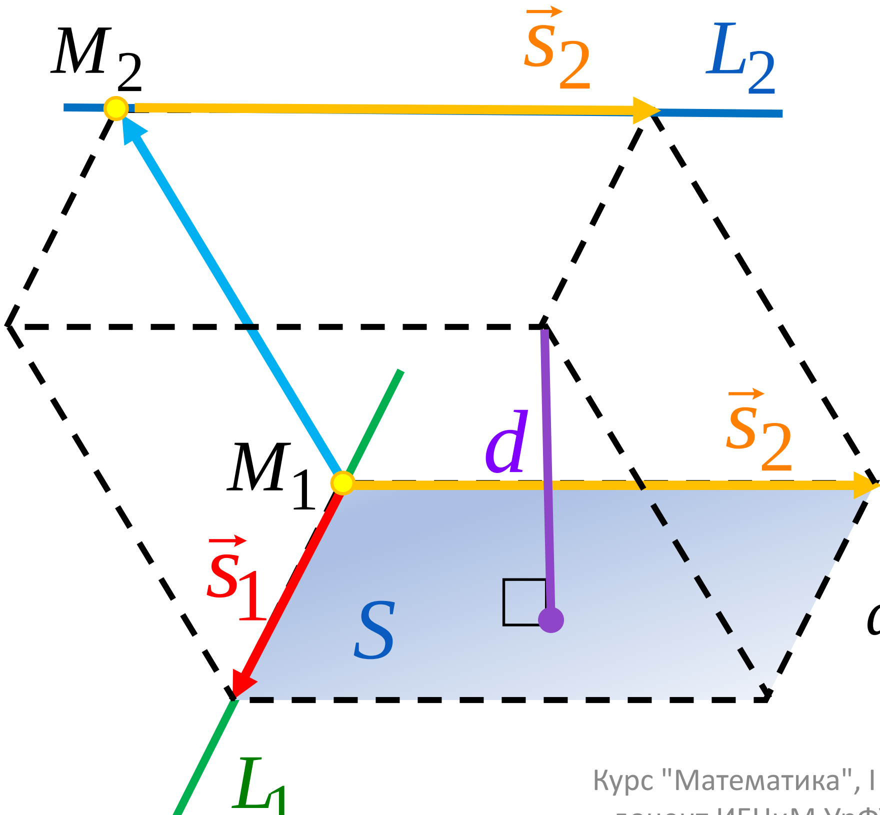
$$L: \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{k}$$

$$d = \frac{S}{|\vec{s}|}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|\vec{s} \times \overrightarrow{M_1 M_0}\right|}{|\vec{s}|}}$$

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

<u>Опр</u>. Расстоянием d между двумя скрещивающ. прямыми называется наименьшее расстояние от точек первой прямой до точек второй прямой.



$$L_1:\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{k_1}$$

$$L_2:\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{k_2}$$

$$d=\frac{V}{S}$$

$$\boxed{d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2\right|}{\left|\vec{s}_1\times\vec{s}_2\right|}}$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Рассмотрим

$$\Delta = \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & k_1 \\ l_2 & m_2 & k_2 \end{vmatrix}$$

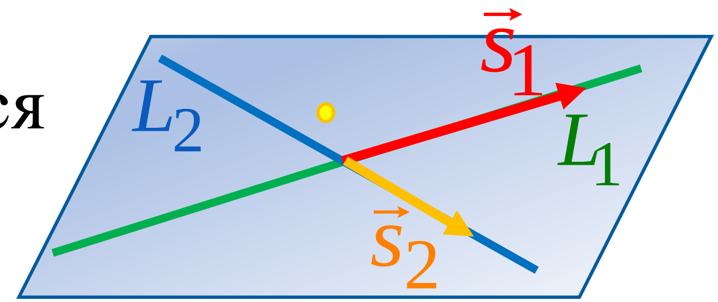
<u>Утверждение 1</u>. Прямые L_1 и L_1 скрещиваются т. и т. т., к. $\Delta = \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \neq 0$.

<u>Доказательство</u>. Прямые L_1 и L_1 скрещиваются т. и т. т., к. вектора $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ некомпланарны. ■

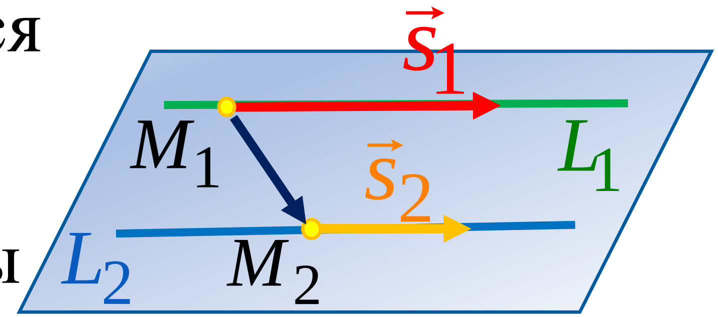
Взаимное расположение прямых в пространстве

<u>Утверждение 2</u>.

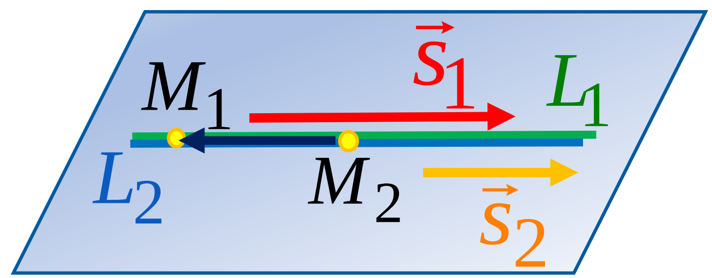
1) Прямые L_1 и L_2 скрещиваются $\Leftrightarrow\ \boldsymbol{\Delta \neq 0}$



2) Прямые L_1 и L_2 пересекаются $\Leftrightarrow\ \boldsymbol{\Delta = 0}$ **и** $\boldsymbol{\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2}$



3) Прямые L_1 и L_2 параллельны $\Leftrightarrow\ \boldsymbol{(\Delta = 0)}$ **и** $\boldsymbol{\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}}$



4) Прямые L_1 и L_2 совпадают $\Leftrightarrow\ \boldsymbol{(\Delta = 0)}$ **и** $\boldsymbol{\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}}$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Пример. Доказать, что прямые L_1: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$ и L_2: $\frac{x+4}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{1}$ скрещивающиеся и найти расстояние между ними.

Решение.

$M_1(1,-1,1)$ $\quad$ $M_2(-4,1,-2)$ $\quad$ $\overrightarrow{M_1M_2}=(-5,2,-3)$

$\vec{s}_1=(1,-2,3)$ $\quad$ $\vec{s}_2=(-2,1,1)$

$$\Delta=\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=\begin{vmatrix}-5 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 3\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(10-12-3)-$$

$-(-12+2-15)=20\neq 0\Rightarrow$ прямые L_1 и L_2 скрещиваются

Взаимное расположение прямых в пространстве

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k} = (-5, -7, -3)$$

$$|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| = \sqrt{25 + 49 + 9} = \sqrt{83} \Rightarrow$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2\right|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{20}{\sqrt{83}}$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

<u>Пример</u>. Доказать, что прямые $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$ и $L_2: \frac{x+4}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{0}$ пересекаются и найти точку их пересечения.

<u>Решение</u>.

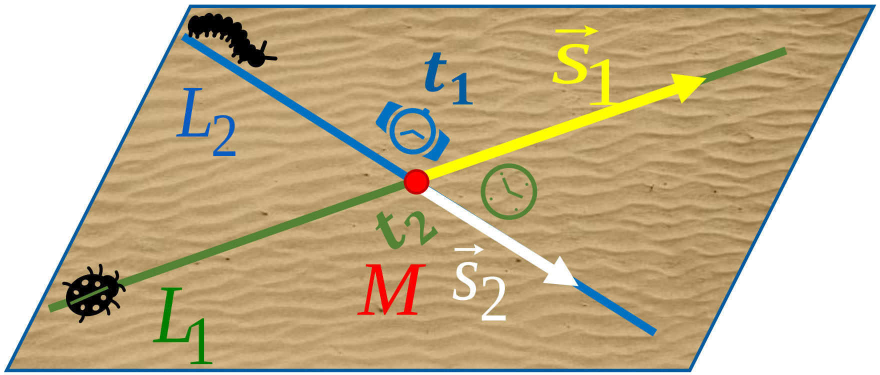
$M_1(1,-1,1)$ $\quad M_2(-4,1,-2)$ $\quad \overrightarrow{M_1M_2} = (-5,2,-3)$

$\vec{s}_1 = (1,-2,3)$ $\quad \vec{s}_2 = (1,0,0)$

$$\Delta = \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} -5 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

и $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2 \Rightarrow$ прямые L_1 и L_2 пересекаются.

Взаимное расположение прямых в пространстве



$$t_1 \neq t_2\ !$$

так как материальные точки были в точке M **в разные моменты времени**

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3} = t_1 \quad \Rightarrow \quad L_1: \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = -1 - 2t_1 \\ z = 1 + 3t_1 \end{cases}$$

$$L_2: \frac{x+4}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{0} = t_2 \quad \Rightarrow \quad L_2: \begin{cases} x = -4 + t_2 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Взаимное расположение прямых в пространстве

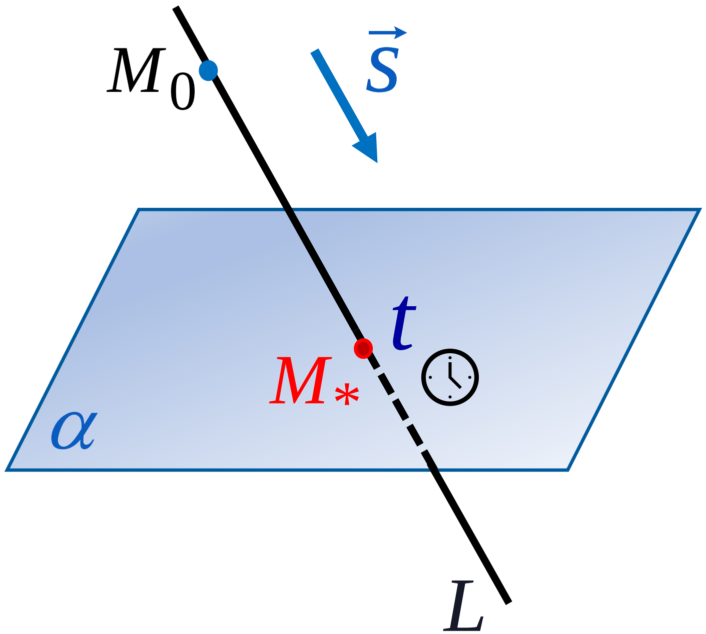
Приравнивая x, y, z из параметрических уравнений прямых L_1 и L_2, решим систему относительно t_1 и t_2.

$$\begin{cases} 1 + t_1 = -4 + t_2 \\ -1 - 2t_1 = 1 \\ 1 + 3t_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - t_2 = -5 \\ -2t_1 = 2 \\ 3t_1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

Найдем координаты точки пересечения, подставляя значение $t_1(t_2)$ в уравнения прямой $L_1(L_2)$:

$$x = 1 + t_1 = 1 - 1 = 0$$
$$y = -1 - 2t_1 = -1 - 2(-1) = 1 \Rightarrow M(0,1,-2)$$
$$z = 1 + 3t_1 = 1 + 3(-1) = -2$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве



$$L: \begin{cases} x = x_0 + t \cdot l \\ y = y_0 + t \cdot m \\ z = z_0 + t \cdot k \end{cases}$$

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

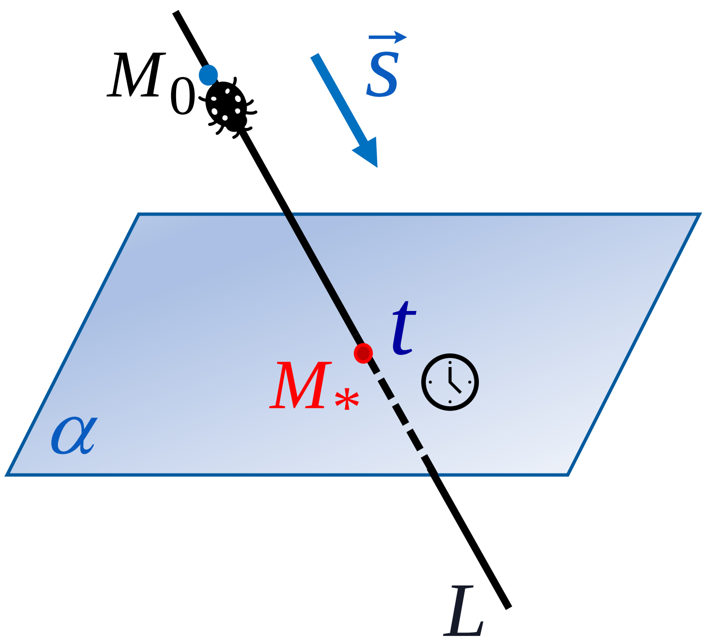
$$\vec{s} = (l, m, k)$$

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

1) Подставим уравнения прямой L в уравнение плоскости α.

2) Найдем «момент времени» t, в который матер. точка «дошла» до плоскости α.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве



$$L:\begin{cases} x = x_0 + t \cdot l \\ y = y_0 + t \cdot m \\ z = z_0 + t \cdot k \end{cases}$$

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\vec{s} = (l, m, n)$$

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

1) Подставим уравнения прямой L в уравнение плоскости α.

2) Найдем «момент времени» t, в который матер. точка «дошла» до плоскости α.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

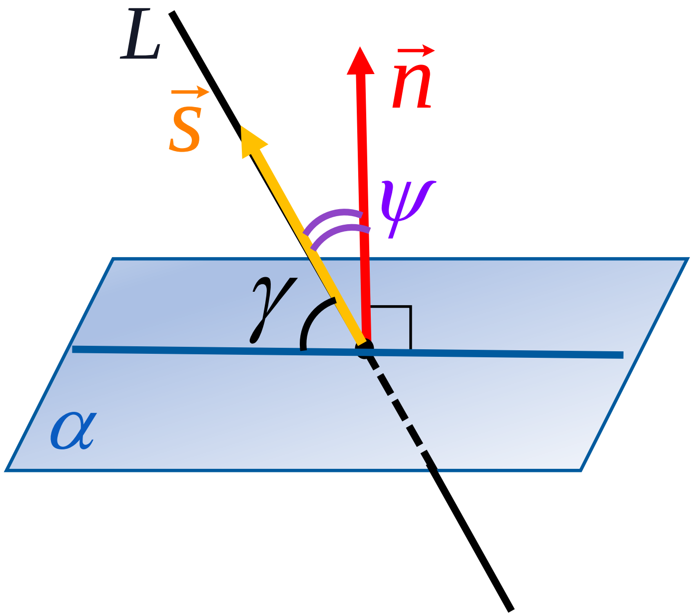
3) Подставим полученное значение $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_*$ в уравнения прямой. Получим точку $\boldsymbol{M}_*(\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{y}_*, \boldsymbol{z}_*)$ пересечения L и α.

4) Если таких значений t бесконечно, то это значит, что $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{\alpha}$.

5) Если таких значений t нет, то это значит, что $\boldsymbol{L} \parallel \boldsymbol{\alpha}$.

Угол между прямой и плоскостью

Опр. Углом γ между прямой и плоскостью называется острый угол между прямой и проекцией этой прямой на плоскость.



$$\vec{s} = (l, m, k)$$

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

$$\sin\gamma = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \cos\psi$$

$$\boxed{\sin\gamma = \left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}\right| = \left|\frac{Al+Bm+Ck}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+k^2}}\right|}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пример. Доказать, что прямая $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ пересекает плоскость $\alpha: \ 2x + 3y + z - 1 = 0$, найти точку их пересечения и угол между ними.

Решение.

$$L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = t \\ y + 1 = -2t \\ z = 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t - 1 \\ z = 6t \end{cases}$$

Подставим параметрические уравнения в уравнение плоскости:

$$2(t + 1) + 3(-2t - 1) + 6\mathrm{t} - 1 = 0$$

$$2t - 2 = 0$$

$$\boldsymbol{t = t_* = 1} \Rightarrow$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

$$\begin{cases} x_* = 2 \\ y_* = -3 \\ z_* = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$\boldsymbol{M_* = (2, -3, 6)}$ – точка пересечения L и α

$$\vec{n} = (2,3,1) \qquad \vec{s} = (1,-2,6)$$

$$\sin\gamma = \left|\frac{\vec{n}\cdot\vec{s}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{s}|}\right| = \left|\frac{2\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 1\cdot 6}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+6^2}}\right| =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{41}} = \frac{2}{\sqrt{574}} \Rightarrow \boldsymbol{\gamma} = \arcsin\frac{2}{\sqrt{574}}$$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

<u>Пример</u>. Доказать, что прямая $L_1\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ лежит в плоскости α: $3y+z+3=0$, а прямая $L_2\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{6}$ параллельна этой плоскости.

<u>Решение</u>.

$$L_1\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}=t \Leftrightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t-1 \\ z=6t \end{cases}$$

$$3(-2t-1)+6t+3=0$$

$0\cdot t+0=0$ - имеет бесконечно много решений

$\Rightarrow \boldsymbol{L\subset\alpha}$

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

$$L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{6} = t \;\Leftrightarrow \begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t-1 \\ z = 6t+1 \end{cases}$$

$$3(-2t-1) + 6t + 1 + 3 = 0$$

$0 \cdot t + 1 = 0$ - не имеет решений

$$\Rightarrow \boldsymbol{L} \parallel \boldsymbol{\alpha}$$