Лекция 5

Аналитическая геометрия

Плоскость в пространстве

Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Презентации сделана на основе лекций

к.ф.-м.н., доцента Щербаковой В.А.

§2. Плоскость и прямая в пространстве

Уравнение поверхности в пространстве

Опр. Уравнением поверхности в пространстве называется уравнение $\boldsymbol{F(x,y,z)=0}$ такое, что точка $M(x_M, y_M, z_M)$ лежит на поверхности тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (т.е. $F(x_M, y_M, z_M) = 0$ – верное числовое равенство).

Векторное уравнение плоскости

<u>Обозначения</u>: α – плоскость в пространстве

$\vec{s}_1, \vec{s}_2$ – направляющие вектора плоскости, т.е. неколлинеарные вектора, параллельные плоскости;

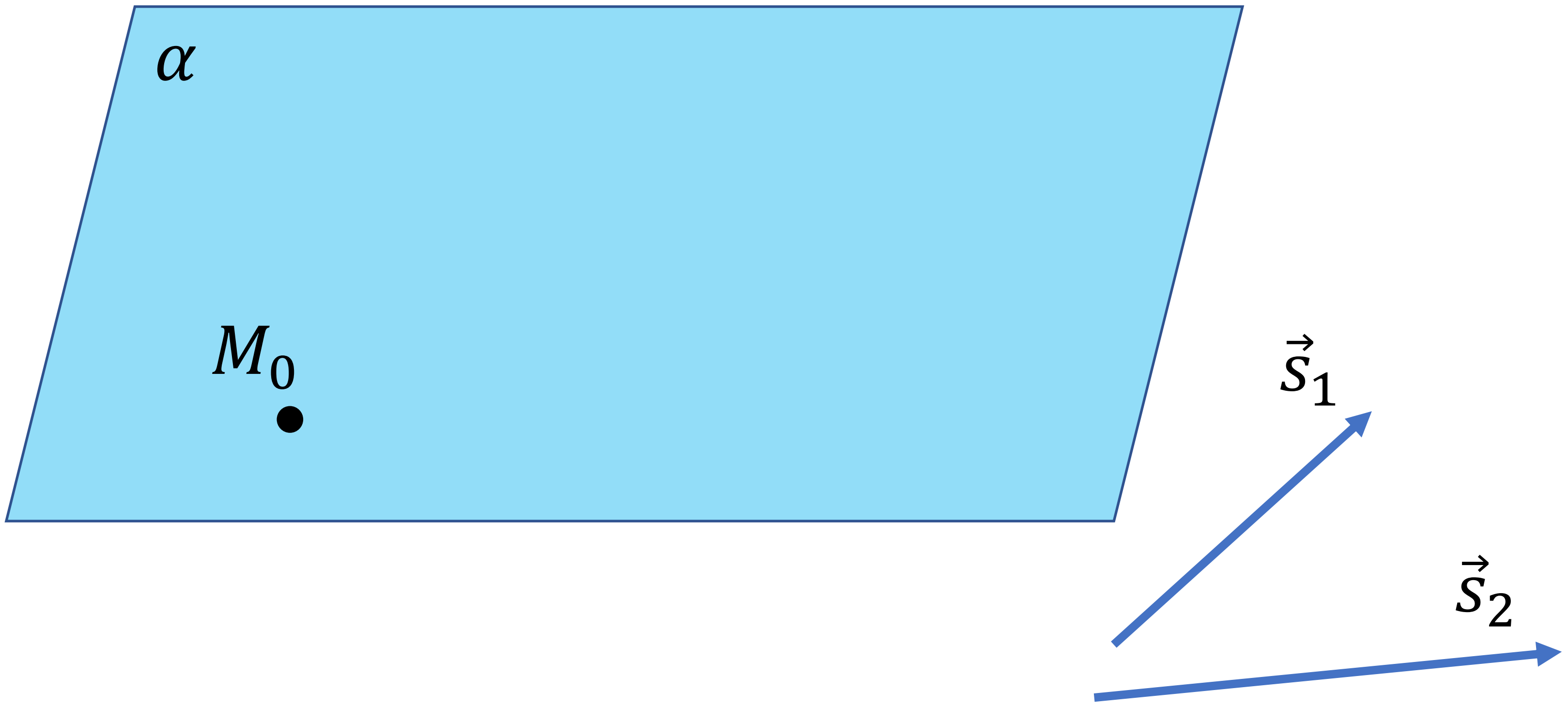
$M(x, y, z)$– произвольная точка плоскости;

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная точка плоскости;

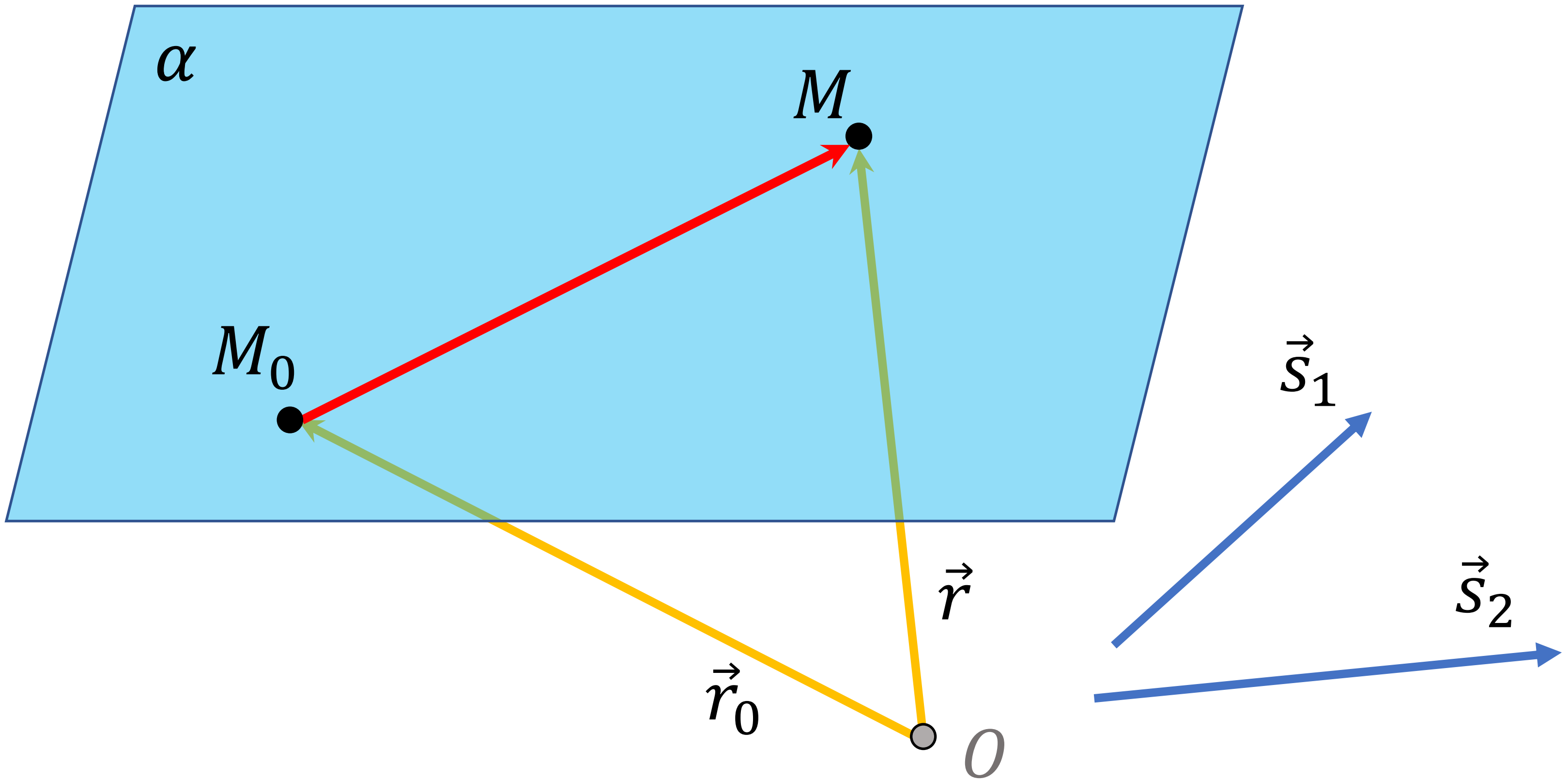
$\vec{r}$ – радиус-вектор точки M ;

$\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0.

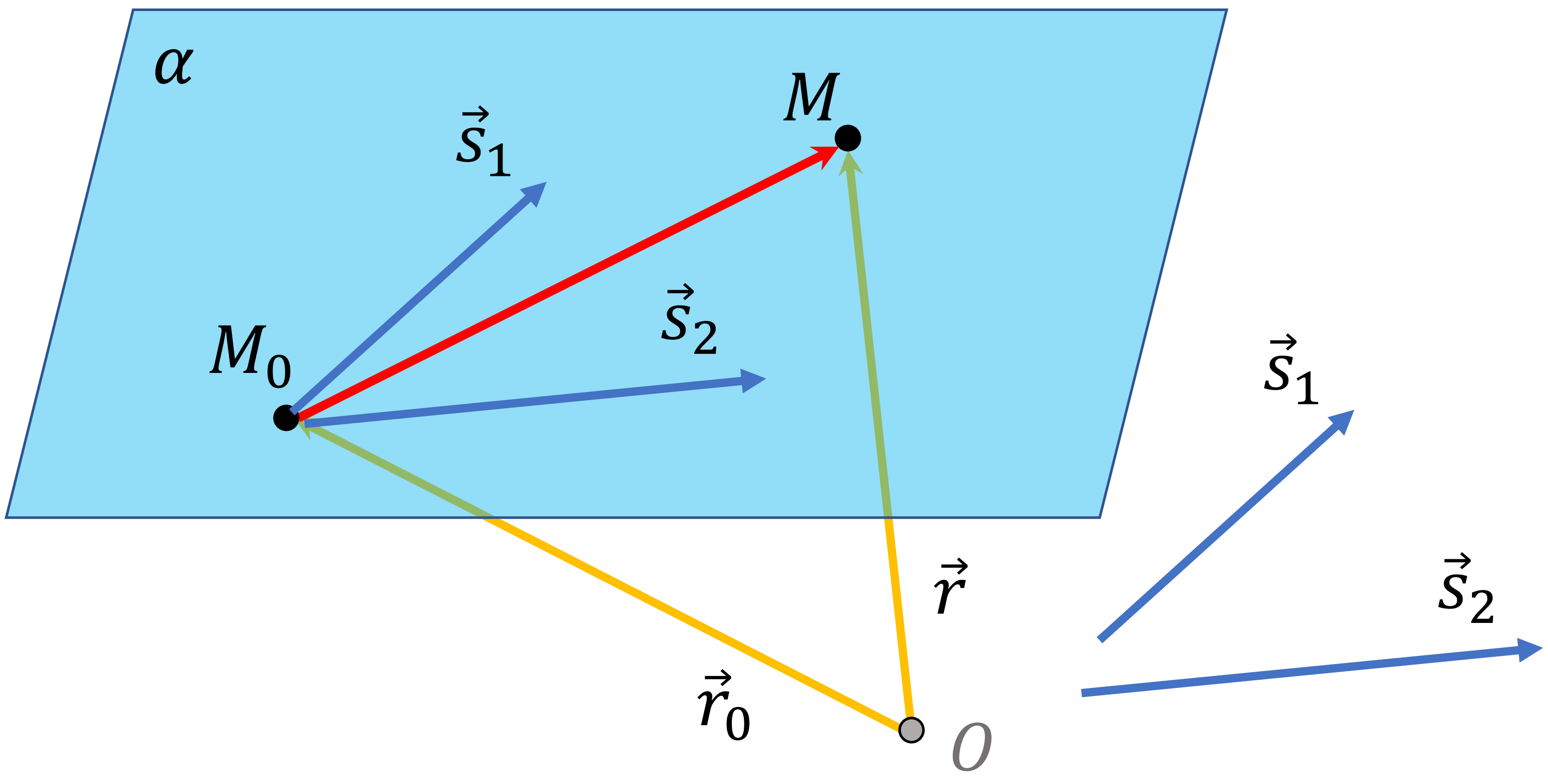
Векторное уравнение плоскости



Векторное уравнение плоскости



Векторное уравнение плоскости



Векторное уравнение плоскости

$$\overrightarrow{M_0M}, \vec{s}_1, \vec{s}_2 - \textit{компланарны} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$\boxed{\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0}$$ - векторное уравнение плоскости α

Каноническое уравнение плоскости

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z); \qquad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0, z_0);$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \left(x - x_0, y - y_0, z - z_0\right)$$

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, k_1); \qquad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, k_2);$$

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ – три фиксированные точки на плоскости α, не лежащие на одной прямой.

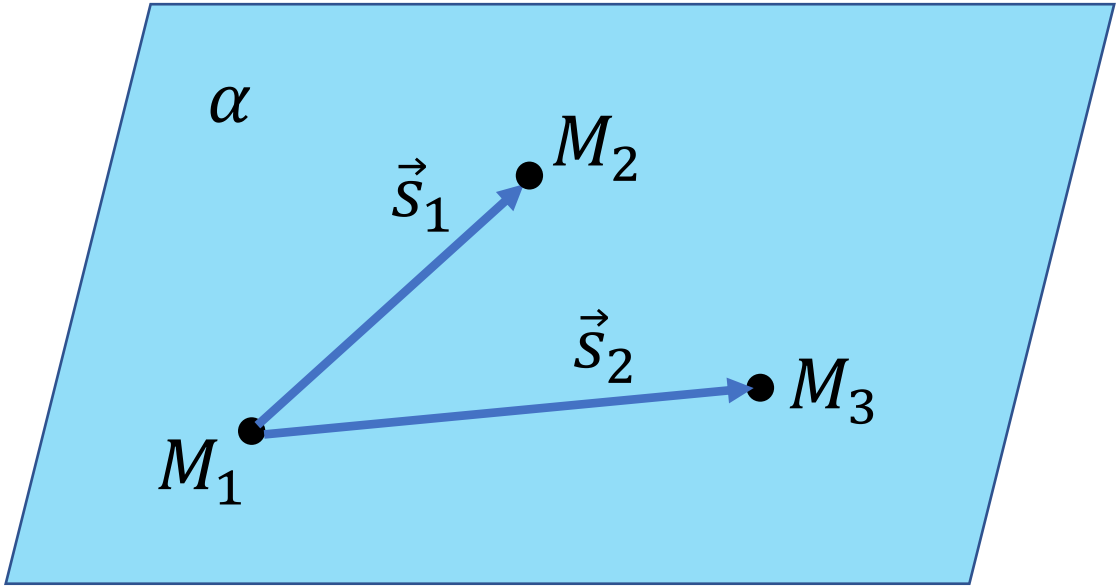
Пусть $\vec{s}_1 = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$\vec{s}_2 = \overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

$\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ не коллинеарны. Тогда из канонического уравнения плоскости:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки



Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пример 1. $A(-1,2,3), B(0,1,-1), C(2,1,-1)$. Найти уравнение плоскости ABC.

Решение.

$$\vec{s}_1 = \overrightarrow{AB} = (0-(-1), 1-2, (-1)-3) = (1,-1,-4)$$

$$\vec{s}_2 = \overrightarrow{AC} = (2-(-1), 1-2, (-1)-3) = (3,-1,-4)$$

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$(x+2)\cdot 0-(y-2)\cdot 8+(z-3)\cdot 2=0$$

$$-8y+16+2z-6=0 \;\Leftrightarrow$$

$$-8y+2z+10=0 \Leftrightarrow$$

$$4y-z-5=0$$

Общее уравнение плоскости с данными нормальным вектором и точкой на ней

Пусть $\vec{n} = (A, B, C)$ –
нормальный вектор плоскости α, т.е.
ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости α

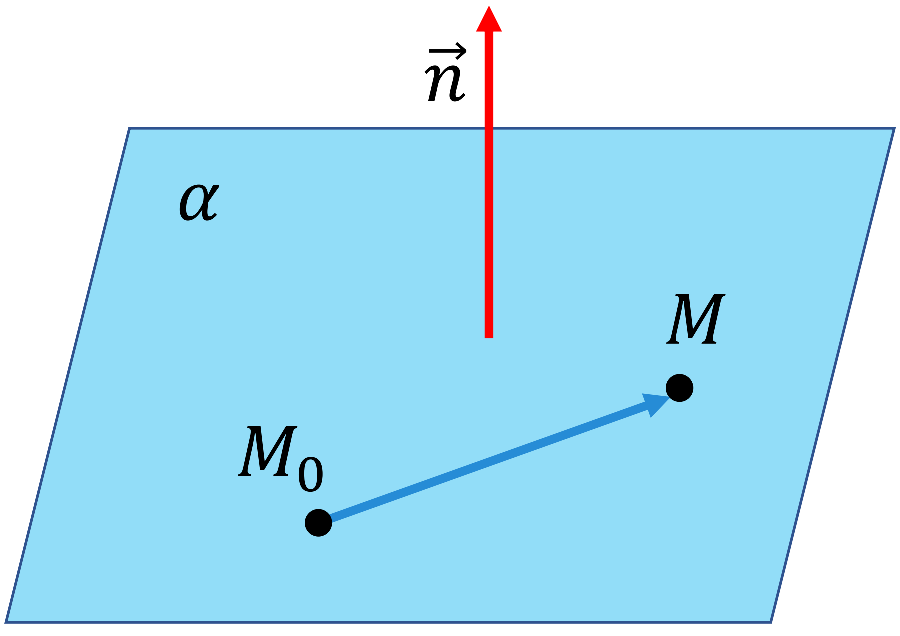
$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \iff (\overrightarrow{M_0M}, \vec{n})=0$

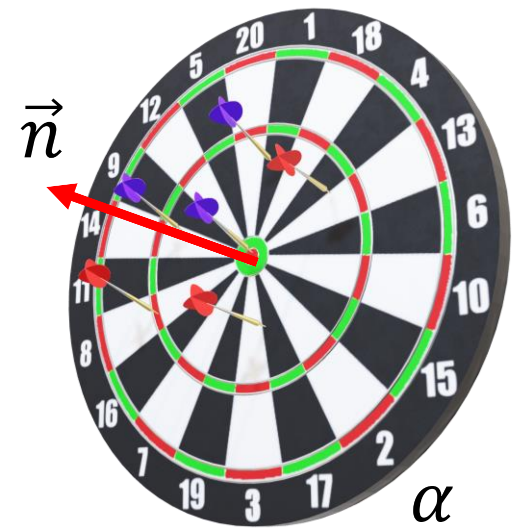
$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

- уравнение плоскости, с нормальным вектором $\vec{n}$ и точкой M_0 на плоскости

Общее уравнение плоскости с данными нормальным вектором и точкой на ней





Общее уравнение плоскости

$$\alpha:\ A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C(z-z_0)=0$$

$$\Downarrow$$

$$Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0$$

$$\Downarrow$$

$$Ax+By+Cz\underbrace{-Ax_0-By_0-Cz_0}=0$$

$$\Downarrow$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Общее уравнение плоскости

$$\alpha: \ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Downarrow$$

$$Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0$$

$$\Downarrow$$

$$Ax+By+Cz\underbrace{-Ax_0-By_0-Cz_0}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

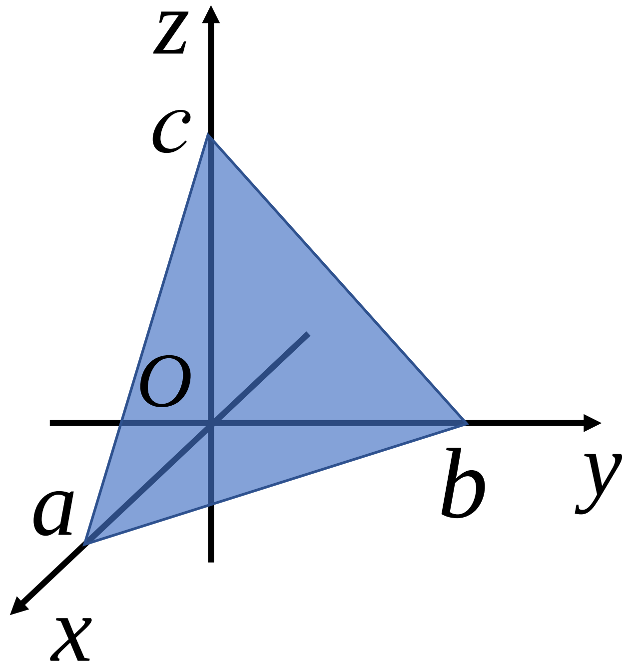
общее уравнение плоскости
с нормальным вектором $\vec{n}=(A,B,C)$

Уравнение плоскости «в отрезках»

Выводится из общего уравнения плоскости так же, как и для прямой (самостоятельно)

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$

a, b, c – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях



Уравнение плоскости «в отрезках»

Пример 2. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,2,3)$, перпендикулярно к вектору $\vec{n} = (2,-2,3)$. Составить уравнение этой плоскости «в отрезках». .

Решение.

$$2 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y-2) + 3 \cdot (z-3) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$2x - 2 - 2y + 4 + 3z - 9 = 0$$

$2x - 2y + 3z - 7 = 0$ - общее уравнение плоскости

Уравнение плоскости «в отрезках»

$$2x - 2y + 3z - 7 = 0$$

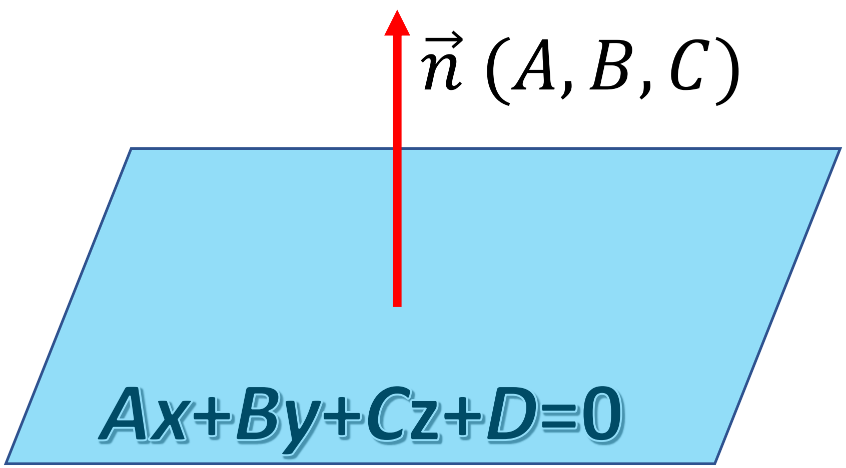
$$2x - 2y + 3z = 7 \ (:7)$$

$$\frac{2}{7}x - \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}z = 1$$

$$\frac{x}{\frac{7}{2}} + \frac{y}{-\frac{7}{2}} + \frac{z}{\frac{7}{3}} = 1$$ - уравнение плоскости «в отрезках»

Теорема об общем уравнение плоскости

Теорема. Любая плоскость задается общим уравнением, и наоборот, любое уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ задает плоскость (если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$). (Без док-ва).



Взаимное расположение двух плоскостей

$$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$$

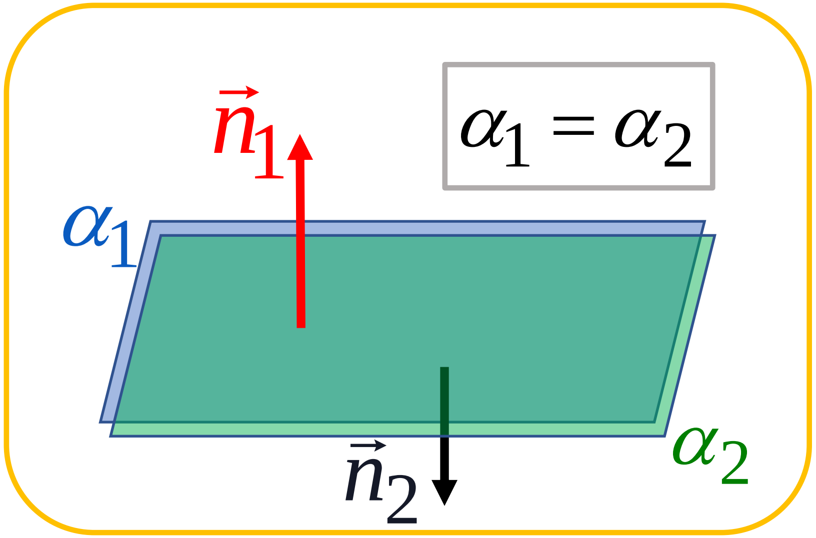
$$\alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

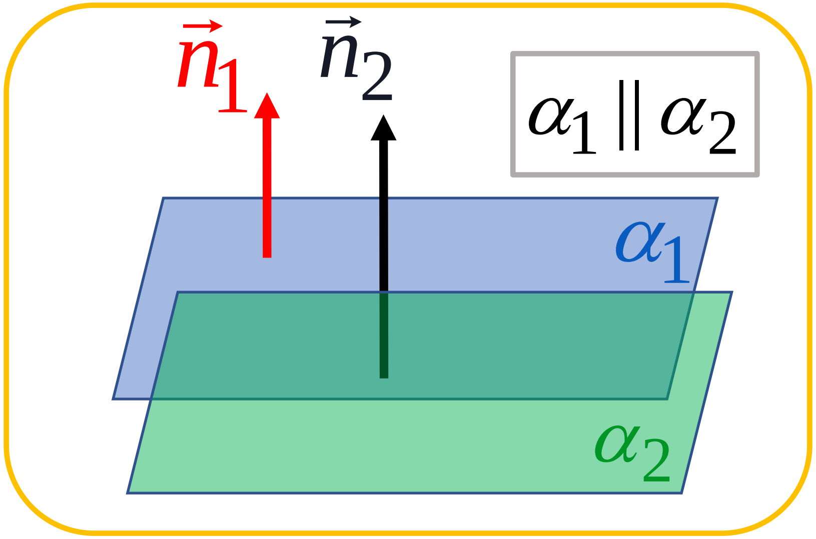
$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

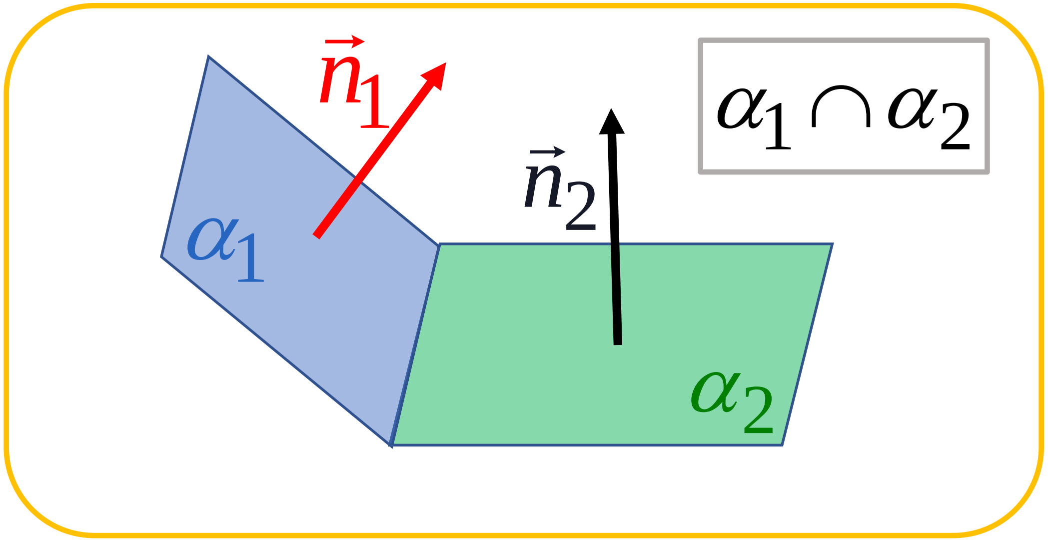
$$\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}} \qquad \boxed{\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}}$$

$$\boxed{\alpha_1 \text{ и } \alpha_2 \text{ пересекаются} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}}$$

Взаимное расположение двух плоскостей

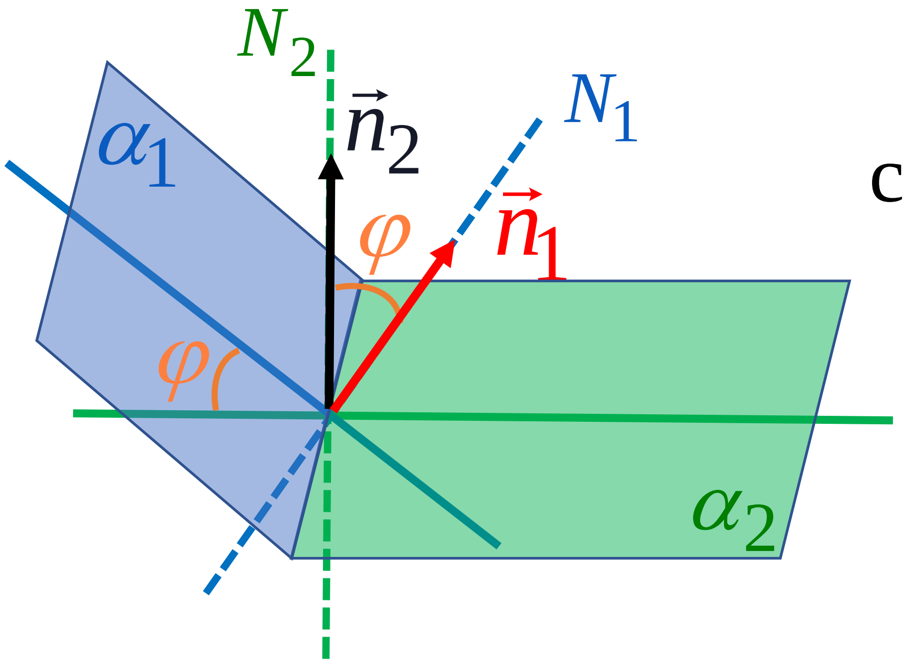






Угол между двумя плоскостями

<u>Утв.</u> Острый **угол** φ **между плоскостями** α_1 и α_2 равен острому углу между нормалями N_1 и N_2 к этим плоскостям.



$$\cos\varphi = \cos(\alpha_1\alpha_2)$$

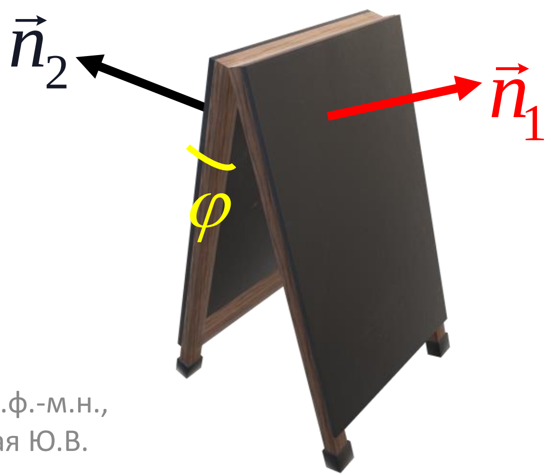
$$\cos(\alpha_1\alpha_2) = \cos(N_1N_2)$$

$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{n}_1\vec{n}_2)\right|$$

Угол между двумя плоскостями

$$\cos\varphi = \cos(\alpha_1\alpha_2) = \left|\cos(\vec{n}_1\vec{n}_2)\right|$$

$$\cos\varphi = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^{\,2} + B_1^{\,2} + C_1^{\,2}} \cdot \sqrt{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}}$$



Угол между двумя плоскостями

Пример 3. Доказать, что плоскости $z + 3 = 0$, $2x - y - 4z - 4 = 0$ пересекаются и найти острый угол между ними.

Решение.

α_1: $z + 3 = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z + 3 = 0$

α_2: $2x - y - 4z - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$2 \cdot x + (-1) \cdot y + (-4) \cdot z - 4 = 0$

$\frac{0}{2} = \frac{0}{-1} \neq \frac{1}{-4} \Rightarrow$ плоскости α_1 и α_2 пересекаются

Угол между двумя плоскостями

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} =$$

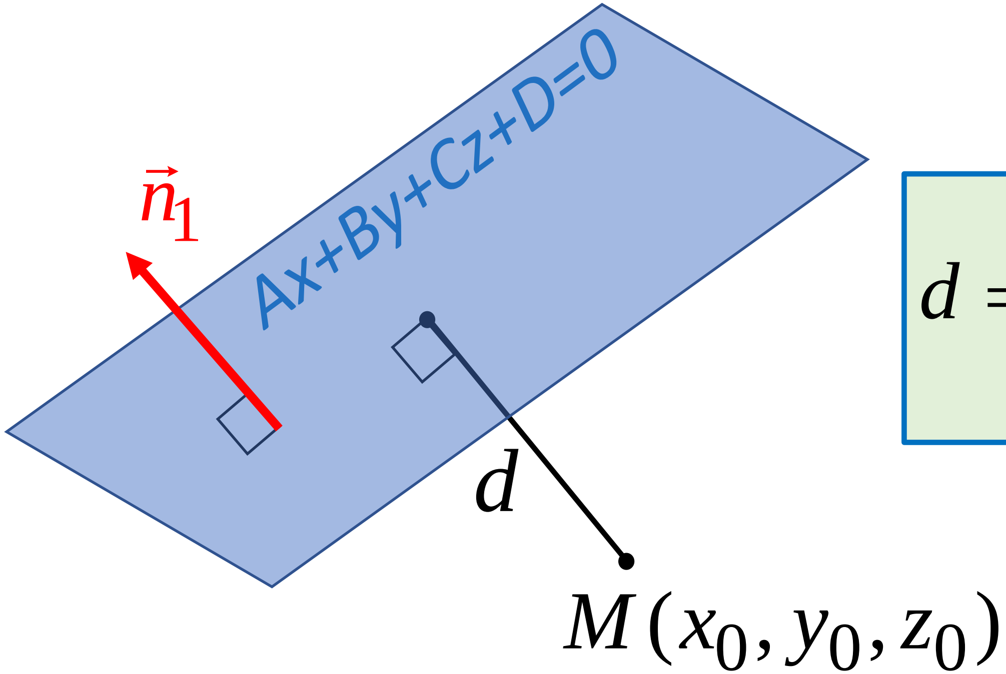
$$= \frac{|0 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4)|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-4)^2}} =$$

$$= \frac{|-4|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}} \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = \arccos\frac{4}{\sqrt{21}}}$$

- острый угол между плоскостями α_1 и α_2

Расстояние от точки до плоскости

Опр. Расстоянием d от точки M до прямой называется наименьшее расстояние от M до точек прямой.



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Расстояние от точки до плоскости

Пример 4. Найти расстояние от точки $M(4,3,1)$ до плоскости $3x - 4y + 12z + 14 = 0$.

Решение.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 + 12 \cdot 1 + 14|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = \frac{|26|}{\sqrt{169}} = \mathbf{2}$$